

## 2002 年山西高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 9 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

### 第 I 卷(选择题共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 直线  $(1+a)x + y + 1 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  相切, 则  $a$  的值为

- (A) 1, -1      (B) 2, -2      (C) 1      (D) -1

(2) 复数  $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$  的值是

- (A)  $-i$       (B)  $i$       (C)  $-1$       (D)  $1$

(3) 不等式  $(1+x)(1-|x|) > 0$  的解集是

- (A)  $\{x | 0 \leq x < 1\}$       (B)  $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$   
(C)  $\{x | -1 < x < 1\}$       (D)  $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$

(4) 函数  $y = a^x$  在  $[0, 1]$  上的最大值与最小值之和为 3, 则  $a =$

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B) 2      (C) 4      (D)  $\frac{1}{4}$

(5) 在  $(0, 2\pi)$  内, 使  $\sin x > \cos x$  成立的  $x$  的取值范围是

- (A)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$       (B)  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$       (C)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$       (D)  $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

(6) 设集合  $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$ ,  $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$ , 则

- (A)  $M = N$       (B)  $M \subset N$       (C)  $M \supset N$       (D)  $M \cap N = \emptyset$

(7) 椭圆  $5x^2 + ky^2 = 5$  的一个焦点是  $(0, 2)$ , 那么  $k =$

- (A)  $-1$       (B) 1      (C)  $\sqrt{5}$       (D)  $-\sqrt{5}$

(8) 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是

- (A)  $\frac{3}{4}$       (B)  $\frac{4}{5}$       (C)  $\frac{3}{5}$       (D)  $-\frac{3}{5}$

(9)  $0 < x < y < a < 1$ , 则有

- (A)  $\log_a(xy) < 0$    (B)  $0 < \log_a(xy) < 1$    (C)  $1 < \log_a(xy) < 2$    (D)  $\log_a(xy) > 2$

(10) 函数  $y = x^2 + bx + c$  ( $x \in [0, +\infty)$ ) 是单调函数的充要条件是

- (A)  $b \geq 0$       (B)  $b \leq 0$       (C)  $b > 0$       (D)  $b < 0$

(11) 设  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 则二次曲线  $x^2 \operatorname{ctg} \theta - y^2 \operatorname{tg} \theta = 1$  的离心率取值范围

- (A)  $(0, \frac{1}{2})$       (B)  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$       (C)  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$       (D)  $(\sqrt{2}, +\infty)$

(12) 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有

- (A) 8 种      (B) 12 种      (C) 16 种      (D) 20 种

### 第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线.

(13) 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从\_\_\_\_\_年 2000 年的五年间增长最快。

(14) 函数  $y = \frac{2x}{1+x}$  ( $x \in (-1, +\infty)$ ) 图象与其反函数图象的交点为\_\_\_\_\_

(15)  $(x^2 + 1)(x - 2)^7$  展开式中  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_

(16) 对于顶点在原点的抛物线, 给出下列条件:

①焦点在  $y$  轴上; ②焦点在  $x$  轴上; ③抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6; ④抛

物线的通径的长为 5; ⑤由原点向过焦点的某条直线作垂线, 垂足坐标为  $(2, 1)$ 。

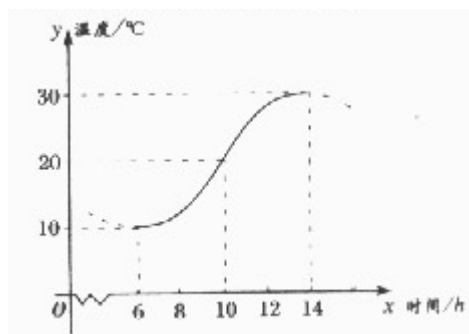
能使这抛物线方程为  $y^2 = 10x$  的条件是第\_\_\_\_\_ (要求填写合适条件的序号)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 如图, 某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近

似满足函数  $y = A \sin(ax + \varphi) + b$

- (1) 求这段时间的最大温差;  
(2) 写出这段时间的函数解析式;



(18) 甲、乙物体分别从相距 70 米的两处同时相向运动。甲第 1 分钟走 2 米，以后每分钟比前 1 分钟多走 1 米，乙每分钟走 5 米。

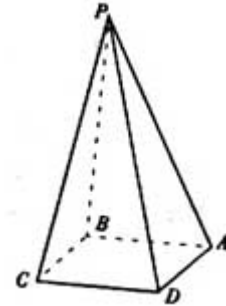
(1) 甲、乙开始运动后几分钟相遇？

(2) 如果甲、乙到达对方起点后立即折返，甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 米，乙继续每分钟走 5 米，那么开始运动几分钟后第二相遇？

(19) 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是边长为  $a$  的正方形， $PB \perp$  平面  $ABCD$ 。

(1) 若面  $PAD$  与面  $ABCD$  所成的二面角为  $60^\circ$ ，求这个四棱锥的体积；

(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化。面  $PAD$  与面  $PCD$  所成的二面角恒大于  $90^\circ$



(20) 设函数  $f(x) = x^2 + |x - 2| + 1$ ,  $x \in R$

(1) 讨论  $f(x)$  的奇偶性；

(2) 求  $f(x)$  的最小值。

(21) 已知点  $P$  到两定点  $M(-1,0)$ 、 $N(1,0)$  距离的比为  $\sqrt{2}$ ，点  $N$  到直线  $PM$  的距离为 1，求直线  $PN$  的方程。

(22) (本小题满分 12 分，附加题满分 4 分)

(I) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2)，要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1、图 2 中，并作简要说明；

(II) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

(III) (本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分)

如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3)，要求剪拼成一个直三棱柱，使它的全面积与给出的三角形的面积相等。请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图 3 中，并作简要说明。

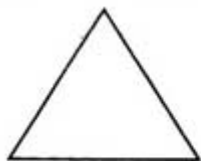


图 1

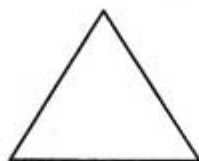


图 2

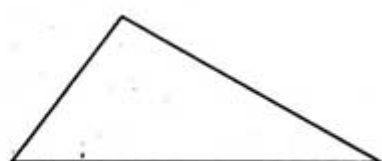


图 3

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	D	B	C	B	B	C	D	A	D	B

二、填空题

(13) 1995 2000 (14) (0,0),(1,1) (15) 1008 (16) ②⑤

三、解答题

(17) 解: (1) 由图示, 这段时间的最大温差是  $30 - 10 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$

(2) 图中从 6 时到 14 时的图象是函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$  的半个周期

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 14 - 6, \text{ 解得 } \omega = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{由图示, } A = \frac{1}{2}(30 - 10) = 10 \quad b = \frac{1}{2}(10 + 30) = 20$$

$$\text{这时, } y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \varphi\right) + 20$$

$$\text{将 } x = 6, y = 10 \text{ 代入上式, 可取 } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{综上, 所求的解析式为 } y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20 \quad (x \in [6, 14])$$

(18) 解: (1) 设  $n$  分钟后第 1 次相遇, 依题意, 有

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 70, \text{ 整理得 } n^2 + 13n - 140 = 0, \text{ 解得 } n = 7, n = -20 \text{ (舍)}$$

第 1 次相遇是在开始后 7 分钟.

(2) 设  $n$  分钟后第 2 次相遇, 依题意, 有

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 3 \times 70, \text{ 整理得 } n^2 + 13n - 420 = 0, \text{ 解得 } n = 15, n = -28 \text{ (舍)}$$

第 2 次相遇是在开始后 15 分钟.

(19) 解 (1)  $\because PB \perp$  平面  $ABCD, \therefore BA$  是  $PA$  在面  $ABCD$  上的射影,  $\therefore PA \perp DA$   
 $\therefore \angle PAB$  是面  $PAD$  与面  $ABCD$  所成二面角的平面角,  
 $\angle PAB = 60^{\circ}$

而  $PB$  是四棱锥  $P-ABCD$  的高,  $PA = AB \cdot \text{tg}60^{\circ} = \sqrt{3}a$

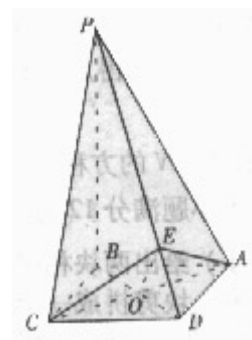
$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$$

(2) 证: 不论棱锥的高怎样变化, 棱锥侧面  $PAD$  与  $PCD$  恒为全等三角形.

作  $AE \perp DP$ , 垂足为  $E$ , 连结  $EC$ , 则  $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ .

$\therefore AE = EC, \angle CED = 90^{\circ}$ , 故  $\angle CFA$  是面  $PAD$  与面  $PCD$  所成的二面角的平面角.

设  $AC$  与  $DB$  相交于点  $O$ , 连结  $EO$ , 则  $EO \perp AC. \frac{\sqrt{2}}{2}a = OA < AE < AD = a$



在 $\triangle AEC$ 中,  $\cos \angle AEC = \frac{AE^2 + EC^2 - (2 \cdot OA)^2}{2AE \cdot EC} = \frac{(AE + \sqrt{2}OA)(AE - \sqrt{2}OA)}{AE^2} < 0$

所以, 面  $PAD$  与面  $PCD$  所成的二面角恒大于  $90^\circ$

(20) 解: (I)  $f(2) = 3, f(-2) = 7$ , 由于  $f(-2) \neq f(2), f(-2) \neq -f(2)$

故  $f(x)$  既不是奇函数, 也不是偶函数.

$$(2) f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & x \geq 2 \\ x^2 - x + 1 & x < 2 \end{cases}$$

由于  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上的最小值为  $f(2) = 3$ , 在  $(-\infty, 2)$  内的最小值为  $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

故函数  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  内的最小值为  $\frac{3}{4}$

(21) 解: 设  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 由题意有  $\frac{|PM|}{|PN|} = \sqrt{2}$ , 即

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 整理得 } x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$$

因为点  $N$  到  $PM$  的距离为 1,  $|MN| = 2$

所以  $\angle PMN = 30^\circ$ , 直线  $PM$  的斜率为  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

直线  $PM$  的方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

将  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$  代入  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$  整理得  $x^2 - 4x + 1 = 0$

解得  $x = 2 + \sqrt{3}, x = 2 - \sqrt{3}$

则点  $P$  坐标为  $(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$  或  $(2 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$

$$(2 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}) \text{ 或 } (2 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$$

直线  $PN$  的方程为  $y = x - 1$  或  $y = -x + 1$ .

(22) 解 (I) 如图 1, 沿正三角形三边中点连线折起, 可拼得一个正三棱锥.

如图 2, 正三角形三个角上剪出三个相同的四边形, 其较长的一组邻边边长为三角形边长的  $\frac{1}{4}$ , 有一组对角为直角, 余下部分按虚线折起, 可成一个缺上底的正三棱柱, 而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱锥的上底.

(II) 依上面剪拼方法, 有  $V_{\text{柱}} > V_{\text{锥}}$ .

推理如下:

设给出正三角形纸片的边长为 2, 那么, 正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为 1 的正三角

形, 其面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . 现在计算它们的高:

$$h_{\text{锥}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad h_{\text{柱}} = \frac{1}{2} \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$V_{\text{柱}} - V_{\text{锥}} = \left(h_{\text{柱}} - \frac{1}{3}h_{\text{锥}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{9}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{24} > 0$$

所以  $V_{\text{柱}} > V_{\text{锥}}$ .

(III) 如图 3, 分别连结三角形的内心与各顶点, 得三条线段, 再以这三条线段的中点为顶点作三角形. 以新作的三角形为直棱柱的底面, 过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线, 沿六条垂线剪下三个四边形, 可心拼成直三棱柱的上底, 余下部分按虚线折起, 成为一个缺上底的直三棱柱, 即可得到直三棱柱.

