

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学理工农医类（精编版）

本试卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 5 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = i \cdot (1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 某学校有男、女学生各 500 名. 为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异, 拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查, 则宜采用的抽样方法是 ()
- A. 抽签法 B. 随机数法 C. 系统抽样法 D. 分层抽样法
3. 在锐角中 $\triangle ABC$, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ()
- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$
4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是 ()
- A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$
5. 函数 $f(x) = 2 \ln x$ 的图像与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 的图像的交点个数为 ()
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
6. 已知 a, b 是单位向量, $a \cdot b = 0$. 若向量 c 满足 $|c - a - b| = 1$, 则 $|c|$ 的取值范围是 ()
- A. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ B. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+2]$
C. $[1, \sqrt{2}+1]$ D. $[1, \sqrt{2}+2]$
7. 已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形, 则该正方体的正视图的面积不可能等于 ()
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

8. 在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, 点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 发射后又回到原点 P (如图1). 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的中心, 则 AP 等于()

- A. 2 B. 1
C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{4}{3}$



二、填空题: 本大题共 8 小题, 考生作答 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分.

(一) 选做题 (请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答, 如果全做, 则按前两题计分)

9. 在平面直角坐标系 xoy 中, 若 $l: \begin{cases} x=t, \\ y=t-a \end{cases}$ (t 为参数) 过椭圆 $C: \begin{cases} x=3\cos\varphi, \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$

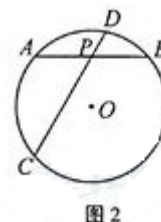
(φ 为参数) 的右顶点, 则常数 a 的值为 _____.

10. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}, a+2b+3c=6$, 则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为 _____.

11. 如图 2, 在半径为 $\sqrt{7}$ 的 $\odot O$ 中, 弦

AB, CD 相交于点 $P, PA=PB=2,$

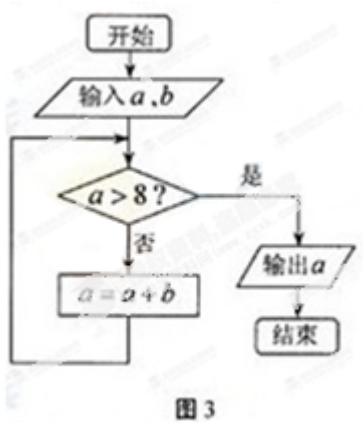
$PD=1,$ 则圆心 O 到弦 CD 的距离为 _____.



(一) 必做题 (12-16 题)

12. 若 $\int_0^T x^2 dx = 9$, 则常数 T 的值为 _____.

13. 执行如图 3 所示的程序框图, 如果输入 $a=1, b=2$, 则输出的 a 的值为 _____.



14. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, P 是 C 上一点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 6a$,

且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° , 则 C 的离心率为_____。

15. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}, n \in N^*$, 则

(1) $a_3 =$ _____;

(2) $S_1 + S_2 + \dots + S_{100} =$ _____。

16. 设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0, c > b > 0$.

(1) 记集合 $M = \{(a, b, c) | a, b, c \text{ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 } a=b\}$, 则 $(a, b, c) \in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为_____。

(2) 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列结论正确的是_____。(写出所有正确结论的序号)

① $\forall x \in (-\infty, 1), f(x) > 0$;

② $\exists x \in R$, 使 xa^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长;

③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x \in (1, 2)$, 使 $f(x) = 0$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}), g(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ 。

(I) 若 α 是第一象限角，且 $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ 。求 $g(\alpha)$ 的值；

(II) 求使 $f(x) \geq g(x)$ 成立的 x 的取值集合。

18. (本小题满分 12 分)

某人在如图 4 所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点（指纵、横的交叉点记忆三角形的顶点）处都种了一株相同品种的作物。根据历年的种植经验，一株该种作物的年收获量 Y （单位：kg）与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示：

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里，两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米。

(I) 从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物，求它们恰好“相近”的概率；

(II) 从所种作物中随机选取一株，求它的年收获量的分布列与数学期望。

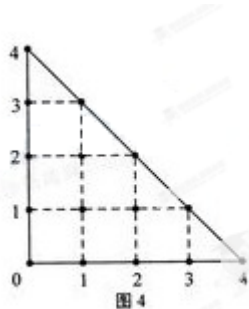


图 4

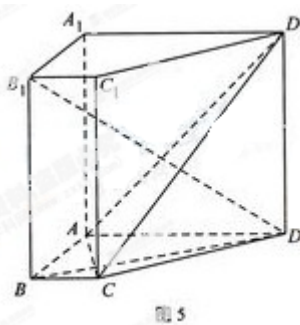


图 5

19. (本小题满分 12 分)

如图 5，在直棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD \parallel BC$ ，

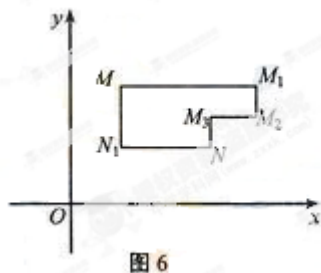
$\angle BAD = 90^\circ$ ， $AC \perp BD$ ， $BC = 1$ ， $AD = AA_1 = 3$ 。

(I) 证明： $AC \perp B_1D$ ；

(II) 求直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值。

20. (本小题满分 13 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 将从点 M 出发沿纵、横方向到达点 N 的任一路径成为 M 到 N 的一条“L 路径”。如图 6 所示的路径 $MM_1M_2M_3N$ 与路径 MN_1N 都是 M 到 N 的“L 路径”。某地有三个新建的居民区, 分别位于平面 xOy 内三点 $A(3,20), B(-10,0), C(14,0)$ 处。现计划在 x 轴上方区域 (包含 x 轴) 内的某一点 P 处修建一个文化中心。



(I) 写出点 P 到居民区 A 的“L 路径”长度最小值的表达式 (不要求证明);

(II) 若以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内部是保护区, “L 路径”不能进入保护区, 请确定点 P 的位置, 使其到三个居民区的“L 路径”长度值和最小。

21. (本小题满分 13 分)

过抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条不同的直线 l_1, l_2 , 且 $k_1 + k_2 = 2$, l_1 与 E 相交于点 A, B , l_2 与 E 相交于点 C, D 。以 AB, CD 为直径的圆 M, N (M, N 为圆心) 的公共弦所在的直线记为 l 。

(I) 若 $k_1 > 0, k_2 > 0$, 证明: $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} < 2P^2$;

(II) 若点 M 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, 求抛物线 E 的方程。

22. (本小题满分 13 分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \left| \frac{x-a}{x+2a} \right|$ 。

(I); 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式;

(II) 是否存在 a ，使函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, 4)$ 内的图像上存在两点，在该两点处的切线相互垂直？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由。