

2002 年湖南高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 9 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 直线 $(1+a)x + y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切, 则 a 的值为

- (A) 1, -1 (B) 2, -2 (C) 1 (D) -1

(2) 复数 $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ 的值是

- (A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1

(3) 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是

- (A) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$

- (C) $\{x | -1 < x < 1\}$ (D) $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$

(4) 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 3, 则 $a =$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

(5) 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是

- (A) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ (B) $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ (C) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ (D) $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

(6) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$, 则

- (A) $M = N$ (B) $M \subset N$ (C) $M \supset N$ (D) $M \cap N = \emptyset$

(7) 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$

- (A) -1 (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$

(8) 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$

(9) $0 < x < y < a < 1$, 则有

- (A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$ (C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$

(10) 函数 $y = x^2 + bx + c$ ($x \in [0, +\infty)$) 是单调函数的充要条件是

- (A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $b > 0$ (D) $b < 0$

(11) 设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 则二次曲线 $x^2 \operatorname{ctg} \theta - y^2 \operatorname{tg} \theta = 1$ 的离心率取值范围

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (C) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ (D) $(\sqrt{2}, +\infty)$

(12) 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有

- (A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种

第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线.

(13) 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从_____年 2000 年的五年间增长最快。

(14) 函数 $y = \frac{2x}{1+x}$ ($x \in (-1, +\infty)$) 图象与其反函数图象的交点为_____

(15) $(x^2 + 1)(x - 2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____

(16) 对于顶点在原点的抛物线, 给出下列条件:

①焦点在 y 轴上; ②焦点在 x 轴上; ③抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6; ④抛

物线的通径的长为 5; ⑤由原点向过焦点的某条直线作垂线, 垂足坐标为 $(2, 1)$ 。

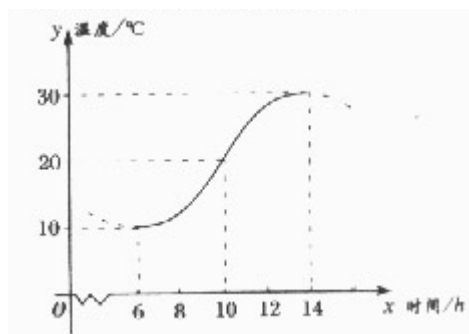
能使这抛物线方程为 $y^2 = 10x$ 的条件是第_____ (要求填写合适条件的序号)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 如图, 某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近

似满足函数 $y = A \sin(ax + \varphi) + b$

- (1) 求这段时间的最大温差;
(2) 写出这段时间的函数解析式;



(18) 甲、乙物体分别从相距 70 米的两处同时相向运动。甲第 1 分钟走 2 米，以后每分钟比前 1 分钟多走 1 米，乙每分钟走 5 米。

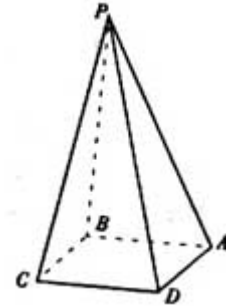
(1) 甲、乙开始运动后几分钟相遇？

(2) 如果甲、乙到达对方起点后立即折返，甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 米，乙继续每分钟走 5 米，那么开始运动几分钟后第二相遇？

(19) 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形， $PB \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 60° ，求这个四棱锥的体积；

(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化。面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90°



(20) 设函数 $f(x) = x^2 + |x - 2| + 1$, $x \in R$

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值。

(21) 已知点 P 到两定点 $M(-1,0)$ 、 $N(1,0)$ 距离的比为 $\sqrt{2}$ ，点 N 到直线 PM 的距离为 1，求直线 PN 的方程。

(22) (本小题满分 12 分，附加题满分 4 分)

(I) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2)，要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1、图 2 中，并作简要说明；

(II) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

(III) (本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分)

如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3)，要求剪拼成一个直三棱柱，使它的全面积与给出的三角形的面积相等。请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图 3 中，并作简要说明。

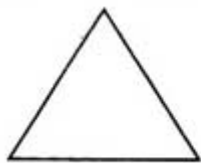


图 1

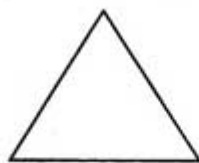


图 2



图 3

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	D	B	C	B	B	C	D	A	D	B

二、填空题

(13) 1995 2000 (14) (0,0),(1,1) (15) 1008 (16) ②⑤

三、解答题

(17) 解: (1) 由图示, 这段时间的最大温差是 $30 - 10 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$

(2) 图中从 6 时到 14 时的图象是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 的半个周期

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 14 - 6, \text{ 解得 } \omega = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{由图示, } A = \frac{1}{2}(30 - 10) = 10 \quad b = \frac{1}{2}(10 + 30) = 20$$

$$\text{这时, } y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \varphi\right) + 20$$

$$\text{将 } x = 6, y = 10 \text{ 代入上式, 可取 } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{综上, 所求的解析式为 } y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20 \quad (x \in [6, 14])$$

(18) 解: (1) 设 n 分钟后第 1 次相遇, 依题意, 有

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 70, \text{ 整理得 } n^2 + 13n - 140 = 0, \text{ 解得 } n = 7, n = -20 \text{ (舍)}$$

第 1 次相遇是在开始后 7 分钟.

(2) 设 n 分钟后第 2 次相遇, 依题意, 有

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 3 \times 70, \text{ 整理得 } n^2 + 13n - 420 = 0, \text{ 解得 } n = 15, n = -28 \text{ (舍)}$$

第 2 次相遇是在开始后 15 分钟.

(19) 解 (1) $\because PB \perp$ 平面 $ABCD, \therefore BA$ 是 PA 在面 $ABCD$ 上的射影, $\therefore PA \perp DA$
 $\therefore \angle PAB$ 是面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角,
 $\angle PAB = 60^{\circ}$

而 PB 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高, $PA = AB \cdot \text{tg}60^{\circ} = \sqrt{3}a$

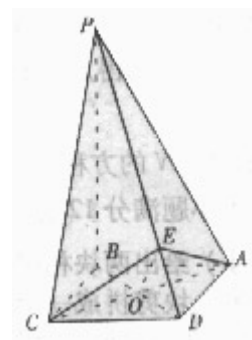
$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$$

(2) 证: 不论棱锥的高怎样变化, 棱锥侧面 PAD 与 PCD 恒为全等三角形.

作 $AE \perp DP$, 垂足为 E , 连结 EC , 则 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$.

$\therefore AE = EC, \angle CED = 90^{\circ}$, 故 $\angle CFA$ 是面 PAD 与面 PCD 所成的二面角的平面角.

设 AC 与 DB 相交于点 O , 连结 EO , 则 $EO \perp AC. \frac{\sqrt{2}}{2}a = OA < AE < AD = a$



在 $\triangle AEC$ 中, $\cos \angle AEC = \frac{AE^2 + EC^2 - (2 \cdot OA)^2}{2AE \cdot EC} = \frac{(AE + \sqrt{2}OA)(AE - \sqrt{2}OA)}{AE^2} < 0$

所以, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90°

(20) 解: (I) $f(2) = 3, f(-2) = 7$, 由于 $f(-2) \neq f(2), f(-2) \neq -f(2)$

故 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

$$(2) f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & x \geq 2 \\ x^2 - x + 1 & x < 2 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的最小值为 $f(2) = 3$, 在 $(-\infty, 2)$ 内的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内的最小值为 $\frac{3}{4}$

(21) 解: 设 P 的坐标为 (x, y) , 由题意有 $\frac{|PM|}{|PN|} = \sqrt{2}$, 即

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 整理得 } x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$$

因为点 N 到 PM 的距离为 1, $|MN| = 2$

所以 $\angle PMN = 30^\circ$, 直线 PM 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

直线 PM 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

将 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 代入 $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ 整理得 $x^2 - 4x + 1 = 0$

解得 $x = 2 + \sqrt{3}, x = 2 - \sqrt{3}$

则点 P 坐标为 $(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 或 $(2 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$

$$(2 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}) \text{ 或 } (2 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$$

直线 PN 的方程为 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$.

(22) 解 (I) 如图 1, 沿正三角形三边中点连线折起, 可拼得一个正三棱锥.

如图 2, 正三角形三个角上剪出三个相同的四边形, 其较长的一组邻边边长为三角形边长的 $\frac{1}{4}$, 有一组对角为直角, 余下部分按虚线折起, 可成一个缺上底的正三棱柱, 而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱锥的上底.

(II) 依上面剪拼方法, 有 $V_{\text{柱}} > V_{\text{锥}}$.

推理如下:

设给出正三角形纸片的边长为 2, 那么, 正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为 1 的正三角

形, 其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 现在计算它们的高:

$$h_{\text{锥}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad h_{\text{柱}} = \frac{1}{2} \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$V_{\text{柱}} - V_{\text{锥}} = \left(h_{\text{柱}} - \frac{1}{3}h_{\text{锥}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{9}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{24} > 0$$

所以 $V_{\text{柱}} > V_{\text{锥}}$.

(III) 如图 3, 分别连结三角形的内心与各顶点, 得三条线段, 再以这三条线段的中点为顶点作三角形. 以新作的三角形为直棱柱的底面, 过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线, 沿六条垂线剪下三个四边形, 可心拼成直三棱柱的上底, 余下部分按虚线折起, 成为一个缺上底的直三棱柱, 即可得到直三棱柱.

