2013年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）设集合A={1，2，3}，B={4，5}，M={x|x=a+b，a∈A，b∈B}，则M中元素的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【考点】13：集合的确定性、互异性、无序性；1A：集合中元素个数的最值.

【专题】11：计算题.

【分析】利用已知条件，直接求出a+b，利用集合元素互异求出M中元素的个数即可.

【解答】解：因为集合A={1，2，3}，B={4，5}，M={x|x=a+b，a∈A，b∈B}，

所以a+b的值可能为：1+4=5、1+5=6、2+4=6、2+5=7、3+4=7、3+5=8，

所以M中元素只有：5，6，7，8．共4个.

故选：B.

【点评】本题考查集合中元素个数的最值，集合中元素的互异性的应用，考查计算能力.

2．（5分）$(1+\sqrt{3}i)^3$=（　　）

A．﹣8　　B．8　　C．﹣8i　　D．8i

【考点】A5：复数的运算.

【分析】复数分子、分母同乘﹣8，利用1的立方虚根的性质（$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$），化简即可.

【解答】解：$(1+\sqrt{3}i)^3=\frac{-8(1+\sqrt{3}i)^3}{-8}=-8(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2})^3=-8$

故选：A．

【点评】复数代数形式的运算，是基础题．

3．（5分）已知向量$\vec{m}$=（λ+1，1），$\vec{n}$=（λ+2，2），若（$\vec{m}+\vec{n}$）⊥（$\vec{m}-\vec{n}$），则λ=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

【考点】9T：数量积判断两个平面向量的垂直关系．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】利用向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系即可得出．

【解答】解：∵$\vec{m}=(\lambda+1,\ 1)$，$\vec{n}=(\lambda+2,\ 2)$．

∴$\vec{m}+\vec{n}$=（2λ+3，3），$\vec{m}-\vec{n}=(-1,\ -1)$．

∵$(\vec{m}+\vec{n})\perp(\vec{m}-\vec{n})$，

∴$(\vec{m}+\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=0$，

∴﹣（2λ+3）﹣3=0，解得λ=﹣3．

故选：B．

【点评】熟练掌握向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系是解题的关键．

4．（5分）已知函数f（x）的定义域为（﹣1，0），则函数f（2x+1）的定义域为（　　）

A．（﹣1，1）　　B．$(-1,\ -\frac{1}{2})$　　C．（﹣1，0）　　D．$(\frac{1}{2},\ 1)$

【考点】33：函数的定义域及其求法．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】原函数的定义域，即为2x+1的范围，解不等式组即可得解．

【解答】解：∵原函数的定义域为（﹣1，0），

∴﹣1＜2x+1＜0，解得﹣1＜x＜﹣$\frac{1}{2}$.

∴则函数f（2x+1）的定义域为$(-1,\ -\frac{1}{2})$.

故选：B.

【点评】考查复合函数的定义域的求法，注意变量范围的转化，属简单题.

5．（5分）函数f（x）=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）（x＞0）的反函数f^{-1}（x）=（　　）

A．$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　B．$\frac{1}{2^x-1}(x\neq 0)$　C．2^x﹣1（x∈R）

D．2^x﹣1（x＞0）

【考点】4R：反函数.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】把y看作常数，求出x：x=$\frac{1}{2^y+1}$，x，y互换，得到y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）的反函数．注意反函数的定义域.

【解答】解：设y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$），

把y看作常数，求出x：

1+$\frac{1}{x}$=2^y，x=$\frac{1}{2^y-1}$，其中y＞0，

x，y互换，得到y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）的反函数：y=$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$，

故选：A.

【点评】本题考查对数函数的反函数的求法，解题时要认真审题，注意对数式和指数式的相互转化.

6．（5分）已知数列$\{a_n\}$满足$3a_{n+1}+a_n=0$，a_2=﹣$\frac{4}{3}$，则$\{a_n\}$的前10项和等于（　　）

A．﹣6（1﹣3^{-10}）B．$\frac{1}{9}(1-3^{-10})$　C．3（1﹣3^{-10}）　D．3（1+3^{-10}）

【考点】89：等比数列的前n项和．

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列．

【分析】由已知可知，数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，结合已知$a_2=-\frac{4}{3}$可求a_1，然后代入等比数列的求和公式可求

【解答】解：$\because 3a_{n+1}+a_n=0$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{3}$

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列

$\because a_2=-\frac{4}{3}$

$\therefore a_1=4$

由等比数列的求和公式可得，$S_{10}=\frac{4[1-(-\frac{1}{3})^{10}]}{1+\frac{1}{3}}=3(1-3^{-10})$

故选：C．

【点评】本题主要考查了等比数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础试题

7．（5分）$(1+x)^3(1+y)^4$的展开式中x^2y^2的系数是（　　）

A．5　　B．8　　C．12　　D．18

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题．

【分析】由题意知利用二项展开式的通项公式写出展开式的通项，令x的指数为2，写出出展开式中x^2的系数，第二个因式y^2的系数，即可得到结果．

【解答】解：$(x+1)^3$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_3^rx^r$

令r=2得到展开式中x^2的系数是$C_3^2=3$，

$(1+y)^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^ry^r$

令r=2得到展开式中y^2的系数是$C_4^2=6$，

（1+x）^{3}（1+y）^{4}的展开式中x^2y^2的系数是：3×6=18，

故选：D．

【点评】本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题，本题解题的关键是写出二项式的展开式，所有的这类问题都是利用通项来解决的．

8．（5分）椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右顶点分别为$A_1$、$A_2$，点P在C上且直线$PA_2$斜率的取值范围是[﹣2，﹣1]，那么直线$PA_1$斜率的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}]$　　B．$[\frac{3}{8},\ \frac{3}{4}]$　　C．$[\frac{1}{2},\ 1]$　　D．$[\frac{3}{4},\ 1]$

【考点】I3：直线的斜率；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$可知其左顶点$A_1$（﹣2，0），右顶点$A_2$（2，0）．设P（$x_0$，$y_0$）（$x_0\neq\pm2$），代入椭圆方程可得$\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$．利用斜率计算公式可得$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}$，再利用已知给出的$k_{PA_1}$的范围即可解出．

【解答】解：由椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$可知其左顶点$A_1$（﹣2，0），右顶点$A_2$（2，0）．

设P（x_0，y_0）（$x_0\neq\pm2$），则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，得$\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$．

$\because k_{PA_2}=\frac{y_0}{x_0-2}$，$k_{PA_1}=\frac{y_0}{x_0+2}$，

$\therefore k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$，

$\because -2\leqslant k_{PA_2}\leqslant -1$，

$\therefore -2\leqslant -\frac{3}{4k_{PA_1}}\leqslant -1$，解得$\frac{3}{8}\leqslant k_{PA_1}\leqslant\frac{3}{4}$.

故选：B．

【点评】熟练掌握椭圆的标准方程及其性质、斜率的计算公式、不等式的性质等是解题的关键．

9．（5分）若函数f（x）$=x^2+ax+\frac{1}{x}$在$(\frac{1}{2}，+\infty)$是增函数，则a的取值范围是（　　）

A．［－1，0］　　B．［－1，+∞）　　C．［0，3］　　D．［3，+∞）

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】由函数$f(x)=x^2+ax+\frac{1}{x}$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上是增函数，可得$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x^2}\geq 0$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上恒成立，进而可转化为$a\geq\frac{1}{x^2}-2x$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上恒成立，构造函数求出$\frac{1}{x^2}-2x$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上的最值，可得a的取值范围．

【解答】解：$\because f(x)=x^2+ax+\frac{1}{x}$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上是增函数，

故$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x^2}\geq 0$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上恒成立，

即$a\geq\frac{1}{x^2}-2x$在（$\frac{1}{2}$，+∞）上恒成立，

令$h(x)=\frac{1}{x^2}-2x$，

则$h'(x)=-\frac{2}{x^3}-2$，

当x∈（$\frac{1}{2}$，+∞）时，h′（x）＜0，则h（x）为减函数．

$\therefore h(x)<h(\frac{1}{2})=3$

∴a≥3．

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是利用导数研究函数的单调性，恒成立问题，是导

数的综合应用，难度中档.

10．（5分）已知正四棱柱ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，AA_1=2AB，则CD与平面BDC_1所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【考点】MI：直线与平面所成的角.

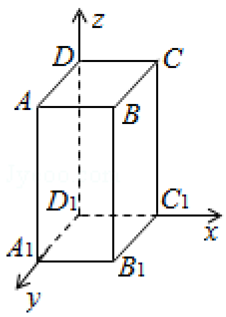
【专题】15：综合题；16：压轴题；5G：空间角；5H：空间向量及应用.

【分析】设AB=1，则AA_1=2，分别以$\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$的方向为x轴、y轴、z轴的正方向建立空间直角坐标系，设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面BDC_1的一个法向量，CD与平面BDC_1所成角为θ，

则sinθ=$|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DC}|}|$，在空间坐标系下求出向量坐标，代入计算即可.

【解答】解：设AB=1，则AA_1=2，分别以$\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$的方向为x轴、y轴、z轴的正方向建立空间直角坐标系，

如下图所示：



则D（0，0，2），C_1（1，0，0），B（1，1，2），C（1，0，2），

$\overrightarrow{DB}$=（1，1，0），$\overrightarrow{DC_1}$=（1，0，﹣2），$\overrightarrow{DC}$=（1，0，0），

设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面BDC_1的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y=0\\x-2z=0\end{cases}$，取$\vec{n}$=（2，﹣2，1），

设CD与平面BDC_1所成角为θ，则sinθ=$|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DC}|}|=\frac{2}{3}$，

故选：A．

【点评】本题考查直线与平面所成的角，考查空间向量的运算及应用，准确理解线面角与直线方向向量、平面法向量夹角关系是解决问题的关键．

11．（5分）已知抛物线C：$y^2=8x$的焦点为F，点M（﹣2，2），过点F且斜率为k的直线与C交于A，B两点，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则k=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算；K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】斜率k存在，设直线AB为y=k（x﹣2），代入抛物线方程，利用$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$（$x_1+2$，$y_1-2$）•（$x_2+2$，$y_2-2$）=0，即可求出k的值．

【解答】解：由抛物线C：$y^2=8x$得焦点（2，0），

由题意可知：斜率k存在，设直线AB为y=k（x﹣2），

代入抛物线方程，得到$k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$，△>0，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）．

∴$x_1+x_2=4+\frac{8}{k^2}$，$x_1x_2=4$．

∴$y_1+y_2=\frac{8}{k}$，$y_1y_2=-16$，

又$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，

∴$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$（$x_1+2$，$y_1-2$）•（$x_2+2$，$y_2-2$）$=\frac{16}{k^2}-\frac{16}{k}+4=0$

∴k=2．

故选：D．

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查向量的数量积公式，考查学生的计算能力，属于中档题．

12．（5分）已知函数f（x）=cosxsin2x，下列结论中不正确的是（　　）

A．y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称

B．$y=f(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{2}$对称

C．$f(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．f（x）既是奇函数，又是周期函数

【考点】H1：三角函数的周期性；HW：三角函数的最值．

【专题】11：计算题；57：三角函数的图像与性质．

【分析】根据函数图象关于某点中心对称或关于某条直线对称的公式，对A、B两项加以验证，可得它们都正确．根据二倍角的正弦公式和同角三角函数的关系化简，得f（x）=2sinx（1﹣$\sin^2$x），再换元：令t=sinx，得到关于t的三次函数，利用导数研究此函数的单调性可得f（x）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，故C不正确；根据函数周期性和奇偶性的定义加以验证，可得D项正确．由此可得本题的答案．

【解答】解：对于A，因为f（π+x）=cos（π+x）sin（2π+2x）=﹣cosxsin2x，

f（π﹣x）=cos（π﹣x）sin（2π﹣2x）=cosxsin2x，所以f（π+x）+f（π﹣x）=0，

可得y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称，故A正确；

对于B，因为f（$\frac{\pi}{2}$+x）=cos（$\frac{\pi}{2}$+x）sin（π+2x）=﹣sinx（﹣sin2x）=sinxsin2x，

f（$\frac{\pi}{2}$﹣x）=cos（$\frac{\pi}{2}$﹣x）sin（π﹣2x）=sinxsin2x，所以f（$\frac{\pi}{2}$+x）=f（$\frac{\pi}{2}$﹣x），

可得y=f（x）的图象关于直线x=$\frac{\pi}{2}$对称，故B正确；

对于C，化简得f（x）=cosxsin2x=2$\cos^2$xsinx=2sinx（1﹣$\sin^2$x），

令t=sinx，f（x）=g（t）=2t（1﹣t^2），﹣1≤t≤1，

∵g（t）=2t（1﹣t^2）的导数g'（t）=2﹣6t^2=2（1+$\sqrt{3}$t）（1﹣$\sqrt{3}$t）

∴当t∈（﹣1，﹣$\frac{\sqrt{3}}{3}$）时或t∈（$\frac{\sqrt{3}}{3}$，1）时g'（t）＜0，函数g（t）为减函数；

当t∈（﹣$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）时g'（t）＞0，函数g（t）为增函数．

因此函数g（t）的最大值为t=﹣1时或t=$\frac{\sqrt{3}}{3}$时的函数值，

结合g（﹣1）=0＜g（$\frac{\sqrt{3}}{3}$）=$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，可得g（t）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

由此可得f（x）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$而不是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故C不正确；

对于D，因为f（﹣x）=cos（﹣x）sin（﹣2x）=﹣cosxsin2x=﹣f（x），所以f（x）是奇函数.

因为f（2π+x）=cos（2π+x）sin（4π+2x）=cosxsin2x=f（x），

所以2π为函数的一个周期，得f（x）为周期函数．可得f（x）既是奇函数，又是周期函数，得D正确.

综上所述，只有C项不正确.

故选：C.

【点评】本题给出三角函数式，研究函数的奇偶性、单调性和周期性．着重考查了三角恒等变换公式、利用导数研究函数的单调性和函数图象的对称性等知识，属于中档题.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13．（5分）已知α是第三象限角，sinα=﹣$\frac{1}{3}$，则cotα=__$2\sqrt{2}$__.

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】根据α是第三象限的角，得到cosα小于0，然后由sinα的值，利用同角三角函数间的基本关系求出cosα的值，进而求出cotα的值.

【解答】解：由α是第三象限的角，得到cosα＜0，

又sinα=﹣$\frac{1}{3}$，所以cosα=﹣$\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}$=﹣$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

则cotα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$=$2\sqrt{2}$

故答案为：$2\sqrt{2}$

【点评】此题考查学生灵活运用同角三角函数间的基本关系化简求值，是一道基础题．学生做题时注意α的范围.

14．（5分）6个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有__480__

种．（用数字作答）

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】11：计算题．

【分析】排列好甲、乙两人外的4人，然后把甲、乙两人插入4个人的5个空位中即可．

【解答】解：6个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法：排列好甲、乙两人外的4人，有A_4^4中方法，

然后把甲、乙两人插入4个人的5个空位，有A_5^2种方法，

所以共有：$A_4^4 \cdot A_5^2$=480．

故答案为：480．

【点评】本题考查了乘法原理，以及排列的简单应用，插空法解答不相邻问题．

15．（5分）记不等式组$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+3y \geqslant 4 \\ 3x+y \leqslant 4 \end{cases}$所表示的平面区域为D．若直线y=a（x+1）与D有公共点，则a的取值范围是__[$\frac{1}{2}$，4]___．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用．

【分析】本题考查的知识点是简单线性规划的应用，我们要先画出满足约束条件

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+3y \geqslant 4 \\ 3x+y \leqslant 4 \end{cases}$的平面区域，然后分析平面区域里各个角点，然后将其代入y=a（x+1）中，求出y=a（x+1）对应的a的端点值即可．

【解答】解：满足约束条件$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+3y \geqslant 4 \\ 3x+y \leqslant 4 \end{cases}$的平面区域如图示：

因为y=a（x+1）过定点（﹣1，0）．

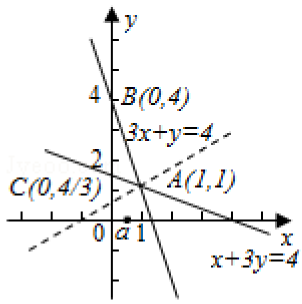
所以当y=a（x+1）过点B（0，4）时，得到a=4，

当y=a（x+1）过点A（1，1）时，对应a=$\frac{1}{2}$.

又因为直线y=a（x+1）与平面区域D有公共点.

所以$\frac{1}{2}$≤a≤4.

故答案为：[$\frac{1}{2}$，4]



【点评】在解决线性规划的小题时，我们常用“角点法”，其步骤为：①由约束条件画出可行域⇒②求出可行域各个角点的坐标⇒③将坐标逐一代入目标函数⇒④验证，求出最优解.

16．（5分）已知圆O和圆K是球O的大圆和小圆，其公共弦长等于球O的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆O与圆K所在的平面所成角为60°，则球O的表面积等于__16π__.

【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】正确作出图形，利用勾股定理，建立方程，即可求得结论.

【解答】解：如图所示，设球O的半径为r，AB是公共弦，∠OCK是面面角

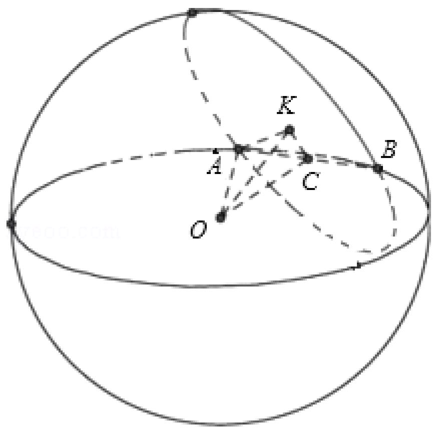
根据题意得OC=$\frac{\sqrt{3}}{2}r$，CK=$\frac{\sqrt{3}}{4}r$

在△OCK中，$OC^2=OK^2+CK^2$，即$\frac{3}{4}r^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}r^2$

∴$r^2=4$

∴球O的表面积等于$4\pi r^2=16\pi$

故答案为16π



【点评】本题考查球的表面积，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10分）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．已知$S_3=a_2^2$，且S_1，S_2，S_4成等比数列，求$\{a_n\}$的通项式.

【考点】85：等差数列的前n项和；88：等比数列的通项公式.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】由$s_3=a_2^2$，结合等差数列的求和公式可求a_2，然后由$S_2^2=S_1\cdot S_4$，结合等差数列的求和公式进而可求公差d，即可求解通项公式

【解答】解：设数列的公差为d

由$s_3=a_2^2$得，$3a_2=a_2^2$

$\therefore a_2=0$或$a_2=3$

由题意可得，$S_2^2=S_1\cdot S_4$

$\therefore(2a_2-d)^2=(a_2-d)(4a_2+2d)$

若$a_2=0$，则可得$d^2=-2d^2$即$d=0$不符合题意

若$a_2=3$，则可得$(6-d)^2=(3-d)(12+2d)$

解可得$d=0$或$d=2$

$\therefore a_n=3$或$a_n=2n-1$

【点评】本题主要考查了等差数列的通项公式及求和公式的应用，等比数列的性质的简单应用，属于基础试题

18．（12分）设△ABC的内角A，B，C的内角对边分别为a，b，c，满足（a+b+c）（a﹣b+c）=ac．

（Ⅰ）求B．

（Ⅱ）若$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求C．

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HR：余弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】（I）已知等式左边利用多项式乘多项式法则计算，整理后得到关系式，利用余弦定理表示出cosB，将关系式代入求出cosB的值，由B为三角形的内角，利用特殊角的三角函数值即可求出B的度数；

（II）由（I）得到A+C的度数，利用两角和与差的余弦函数公式化简cos（A﹣C），变形后将cos（A+C）及2sinAsinC的值代入求出cos（A﹣C）的值，利用特殊角的三角函数值求出A﹣C的值，与A+C的值联立即可求出C的度数．

【解答】解：（I）∵（a+b+c）（a﹣b+c）=（a+c）^{2}﹣b^2=ac，

∴$a^2+c^2-b^2=-ac$，

∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

又B为三角形的内角，

则B=120°；

（II）由（I）得：A+C=60°，∵$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，cos（A+C）$=\frac{1}{2}$，

∴cos（A﹣C）=cosAcosC+sinAsinC=cosAcosC﹣sinAsinC+2sinAsinC=cos（A+C）+2sinAsinC$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}-1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴A﹣C=30°或A﹣C=﹣30°，

则C=15°或C=45°．

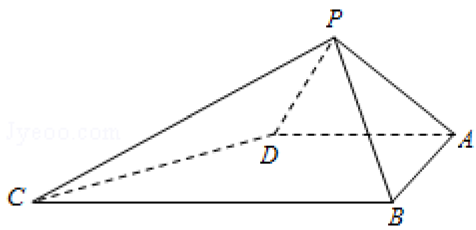
【点评】此题考查了余弦定理，两角和与差的余弦函数公式，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握余弦定理是解本题的关键．

19．（12分）如图，四棱锥P﹣ABCD中，∠ABC=∠BAD=90°，BC=2AD，△PAB与

△PAD都是等边三角形．

（Ⅰ）证明：PB⊥CD；

（Ⅱ）求二面角A﹣PD﹣C的大小．



【考点】LW：直线与平面垂直；M5：共线向量与共面向量．

【专题】11：计算题；5G：空间角．

【分析】（I）取BC的中点E，连接DE，过点P作PO⊥平面ABCD于O，连接OA、OB、OD、OE．可证出四边形ABED是正方形，且O为正方形ABED的中心．因此OE⊥OB，结合三垂线定理，证出OE⊥PB，而OE是△BCD的中位线，可得OE∥CD，因此PB⊥CD；

（II）由（I）的结论，证出CD⊥平面PBD，从而得到CD⊥PD．取PD的中点F，PC的中点G，连接FG，可得FG∥CD，所以FG⊥PD．连接AF，可得AF⊥PD，因此∠AFG为二面角A﹣PD﹣C的平面角，连接AG、EG，则EG∥PB，可得EG⊥OE．设AB=2，可求出AE、EG、AG、AF和FG的长，最后在△AFG中利用余弦定理，算出$\angle AFG=\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$，即得二面角A﹣PD﹣C的平面角大小．

【解答】解：（I）取BC的中点E，连接DE，可得四边形ABED是正方形

过点P作PO⊥平面ABCD，垂足为O，连接OA、OB、OD、OE

∵△PAB与△PAD都是等边三角形，∴PA=PB=PD，可得OA=OB=OD

因此，O是正方形ABED的对角线的交点，可得OE⊥OB

∵PO⊥平面ABCD，得直线OB是直线PB在内的射影，∴OE⊥PB

∵△BCD中，E、O分别为BC、BD的中点，∴OE∥CD，可得PB⊥CD；

（II）由（I）知CD⊥PO，CD⊥PB

∵PO、PB是平面PBD内的相交直线，∴CD⊥平面PBD

∵PD⊂平面PBD，∴CD⊥PD

取PD的中点F，PC的中点G，连接FG，

则FG为△PCD有中位线，∴FG∥CD，可得FG⊥PD

连接AF，由△PAD是等边三角形可得AF⊥PD，∴∠AFG为二面角A﹣PD﹣C的平面角

连接AG、EG，则EG∥PB

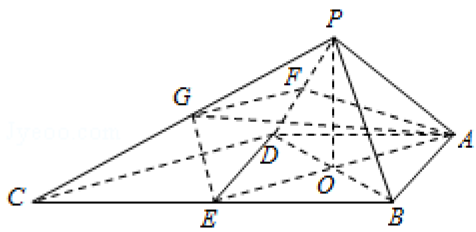
∵PB⊥OE，∴EG⊥OE，

设AB=2，则AE=$2\sqrt{2}$，EG=$\frac{1}{2}$PB=1，故AG=$\sqrt{AE^2+EG^2}$=3

在△AFG中，FG=$\frac{1}{2}$CD=$\sqrt{2}$，AF=$\sqrt{3}$，AG=3

∴cos∠AFG=$\frac{2+3-9}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$=﹣$\frac{\sqrt{6}}{3}$，得∠AFG=π﹣arccos$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角A﹣PD﹣C的平面角大小是π﹣arccos$\frac{\sqrt{6}}{3}$.



【点评】本题给出特殊的四棱锥，求证直线与直线垂直并求二面角平面角的大小，着重考查了线面垂直的判定与性质、三垂线定理和运用余弦定理求二面的大小等知识，属于中档题.

20．（12分）甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛，其中两人比赛，另一人当裁判，每局比赛结束时，负的一方在下一局当裁判，设各局中双方获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果都相互独立，第1局甲当裁判.

（Ⅰ）求第4局甲当裁判的概率；

（Ⅱ）X表示前4局中乙当裁判的次数，求X的数学期望.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】（I）令A_1表示第2局结果为甲获胜，A_2表示第3局甲参加比赛时，结果为甲负，A表示第4局甲当裁判，分析其可能情况，每局比赛的结果相互独

立且互斥，利用独立事件、互斥事件的概率求解即可．

（II）X的所有可能值为0，1，2．分别求出X取每一个值的概率，列出分布列后求出期望值即可．

【解答】解：（I）令A_1表示第2局结果为甲获胜．A_2表示第3局甲参加比赛时，结果为甲负．A表示第4局甲当裁判．

则$A=A_1 \bullet A_2$，$P(A)=P(A_1 \bullet A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）X的所有可能值为0，1，2．令A_3表示第3局乙和丙比赛时，结果为乙胜．

B_1表示第1局结果为乙获胜，B_2表示第2局乙和甲比赛时，结果为乙胜，B_3表示第3局乙参加比赛时，结果为乙负，

则$P(X=0)=P(B_1B_2\overline{B_3})=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B_3})=\frac{1}{8}$．

$P(X=2)=P(\overline{B_1}B_3)=P(\overline{B_1})P(B_3)=\frac{1}{4}$．

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\frac{5}{8}$．

从而$EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$．

【点评】本题考查互斥、独立事件的概率，离散型随机变量的分布列和期望等知识，同时考查利用概率知识解决问题的能力．

21．（12分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为3，直线y=2与C的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$．

（I）求a，b；

（II）设过F_2的直线l与C的左、右两支分别相交于A、B两点，且$|AF_1|=|BF_1|$，证明：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列．

【考点】K4：椭圆的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】14：证明题；15：综合题；16：压轴题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（I）由题设，可由离心率为3得到参数a，b的关系，将双曲线的方程

用参数a表示出来，再由直线$y=2$与C的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$建立方程求出参数a即可得到双曲线的方程；

（II）由（I）的方程求出两焦点坐标，设出直线l的方程设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），将其与双曲线C的方程联立，得出$x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，再利用$|AF_1|=|BF_1|$建立关于A，B坐标的方程，得出两点横坐标的关系$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$，由此方程求出k的值，得出直线的方程，从而可求得：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$，再利用等比数列的性质进行判断即可证明出结论.

【解答】解：（I）由题设知$\frac{c}{a}=3$，即$\frac{b^2+a^2}{a^2}=9$，故$b^2=8a^2$

所以C的方程为$8x^2-y^2=8a^2$

将$y=2$代入上式，并求得$x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$，

由题设知，$2\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，解得$a^2=1$

所以$a=1$，$b=2\sqrt{2}$

（II）由（I）知，$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，C的方程为$8x^2-y^2=8$ ①

由题意，可设l的方程为$y=k(x-3)$，$|k|<2\sqrt{2}$代入①并化简得$(k^2-8)x^2-6k^2x+9k^2+8=0$

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则$x_1\leq-1$，$x_2\geq1$，$x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，于是

$|AF_1|=\sqrt{(x_1+3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+3)^2+8x_1^2-8}=-(3x_1+1)$，

$|BF_1|=\sqrt{(x_2+3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2+3)^2+8x_2^2-8}=3x_2+1$，

$|AF_1|=|BF_1|$得$-(3x_1+1)=3x_2+1$，即$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$

故$\frac{6k^2}{k^2-8}=-\frac{2}{3}$，解得$k^2=\frac{4}{5}$，从而$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}=-\frac{19}{9}$

由于$|AF_2|=\sqrt{(x_1-3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-3)^2+8x_1^2-8}=1-3x_1$，

$|BF_2|=\sqrt{(x_2-3)^2+y_2^{\ 2}}=\sqrt{(x_2-3)^2+8x_2^{\ 2}-8}=3x_2-1$，

故$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=2-3(x_1+x_2)=4$，$|AF_2||BF_2|=3(x_1+x_2)-9x_1x_2-1=16$

因而$|AF_2||BF_2|=|AB|^2$，所以$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列

【点评】本题考查直线与圆锥曲线的综合关系，考查了运算能力，题设条件的转化能力，方程的思想运用，此类题综合性强，但解答过程有其固有规律，一般需要把直线与曲线联立利用根系关系，解答中要注意提炼此类题解答过程中的共性，给以后解答此类题提供借鉴．

22．（12分）已知函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$．

（I）若$x\geq0$时，$f(x)\leq0$，求λ的最小值；

（II）设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln2$．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；8E：数列的求和；8K：数列与不等式的综合．

【专题】16：压轴题；35：转化思想；53：导数的综合应用；54：等差数列与等比数列．

【分析】（I）由于已知函数的最大值是0，故可先求出函数的导数，研究其单调性，确定出函数的最大值，利用最大值小于等于0求出参数λ的取值范围，即可求得其最小值；

（II）根据（I）的证明，可取$\lambda=\frac{1}{2}$，由于$x>0$时，$f(x)<0$得出$\frac{x(2+x)}{2+2x}>\ln(1+x)$，考察发现，若取$x=\frac{1}{k}$，则可得出$\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\ln(\frac{k+1}{k})$，以此为依据，利用放缩法，即可得到结论

【解答】解：（I）由已知，$f(0)=0$，

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(1+2\lambda x)(1+x)-x(1+\lambda x)}{(1+x)^2}=\frac{(1-2\lambda)x-\lambda x^2}{(1+x)^2}$，

$\therefore f'(0)=0$

欲使$x\geq0$时，$f(x)\leq0$恒成立，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上必为减函数，即在$(0,+\infty)$上$f'(x)<0$恒成立，

当$\lambda\leq0$时，$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，为增函数，故不合题意，

若$0<\lambda<\frac{1}{2}$时，由$f'(x)>0$解得$x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$，则当$0<x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$，$f'(x)>0$，

所以当$0<x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$时，$f(x)>0$，此时不合题意，

若$\lambda\geq\frac{1}{2}$，则当$x>0$时，$f'(x)<0$恒成立，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上必为减函数，所以当$x>0$时，$f(x)<0$

恒成立，

综上，符合题意的λ的取值范围是$\lambda\geq\frac{1}{2}$，即λ的最小值为$\frac{1}{2}$

（II）令$\lambda=\frac{1}{2}$，由（I）知，当$x>0$时，$f(x)<0$，即$\frac{x(2+x)}{2+2x}>\ln(1+x)$

取$x=\frac{1}{k}$，则$\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

于是$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}$

$=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}$

$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+3)}+\cdots++\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{4n}$

$=\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}\right)$

$=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\sum_{k=n}^{2n-1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln2n-\ln n=\ln2$

所以$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln2$

【点评】本题考查了数列中证明不等式的方法及导数求最值的普通方法，解题的关键是充分利用已有的结论再结合放缩法，本题考查了推理判断的能力及转化化归的思想，有一定的难度