2015年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（文科）

一、选择题

（1）设i是虚数单位，则复数$(1-i)(1+2i)=$（　　）

（A）3+3i　　（B）-1+3i　　（3）3+i　　（D）-1+i

【答案】C

【解析】因为$(1-i)(1+2i)=1+2i-i-2i^2=3+i$，故选 C.

【考点定位】本题主要考查复数的乘法运算公式.

【名师点睛】在应用复数的乘法运算公式时，一定要注意$-2i^2$的运算结果，本题很好的考查了考生的基本运算能力.

（2）设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则$A\cap(C_U B)=$（　　）

（A）$\{1,2,5,6\}$　　（B）$\{1\}$　　（C）$\{2\}$　　（D）$\{1,2,3,4\}$

【答案】B

【解析】$\because C_U B=\{1,5,6\}$　　$\therefore A\cap(C_U B)=\{1\}$　　$\therefore$选 B.

【考点定位】本题主要是考查了集合的交集、补集运算.

【名师点睛】学生在求$C_U B$时，切不可遗漏，造成解答错，本题考查了考生的基本运算能力.

（3）设p：x<3，q：-1<x<3，则p是q成立的（　　）

（A）充分必要条件　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】$\because p:x<3$，$q:-1<x<3$ $\therefore q\Rightarrow p$，但$p\nRightarrow q$，$\therefore p$是$q$成立的必要不充分条件，故选 C.

【考点定位】本题主要考查充分、必要条件的判断.

【名师点睛】在判断充分、必要条件时，考生一定要作好三个步骤：①$p\Rightarrow q$是否成立；②$q\Rightarrow p$是否成立；③形成结论，本题考查了考生的逻辑分析能力.

（4）下列函数中，既是偶函数又存在零点的是（　　）

（A）y=lnx　　（B）$y=x^2+1$　　（C）y=sinx　　（D）y=cosx

【答案】D

【解析】选项 A：$y=\ln x$ 的定义域为（0,+∞），故 $y=\ln x$ 不具备奇偶性，故 A 错误；

选项 B：$y=x^2+1$ 是偶函数，但 $y=x^2+1=0$ 无解，即不存在零点，故 B 错误；

选项 C：$y=\sin x$ 是奇函数，故 C 错；

选项 D：$y=\cos x$ 是偶函数，

且 $y=\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in z$，故 D 项正确.

【考点定位】本题主要考查函数的奇偶性和零点的概念.

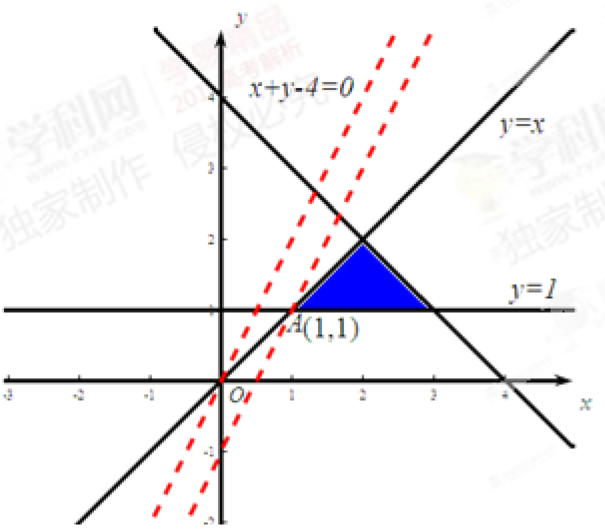
【名师点睛】在判断函数的奇偶性时，首先要判断函数的定义域是否关于原点对称，然后再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系；在判断函数零点时，可分两种情况：①函数图象与 x 轴是否有交点；②令 $f(x)=0$ 是否有解；本题考查考生的综合分析能力.

（5）已知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y-4\le 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$，则 $z=-2x+y$ 的最大值是（　　）

（A）-1　　（B）-2　　（C）-5　　（D）1

【答案】A

【解析】根据题意作出约束条件确定的可行域，如下图：



令 $z=-2x+y \Rightarrow y=-2x-z$，可知在图中 $A(1,1)$ 处，$z=-2x+y$ 取到最大值-1,故选 A.

【考点定位】本题主要考查了简单的线性规划.

【名师点睛】在解决简单的线性规划问题时，考生作图和确定可行区域一定要细心，本题考查了考生的数形结合能力和基本运算能力.

（6）下列双曲线中，渐近线方程为 $y=\pm 2x$ 的是（　　）

（A）$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

（C）$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$

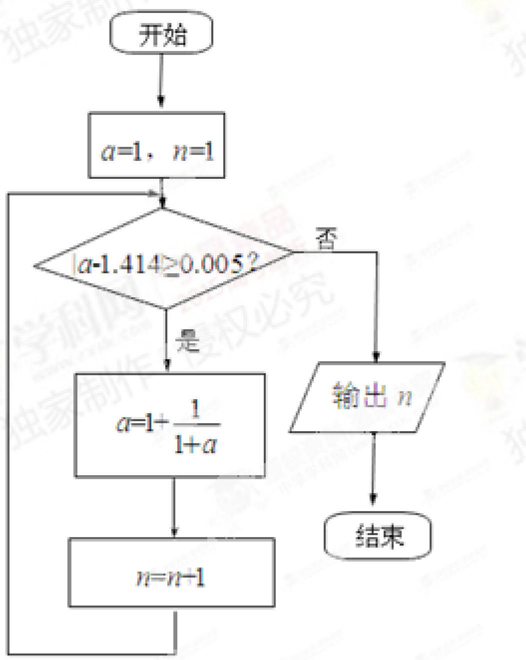
【答案】A

【解析】由双曲线的渐进线的公式可行选项 A 的渐进线方程为 $y=\pm 2x$，故选 A.

【考点定位】本题主要考查双曲线的渐近线公式.

【名师点睛】在求双曲线的渐近线方程时，考生一定要注意观察双曲线的交点是在 x 轴，还是在 y 轴，选用各自对应的公式，切不可混淆.

（7）执行如图所示的程序框图（算法流程图），输出的 n 为（　　）



第（7）题图

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

【答案】B

【解析】执行第一次循环体：$a=\frac{3}{2},n=2;$此时$|a-1.414|=|1.5-1.414|=0.086\geq 0.005;$

执行第二次循环体：$a=\frac{7}{5},n=3;$此时$|a-1.414|=|1.4-1.414|=0.014\geq 0.005;$

执行第三次循环体：$a=\frac{17}{12},n=4;$此时$|a-1.414|<0.005$，此时不满足，判断条件，输 出 n=4,故选 B.

【考点定位】本题主要考查程序框图以及循环结构的判断.

【名师点睛】考生在解决程序框图以及循环结构时，首先要明确循环的条件，其次在计算的过程中要细心，本题还考查了考生的计算能力.

（8）直线 $3x+4y=b$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 相切，则 $b=$（　　）

（A）-2 或 12　　（B）2 或-12　　（C）-2 或-12　　（D）2 或 12

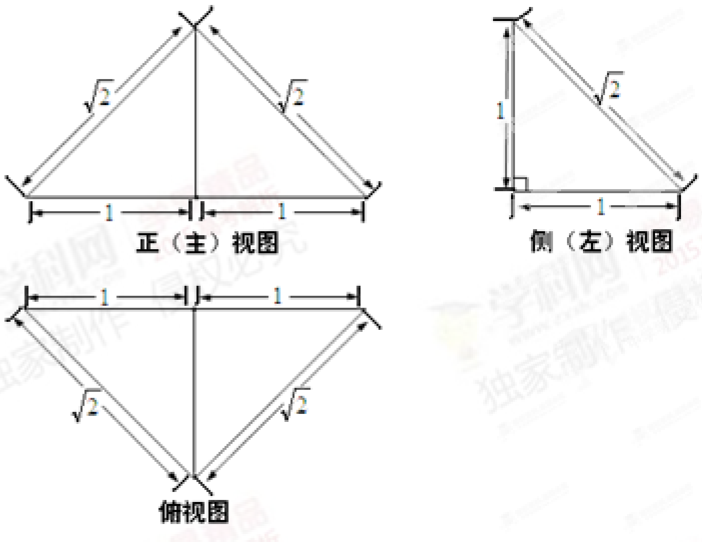
【答案】D

【解析】∵直线$3x+4y=b$与圆心为（1,1），半径为 1 的圆相切，∴$\frac{|3+4-b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\Rightarrow b=2$或 12,故选 D.

【考点定位】本题主要考查利用圆的一般方程求圆的圆心和半径，直线与圆的位置关系，以及点到直线的距离公式的应用.

【名师点睛】在解决直线与圆的位置关系问题时，有两种方法；方法一是代数法：将直线方程与圆的方程联立，消元，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，通过判断 $\Delta>0;\Delta=0;\Delta<0$ 来确定直线与圆的位置关系；方法二是几何法：主要是利用圆心到直线的距离公式求出圆心到直线的距离 d，然后再将 d 与圆的半径 r 进行判断，若 $d>r$ 则相离；若 $d=r$ 则相切；若 $d<r$ 则相交；本题考查考生的综合分析能力和运算能力.

（9）一个四面体的三视图如图所示，则该四面体的表面积是（　　）

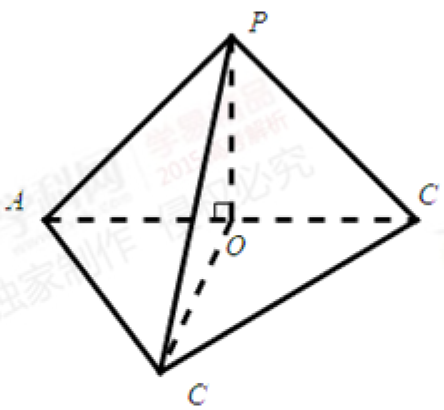


第（9）题图

（A）$1+\sqrt{3}$　　（B）$1+2\sqrt{2}$　　（C）$2+\sqrt{3}$　　（D）$2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】由该几何体的三视图可知，该几何体的直观图，如下图所示：



其中侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC，且 $\Delta PAC\cong\Delta ABC$，由三视图中所给数据可知：

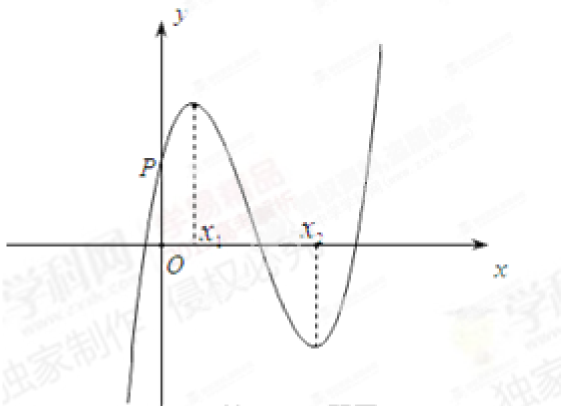
$PA=PC=AB=BC=\sqrt{2}$，取 AC 中点 O，连接 PO，BO，则 $Rt\Delta POB$ 中，

$PO=BO=1\Rightarrow PB=\sqrt{2}\therefore S=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2+\sqrt{3}$，故选 C.

【考点定位】本题主要考查空间几何体的三视图、锥体表面积公式.

【名师点睛】在利用空间几何体的三视图求几何体的体积或者表面积时，一定要正确还原几何体的直观图，然后再利用体积或表面积公式求之；本题主要考查了考生的空间想象力和基本运算能力.

（10）函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如图所示，则下列结论成立的是（　　）



第（10）题图

（A）$a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$

（B）$a>0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$

（C）$a<0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$

（D）$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d<0$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 的图象可知 $a>0$，令 $x=0 \Rightarrow d>0$

又 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，可知 x_1,x_2 是 $f'(x)=0$ 的两根

由图可知 $x_1>0,x_2>0$

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ c<0 \end{cases}$$；故 A 正确.

【考点定位】本题主要考查函数的图象和利用函数图象研究函数的性质.

【名师点睛】本题主要是考查考生利用函数图象研究函数的性质，在研究函数的性质时要结合函数的单调性、奇偶性、零点、以及极值等函数的特征去研究，本题考查了考生的数形结合能力.

二、　填空题

（11）$\lg\dfrac{5}{2}+2\lg 2-(\dfrac{1}{2})^{-1}=$__________.

【答案】-1

【解析】原式＝$\lg 5-\lg 2+2\lg-2=\lg 5+\lg 2-2=1-2=-1$

【考点定位】本题主要考查对数运算公式和指数幂运算公式.

【名师点睛】本题主要考查考生的基本运算能力，熟练掌握对数运算公式和指数幂运算公式是解决本题的关键.

（12）在ΔABC中，$AB=\sqrt{6}$，$\angle A=75^{\circ}$，$\angle B=45^{\circ}$，则$AC=$____________.

【答案】2

【解析】由正弦定理可知：$\frac{AB}{\sin[180^{\circ}-(75^{\circ}+45^{\circ})]}=\frac{AC}{\sin 45^{\circ}}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{AC}{\sin 45^{\circ}}\Rightarrow AC=2$

【考点定位】本题主要考查正弦定理的应用.

【名师点睛】熟练掌握正弦定理的适用条件是解决本题的关键，本题考查了考生的运算能力.

（13）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}$（$n\geq 2$），则数列$\{a_n\}$的前 9 项和等于____________.

【答案】27

【解析】$\because n\geq 2$时，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}$，且$a_2=a_1+\frac{1}{2}$

$\therefore\{a_n\}$是以a_1为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列

$\therefore S_9=9\times 1+\frac{9\times 8}{2}\times\frac{1}{2}=9+18=27$

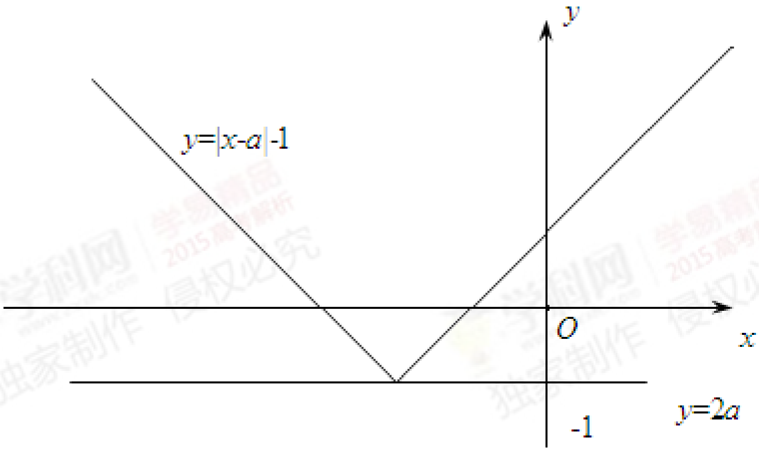
【考点定位】本题主要考查等差数列的定义、通项公式和前n项和公式的应用.

【名师点睛】能够从递推公式判断数列的类型或采用和种方法是解决本题的关键，这需要考生平时多加积累，同时本题还考查了等差数列的基本公式的应用，考查了考生的基本运算能力.

（14）在平面直角坐标系xOy中，若直线$y=2a$与函数$y=|x-a|-1$的图像只有一个交点，则a的值为____________.

【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】在同一直角坐标系内，作出$y=2a$与$y=|x-a|-1$的大致图像，如下图：



由题意，可知 $2a=-1\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

【考点定位】本题主要靠数形结合思想，函数与方程、零点等基础知识.

【名师点睛】本题根据题意作出函数 $y=|x-a|-1$ 的大致图象是解决本题的关键，本题主要考查学生的数形结合的能力.

（15）ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，则下列结论中正确的是_____________.（写出所有正确结论得序号）

①$\vec{a}$ 为单位向量；②$\vec{b}$ 为单位向量；③$\vec{a}\perp\vec{b}$；④$\vec{b}\,//\,\overrightarrow{BC}$；⑤$(4\vec{a}+\vec{b})\perp\overrightarrow{BC}$。

【答案】①④⑤

【解析】

∵等边三角形 ABC 的边长为 2, $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$ ∴ $|\overrightarrow{AB}|=2|\vec{a}|=2\Rightarrow|\vec{a}|=1$,故①正确;

∵ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+\overrightarrow{BC}$ ∴ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}\Rightarrow|\vec{b}|=2$，故②错误，④正确；由于 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为$120^\circ$，故③错误；又∵ $(4\vec{a}+\vec{b})\cdot\overrightarrow{BC}=(4\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1\times2\times(-\dfrac{1}{2})+4=0$

∴ $(4\vec{a}+\vec{b})\perp\overrightarrow{BC}$，故⑤正确　因此，正确的编号是①④⑤

【考点定位】本题主要考查平面向量的基本概念和基本性质的应用.

【名师点睛】熟练掌握平面向量的单位向量、共线（平行）、垂直、平面向量的加法等基本概念和基本性质是解决本题的关键之所在，同时本题考查了考生的综合分析问题的能力以及数形结合的能力.

三. 解答题

16. 已知函数 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2+\cos 2x$

（I）求 $f(x)$ 最小正周期；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【答案】（Ⅰ）π；（Ⅱ）最大值为 $1+\sqrt{2}$，最小值为 0

【解析】

（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x+\cos 2x=1+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得计算结果，$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

由正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ 上的图象知，

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\sqrt{2}+1$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 取最小值 0.

综上，$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}+1$，最小值为 0.

【考点定位】本题主要考查同角的基本关系、三角恒等变换、三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的性质，以及正弦函数的性质.学科网

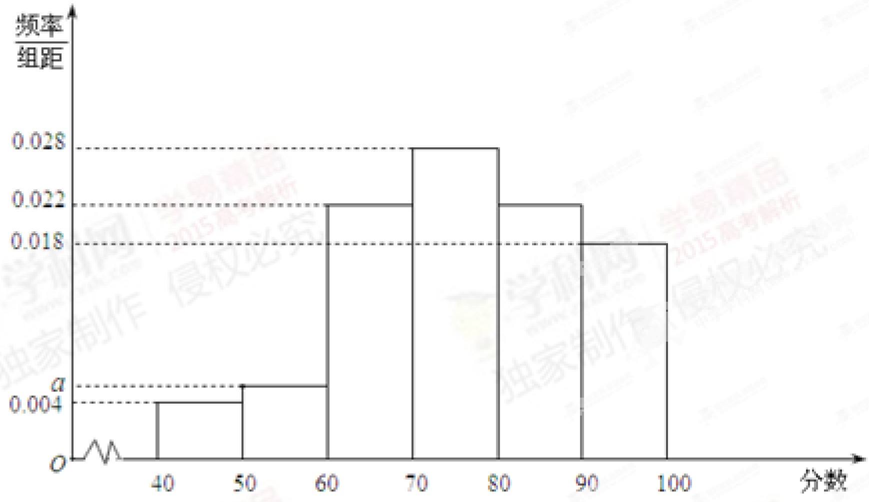
【名师点睛】熟练掌握三角函数的同角的基本关系和恒等变换公式以及三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的性质是解决本题的关键，考查了考生的基本运算能力.

17. 某企业为了解下属某部门对本企业职工的服务情况，随机访问 50 名职工，根据这 50 名职工对该部门的评分，绘制频率分布直方图（如图所示），其中样本数据分组区间为 $[40,50],[50,60],\cdots,[80,90],[90,100]$

（I）求频率分布图中 a 的值；

（II）估计该企业的职工对该部门评分不低于 80 的概率；

（III）从评分在 $[40,60]$ 的受访职工中，随机抽取 2 人，求此 2 人评分都在 $[40,50]$ 的概率.



第（17）题图

【答案】（Ⅰ）0.006；（Ⅱ）0.4；(III) $\dfrac{1}{10}$

【解析】

（Ⅰ）因为$(0.004+a+0.0018+0.022\times2+0.028)\times10=1$，所以$a=0.006$

（Ⅱ）由所给频率分布直方图知，50 名受访职工评分不低于 80 的频率为$(0.022+0.018)\times10=0.4$，所以该企业职工对该部门评分不低于 80 的概率的估计值为0.4.

(III) 受访职工评分在[50,60)的有：50×0.006×10=3（人），即为A_1,A_2,A_3；

受访职工评分在[40,50)的有： 50×0.004×40=2（人），即为B_1,B_2.

从这 5 名受访职工中随机抽取 2 人，所有可能的结果共有 10 种，它们是$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,A_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{B_1,B_2\}$,又因为所抽取 2 人的评分都在[40,50)的结果有 1 种，即$\{B_1,B_2\}$，故所求的概率为$p=\dfrac{1}{10}$.

【考点定位】本题主要考查了频率分布直方图、概率和频率的关系、古典概型等基础知识.

【名师点睛】利用频率分布直方图解题的时，注意其表达的意义，同时要理解频率是概率的估计值这一基础知识；在利用古典概型解题时，要注意列出所有的基本事件，千万不可出现重、漏的情况.

18. 已知数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，且$a_1+a_4=9,a_2a_3=8$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】（Ⅰ）$a_n=2^{n-1}$（Ⅱ）$\dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

【解析】

（Ⅰ）由题设可知 $a_1\cdot a_4=a_2\cdot a_3=8$，

又 $a_1+a_4=9$，可解的 $\begin{cases}a_1=1\\a_4=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=8\\a_4=1\end{cases}$（舍去）

由 $a_4=a_1q^3$ 得公比 $q=2$，故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

（Ⅱ）$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

又 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

所以 $T_n=b_1+b_2+...+b_n=\left(\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}\right)+\left(\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

【考点定位】本题主要考查等比数列的通项公式、性质，等比数列的前 n 项和，以及利用裂项相消法求和.

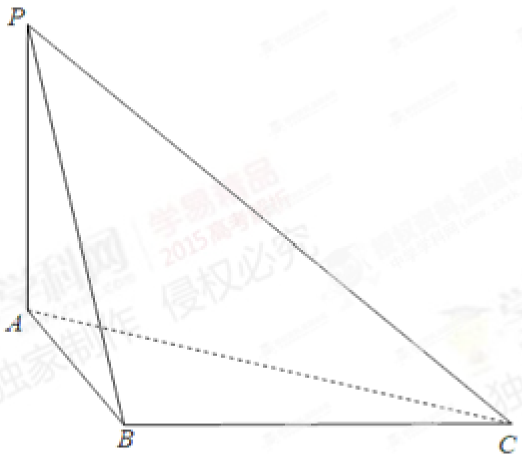
【名师点睛】本题利用“若 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$”，是解决本题的关键，同时考生发现

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$ 是解决本题求和的关键,本题考查了考生的基础运算能力.

19. 如图，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=1,AB=1,AC=2,\angle BAC=60^\circ$.

（I）求三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积；

（II）证明：在线段 PC 上存在点 M，使得 $AC\perp BM$，并求 $\dfrac{PM}{MC}$ 的值.



第（19）题图

【答案】（Ⅰ）$\frac{\sqrt{3}}{6}$ （Ⅱ）$\frac{PM}{MC}=\frac{1}{3}$

【解析】

（Ⅰ）解：由题设 $AB=1, AC=2, \angle BAC=60^\circ$

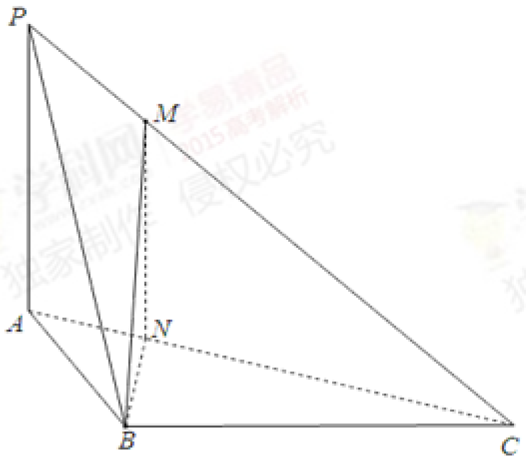
可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $PA\perp$面 ABC

可知 PA是三棱锥 $P-ABC$ 的高,又 $PA=1$

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{6}$

（Ⅱ）证：在平面 ABC内，过点 B 作 $BN\perp AC$，垂足为N，过N 作 $MN \parallel PA$交 PC于 M，连接 BM .



由 $PA\perp$面 ABC 知 $PA\perp AC$，所以 $MN\perp AC$.由于 $BN\cap MN=N$，故 $AC\perp$面 MBN，又 $BM\subset$面 MBN，所以 $AC\perp BM$.

在直角 ΔBAN 中， $AN = AB \cdot \cos\angle BAC = \frac{1}{2}$，从而 $NC = AC - AN = \frac{3}{2}$.由 $MN // PA$，得

$\frac{PM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$.

【考点定位】本题主要考查锥体的体积公式、线面垂直的判定定理和其性质定理.

【名师点睛】本题将正弦定理求三角形的面积巧妙地结合到求锥体的体积之中，本题的第（Ⅱ）问需要学生构造出线面垂直，进而利用性质定理证明出面面垂直，本题考查了考生的空间想象能力、构造能力和运算能力.

20. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(a,0)$,点 B 的坐标为（0，b）,点 M 在线段 AB 上，满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

（I）求 E 的离心率 e;

（II）设点 C 的坐标为（0，$-b$）,N 为线段 AC 的中点，证明：$MN \perp AB$.

【答案】（Ⅰ）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ （Ⅱ）详见解析.

【解析】

（Ⅰ）解：由题设条件知，点 $M(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}b)$，又 $k_{OM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ 从而 $\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

进而 $a = \sqrt{5}b, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2b$，故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅱ）证：由 N 是 AC 的中点知，点 N 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$，可得 $\overline{NM} = \left(\frac{a}{6}, \frac{5b}{6}\right)$.

又 $\dot{AB} = (-a, b)$，从而有 $\dot{AB} \cdot \dot{NM} = -\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{6}b^2 = \frac{1}{6}(5b^2 - a^2)$

由（Ⅰ）得计算结果可知 $a^2 = 5b^2$,所以 $\dot{AB} \cdot \dot{NM} = 0$，故 $MN \perp AB$.

【考点定位】本题主要考查椭圆的离心率，直线与椭圆的位置关系等基础知识.

【名师点睛】本题主要将椭圆的性质与求椭圆的离心率相结合，同时考查了中点坐标公式，以及解析几何中直线与直线垂直的常用方法，本题考查了考生的基本运算能力和综合分析能力.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{(x+r)^2}(a>0,r>0)$

（I）求 $f(x)$ 的定义域，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $\dfrac{a}{r}=400$，求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极值.

【答案】（Ⅰ）递增区间是（$-r,r$）;递减区间为（$-\infty$，$-r$）和（r，$+\infty$)；（Ⅱ）极大值为 100；无极小值.

【解析】（Ⅰ）由题意可知 $x\neq -r$　所求的定义域为 $(-\infty,-r)\cup(-r,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{ax}{(x+r)^2}=\frac{ax}{x^2+2xr+r^2},$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2xr+r^2)-ax(2x+2r)}{(x^2+2xr+r^2)^2}=\frac{a(r-x)(x+r)}{(x+r)^4}$$

所以当 $x<-r$ 或 $x>r$ 时，$f'(x)<0$，当 $-r<x<r$ 时，$f'(x)>0$

因此，$f(x)$ 单调递减区间为 $(-\infty,-r),(r,+\infty)$；$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-r,r)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的解答可知 $f'(r)=0$　$f(x)$ 在 $(0,r)$ 上单调递增，在 $(r,+\infty)$ 上单调递减.

因此 $x=r$ 是 $f(x)$ 的极大值点，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极大值为 $f(r)=\dfrac{ar}{(2r)^2}=\dfrac{a}{4r}=\dfrac{400}{4}=100$，

$f(x)$在 $(0,+\infty)$内无极小值；

综上，$f(x)$在 $(0,+\infty)$内极大值为 100，无极小值.

【考点定位】本题主要考查了函数的定义域、利用导数求函数的单调性，以及求函数的极值等基础知识.

【名师点睛】本题在利用导数求函数的单调性时要注意，求导后的分子是一个二次项系数为负数的一元二次式，在求 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$ 时要注意，本题主要考查考生对基本概念的掌握情况和基本运算能力.