绝密 ★ 启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标I卷）

数学

本试卷共10页，19小题，满分150分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|-5<x^3<5\right\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则 $x=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0\\ e^x+\ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$ ，在 **R** 上单调递增，则 a 取值的范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　　　B. $[-1,0]$　　　　C. $[-1,1]$　　　　D. $[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 6　　　　D. 8

8. 已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　　　D. $f(20)<10000$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（　　）（若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(u,\sigma^2\right)$，$P(Z<u+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$　　　　B. $P(X>2)<0.5$

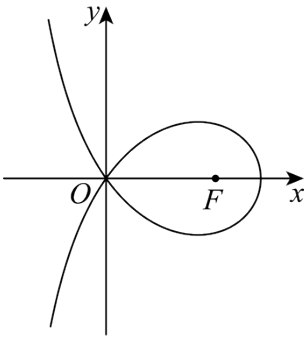
C. $P(Y>2)>0.5$　　　　D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　　　B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　　　　D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型∞可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 **C** 的一部分.已知 **C** 过坐标原点 O. 且 **C** 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）



A. $a=-2$

B. 点$(2\sqrt{2},0)$在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点$\left(x_0,y_0\right)$在 C 上时，$y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交 C 于 A，B 两点，若$|F_1A|=13,|AB|=10$，则 C 的离心率为__________.

13. 若曲线$y=\mathrm{e}^x+x$在点$\left(0,1\right)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$__________.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）.则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记$\triangle ABC$内角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求 B;

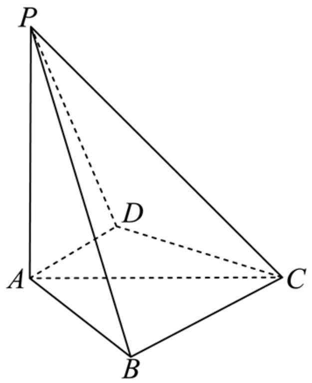
（2）若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求 c.

16. 已知$A(0,3)$和$P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求 C 的离心率;

（2）若过 P 的直线l交 C 于另一点 B，且$\triangle ABP$的面积为 9，求l的方程.

17. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1,AB=\sqrt{3}$.



（1）若 $AD \perp PB$，证明：$AD//$ 平面 PBC；

（2）若 $AD \perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.

18. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geq 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

19. 设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\left(i<j\right)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列.

（1）写出所有的 $\left(i,j\right)$，$1\leq i<j\leq 6$，使数列 $a_1,a_2,...,a_6$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列；

（2）当 $m\geq 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(2,13\right)-$ 可分数列；

（3）从 $1,2,...,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，记数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.