

2009年普通高等学校招生全国统一考试（海南卷）

数学（文史类）

一、选择题：（本大题共12题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，中有一项是符合题目要求的。

(1) 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap B =$

(A) $\{3, 5\}$ (B) $\{3, 6\}$

(C) $\{3, 7\}$ (D) $\{3, 9\}$

(2) 复数 $\frac{3+2i}{2-3i} =$

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

(3) 对变量 x, y

有观测数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 10$)，得散点图1；对变量 u, v 有观测数据 $(u_i, v_i$

$)$ ($i=1, 2, \dots, 10$)，得散点图2. 由这两个散点图可以判断。

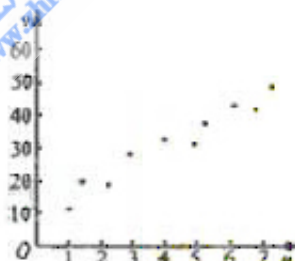
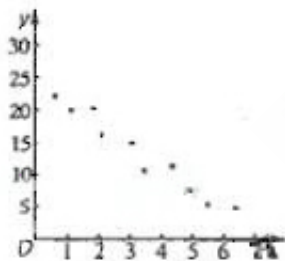


图 2

(A) 变量 x 与 y 正相关， u 与 v 正相关 (B) 变量 x 与 y 正相关， u 与 v 负相关

(C) 变量 x 与 y 负相关， u 与 v 正相关 (D) 变量 x 与 y 负相关， u 与 v 负相关

(4) 有四个关于三角函数的命题：

$$p_1: \exists x \in \mathbb{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad p_2: \exists x, y \in \mathbb{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y$$

$$p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x \quad p_4: \sin x = \cos y \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$$

其中假命题的是

- (A) p_1, p_4 (B) p_2, p_4 (3) p_1, p_3 (4) p_2, p_3

(5) 已知圆 $C_1: (x+1)^2+(y-1)^2=1$, 圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $x-y-1=0$ 对称, 则圆 C_2 的方程为

- (A) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ (B) $(x-2)^2+(y+2)^2=1$
 (C) $(x+2)^2+(y+2)^2=1$ (D) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

(6) 设 x, y 满足 $\begin{cases} 2x+y \geq 4, \\ x-y \geq 1, \\ x-2y \leq 2, \end{cases}$ 则 $z=x+y$

- (A) 有最小值2, 最大值3 (B) 有最小值2, 无最大值
 (C) 有最大值3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

(7) 已知 $a=(-3,2), b=(-1,0)$, 向量 $\lambda a+b$ 与 $a-2b$ 垂直, 则实数 λ 的值为

- (A) $-\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

(8) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0, S_{2m-1}=38$, 则 $m=$

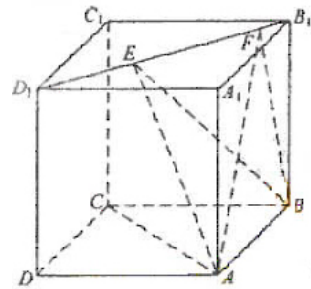
- (A) 38 (B) 20 (C) 10 (D) 9

(9) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱线长为1, 线段

B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF = \frac{1}{2}$, 则下列结论中

错误的是

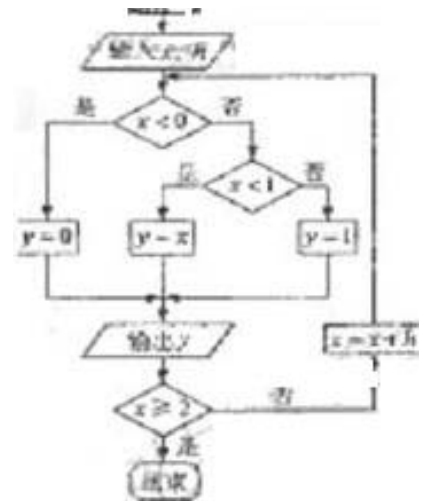
- (A) $AC \perp BE$
 (B) $EF \parallel$ 平面 $ABCD$
 (C) 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值
 (D) $\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等



(10) 如果执行右边的程序框图, 输入 $x=-2, h=0.5$, 那么输出的各个数的和等于

- (A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

(11) 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位: cm^2)



为 (A) $48+12\sqrt{2}$ (B) $48+24\sqrt{2}$

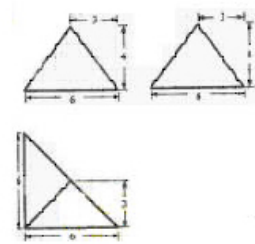
(C) $36+12\sqrt{2}$ (D) $36+24\sqrt{2}$

(12) 用 $\min\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 三个数中的最小值。设

$$f(x) = \min\{2^x, x+2, 10-x\}$$

($x \geq 0$), 则 $f(x)$ 的最大值为

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7



第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 (13 题) ~ 第 (21 题) 为必考题，每个试题考生都必须作答。第 (22 题) ~ 第 (24 题) 为选考题，考生根据要求作答。

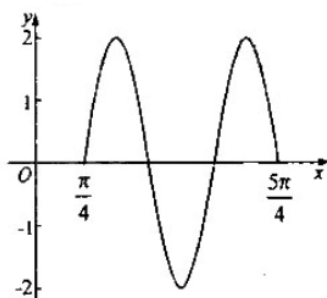
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

(13) 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____。

(14) 已知抛物线 C 的顶点坐标为原点，焦点在 x 轴上，直线 $y=x$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点，若 $P(2, 2)$ 为 AB 的中点，则抛物线 C 的方程为 _____。

(15) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ，已知 $a_2 = 1$ ， $a_{n+2} + a_{n+1} = 6a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4 =$ _____。

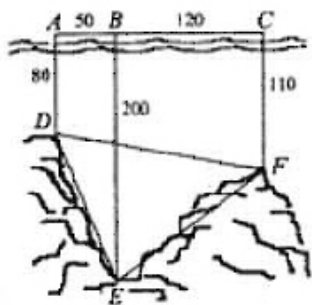
(16) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \phi)$ 的图像如图所示，则 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$ _____。



三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

如图，为了解某海域海底构造，在海平面内一条直线上的 A, B, C 三点进行测量，已知 $AB = 50m$ ， $BC = 120m$ ，于 A 处测得水深 $AD = 80m$ ，于 B 处测得水深 $BE = 200m$ ，于 C 处测得水深 $CF = 110m$ ，求 $\angle DEF$ 的余弦值。

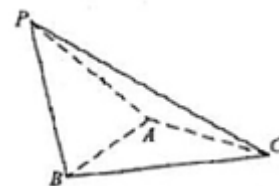


(18) (本小题满分12分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle PAB$ 是等边三角形， $\angle PAC = \angle PBC = 90^\circ$

(I) 证明： $AB \perp PC$

(II) 若 $PC = 4$ ，且平面 $PAC \perp$ 平面 PBC ，求三棱锥 $P-ABC$ 体积



(19) (本小题满分12分)

某工厂有工人1000名，其中250名工人参加过短期培训（称为A类工人），另外750名工人参加过长期培训（称为B类工人）。现用分层抽样方法（按A类，B类分二层）从该工厂的工人中共抽查100名工人，调查他们的生产能力（生产能力指一天加工的零件数）。

(I) A类工人中和B类工人各抽查多少工人？

(II) 从A类工人中抽查结果和从B类工人中的抽查结果分别如下表1和表2

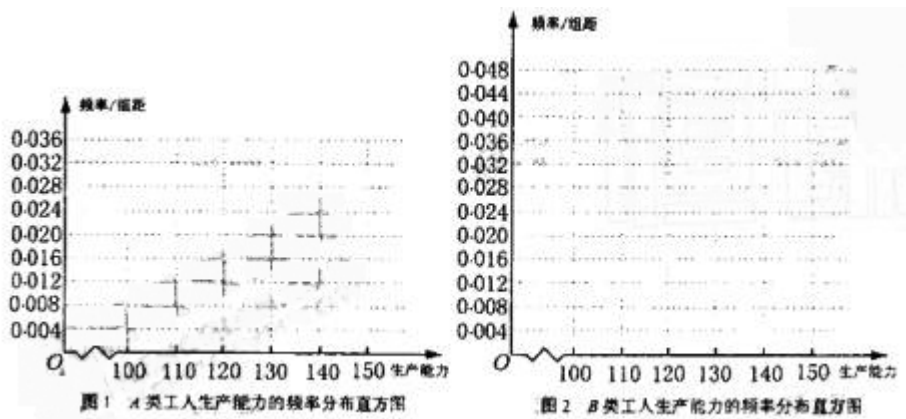
表1:

生产能力分组	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150)
人数	4	8	x	5	3

表2:

生产能力分组	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150)
人数	6	y	36	18

(1) 先确定 x, y ，再在答题纸上完成下列频率分布直方图。就生产能力而言，A类工人中个体间的差异程度与B类工人中个体间的差异程度哪个更小？（不用计算，可通过观察直方图直接回答结论）



(ii) 分别估计 A 类工人和 B 类工人生产能力的平均数，并估计该工厂工人和生产能力的平均数（同一组中的数据用该区间的中点值作代表）。

(20) (本小题满分12分)

已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点，焦点在 x 轴上，它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1

(I) 求椭圆 C 的方程

(II) 若 P 为椭圆 C 的动点， M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点， $\frac{|OP|}{|OM|} = e$

(e 为椭圆 C 的离心率)，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线。

(21) (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 9a^2x + a^3$.

(1) 设 $a = 1$ ，求函数 $f(x)$ 的极值；

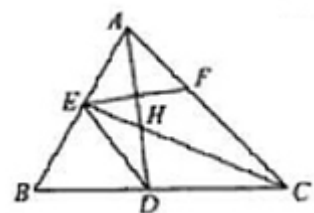
(2) 若 $a > \frac{1}{4}$ ，且当 $x \in [1, 4a]$ 时， $|f'(x)| \leq 12a$ 恒成立，试确定 a 的取值范围。

请考生在第 (22)、(23)、(24) 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑。

(22) (本小题满分10分) 选修4—1：几何证明选讲

如图，已知 $\triangle ABC$ 中的两条角平分线 AD 和 CE 相交于 H ，

$\angle B = 60^\circ$ ， F 在 AC 上，且 $AE = AF$ 。



(1) 证明：B, D, H, E 四点共圆；

(2) 证明：CE 平分 $\angle DEF$ 。

(23) (本小题满分10分) 选修4—4: 坐标系与参数方程。

已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = -4 + \cos t, \\ y = 3 + \sin t, \end{cases}$ (t 为参数), $C_2: \begin{cases} x = 8 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数)。

(1) 化 C_1, C_2 的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线;

(2) 若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t = \frac{\pi}{2}$, Q 为 C_2 上的动点, 求 PQ 中点 M 到直线

$C_3: \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -2 + t \end{cases}$ (t 为参数) 距离的最小值。

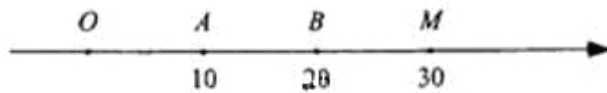
(24) (本小题满分10分) 选修4-5: 不等式选讲

如图, O 为数轴的原点, A, B, M 为数轴上三点, C 为线段 OM 上的动点, 设 x 表示 C

与原点的距离, y 表示 C 到 A 距离4倍与 C 到 B 距离的6倍的和。

(1) 将 y 表示为 x 的函数;

(2) 要使 y 的值不超过70, x 应该在什么范围内取值?



$$V = \frac{1}{3} \times S \times PC = \frac{8}{3} \quad \dots \dots \dots 12 \text{分}$$

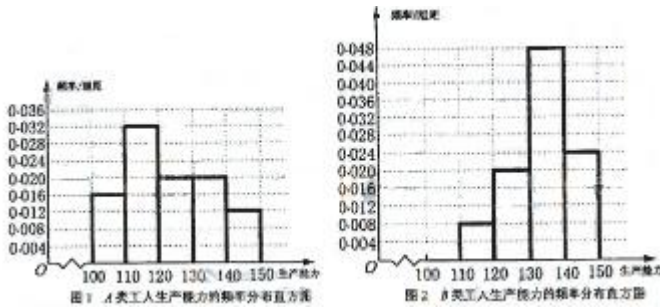
(19) 解:

(I) A类工人中和B类工人中分别抽查25名和75名。 \dots \dots \dots 4分

(II) (i) 由 $4+8+x+5+3=25$, 得 $x=5$,

$$6+y+36+18=75, \text{ 得 } y=15.$$

频率分布直方图如下



\dots \dots \dots 8分

从直方图可以判断: B类工人中个体间的差异程度更小。 \dots \dots \dots 9分

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \bar{x}_A &= \frac{4}{25} \times 105 + \frac{8}{25} \times 115 + \frac{5}{25} \times 125 + \frac{5}{25} \times 135 + \frac{3}{25} \times 145 = 123, \\ \bar{x}_B &= \frac{6}{75} \times 115 + \frac{15}{75} \times 125 + \frac{36}{75} \times 135 + \frac{18}{75} \times 145 = 133.8, \\ \bar{x} &= \frac{25}{100} \times 123 + \frac{75}{100} \times 133.8 = 131.1 \end{aligned}$$

A类工人生产能力的平均数, B类工人生产能力的平均数以及全厂工人生产能力的平均数的估计值分别为123, 133.8和131.1.

(20) 解:

(I) 设椭圆长半轴长及分别为a,c,由已知得

$$\begin{cases} a-c=1 \\ a+c=7 \end{cases} \text{ 解得 } a=4, c=3, \text{ 所以椭圆C的方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

(II) 设 $M(x, y), P(x_1, y_1)$, 其中 $x \in [-4, 4]$. 由已知得 $\frac{x^2 + y_1^2}{x^2 + y^2} = e^2$.

$$\text{而 } e = \frac{3}{4}, \text{ 故 } 16(x^2 + y_1^2) = 9(x^2 + y^2). \quad \textcircled{1}$$

由点P在椭圆C上得 $y_1^2 = \frac{112-7x^2}{16}$,

代入①式并化简得 $9y^2 = 112$, 所以点M的轨迹方程为 $y = \pm \frac{4\sqrt{7}}{3} (-4 \leq x \leq 4)$, 轨迹是两条

平行于x轴的线段.....12分

(21) 解:

(I) 当a=1时, 对函数 $f(x)$ 求导数, 得 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

列表讨论 $f(x), f'(x)$ 的变化情况:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值6	↘	极小值-26	↗

所以, $f(x)$ 的极大值是 $f(-1) = 6$, 极小值是 $f(3) = -26$.

(II) $f'(x) = 3x^2 - 6ax - 9a^2$ 的图像是一条开口向上的抛物线, 关于 $x=a$ 对称.

若 $\frac{1}{4} < a \leq 1$, 则 $f'(x)$ 在 $[1, 4a]$ 上是增函数, 从而

$f'(x)$ 在 $[1, 4a]$ 上的最小值是 $f'(1) = 3 - 6a - 9a^2$, 最大值是 $f'(4a) = 15a^2$.

由 $|f'(x)| \leq 12a$, 得 $-12a \leq 3x^2 - 6ax - 9a^2 \leq 12a$, 于是有

$f'(1) = 3 - 6a - 9a^2 \geq -12a$, 且 $f'(4a) = 15a^2 \leq 12a$.

由 $f'(1) \geq -12a$ 得 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$, 由 $f'(4a) \leq 12a$ 得 $0 \leq a \leq \frac{4}{5}$.

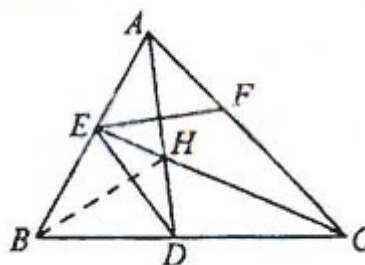
所以 $a \in (\frac{1}{4}, 1] \cap [-\frac{1}{3}, 1] \cap [0, \frac{4}{5}]$, 即 $a \in (\frac{1}{4}, \frac{4}{5}]$.

若 $a > 1$, 则 $|f'(a)| = 12a^2 > 12a$. 故当 $x \in [1, 4a]$ 时 $|f'(x)| \leq 12a$ 不恒成立.

所以使 $|f'(x)| \leq 12a (x \in [1, 4a])$ 恒成立的 a 的取值范围是 $(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}]$.

(22) 解:

(I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle B = 60^\circ$,



所以 $\angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$.

因为 AD, CE 是角平分线，所以 $\angle HAC + \angle HCA = 60^\circ$,

故 $\angle AHC = 120^\circ$ ，于是 $\angle EHD = \angle AHC = 120^\circ$.

因为 $\angle EBD + \angle EHD = 180^\circ$ ，所以 B, D, H, E 四点共圆。

(II) 连结 BH ，则 BH 为 $\angle ABC$ 的平分线，得 $\angle HBD = 30^\circ$

由 (I) 知 B, D, H, E 四点共圆，

所以 $\angle CED = \angle HBD = 30^\circ$

又 $\angle AHE = \angle EBD = 60^\circ$ ，由已知可得 $EF \perp AD$ ，可得 $\angle CEF = 30^\circ$

所以 CE 平分 $\angle DEF$

(23) 解：(I) $C_1: (x+4)^2 + (y-3)^2 = 1, C_2: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

C_1 为圆心是 $(-4, 3)$ ，半径是 1 的圆。

C_2 为中心是坐标原点，焦点在 x 轴上，长半轴长是 8，短半轴长是 3 的椭圆。

(II) 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时， $P(-4, 4), Q(8 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ ，故 $M(-2 + 4 \cos \theta, 2 + \frac{3}{2} \sin \theta)$

C_3 为直线 $x - 2y - 7 = 0$ ， M 到 C_3 的距离 $d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4 \cos \theta - 3 \sin \theta - 13|$

从而当 $\cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = -\frac{3}{5}$ 时， d 取得最小值 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(24) 解：

(I) $y = 4|x - 10| + 6|x - 20|, 0 \leq x \leq 30$ (II) 依题意， x 满足

$$\begin{cases} 4|x - 10| + 6|x - 20| \leq 70, \\ 0 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

解不等式组，其解集为 $[9, 23]$ ，所以 $x \in [9, 23]$