

2009年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文史类）（北京卷）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷1至2页，第II卷3至9页，共150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

注意事项：

1. 答第I卷前，考生务必将答题卡上的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写，用2B铅笔将准考证号对应的信息点涂黑。
 2. 每小题选出答案后，将答题卡上对应题目的答案选中涂满涂黑，黑度以盖住框内字母为准，修改时用橡皮擦除干净。在试卷上作答无效。
- 一、本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A = \{x | -\frac{1}{2} < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
- A. $\{x | -1 \leq x < 2\}$ B. $\{x | -\frac{1}{2} < x \leq 1\}$
C. $\{x | x < 2\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

【答案】A

【解析】本题主要考查集合的基本运算以及简单的不等式的解法。属于基础知识、基本运算的考查。

$$\therefore A = \{x | -\frac{1}{2} < x < 2\}, B = \{x | x^2 \leq 1\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\},$$

$$\therefore A \cup B = \{x | -1 \leq x < 2\}, \text{ 故选A.}$$

2. 已知向量 $a = (1, 0), b = (0, 1), c = ka + b (k \in R), d = a - b$, 如果 $c \parallel d$, 那么

- A. $k = 1$ 且 c 与 d 同向 B. $k = 1$ 且 c 与 d 反向
C. $k = -1$ 且 c 与 d 同向 D. $k = -1$ 且 c 与 d 反向

【答案】D

【解析】本题主要考查向量的共线（平行）、向量的加减法。属于基础知识、基本运算的考查。

$$\therefore a = (1, 0), b = (0, 1), \text{ 若 } k = 1, \text{ 则 } c = a + b = (1, 1), d = a - b = (1, -1),$$

显然, a 与 b 不平行, 排除A、B.

若 $k = -1$, 则 $c = -a + b = (-1, 1)$, $d = -a + b = -(-1, 1)$,

即 $c \parallel d$ 且 c 与 d 反向, 排除C, 故选D

3. 若 $(1 + \sqrt{2})^4 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a + b =$ ()

A. 33 B. 29 C. 23 D. 19

【答案】B

.w 【解析】本题主要考查二项式定理及其展开式. 属于基础知识、基本运算的考查.

$$\begin{aligned} \therefore (1 + \sqrt{2})^4 &= C_4^0 (\sqrt{2})^0 + C_4^1 (\sqrt{2})^1 + C_4^2 (\sqrt{2})^2 + C_4^3 (\sqrt{2})^3 + C_4^4 (\sqrt{2})^4 \\ &= 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 = 17 + 12\sqrt{2}, \end{aligned}$$

由已知, 得 $17 + 12\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$, $\therefore a + b = 17 + 12 = 29$. 故选B.

k.s.5.u.c 4. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点 ()

- A. 向左平移3个单位长度, 再向上平移1个单位长度
- B. 向右平移3个单位长度, 再向上平移1个单位长度
- C. 向左平移3个单位长度, 再向下平移1个单位长度
- D. 向右平移3个单位长度, 再向下平移1个单位长度

【答案】C

.w 【解析】本题主要考查函数图象的平移变换. 属于基础知识、基本运算的考查.

- A. $y = \lg(x+3) + 1 = \lg 10(x+3)$,
- B. $y = \lg(x-3) + 1 = \lg 10(x-3)$,
- C. $y = \lg(x+3) - 1 = \lg \frac{x+3}{10}$,
- D. $y = \lg(x-3) - 1 = \lg \frac{x-3}{10}$.

故应选C.

5. 用数字1, 2, 3, 4, 5组成的无重复数字的四位偶数的个数为 ()

A. 8 B. 24 C. 48 D. 120

【答案】C

.w 【解析】本题主要考查排列组合知识以及分步计数原理知识.

属于基础知识、基本运算的考查.

2和4排在末位时, 共有 $A_2^1 = 2$ 种排法,

其余三位数从余下的四个数中任取三个有 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 种排法,

于是由分步计数原理, 符合题意的偶数共有 $2 \times 24 = 48$ (个). 故选C.

6. “ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ” 是 “ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

.w 【解析】 本题主要考查三角函数的基本概念、简易逻辑中充要条件的判断. 属于基础知识、基本运算的考查.

$$\text{当 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \cos 2\alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{反之, 当 } \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ 时, 有 } 2\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in Z),$$

$$\text{或 } 2\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in Z), \text{ 故应选A.}$$

7. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1, AB_1 与底面ABCD成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面ABCD的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】D

.w 【解析】 本题主要考查正四棱柱的概念、直线与平面所成的角以及直线与平面的距离等概念.

属于基础知识、基本运算的考查.

依题意, $\angle B_1AB = 60^\circ$, 如图,

$$BB_1 = 1 \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ 故选D.}$$

8. 设D是正 $\Delta P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合, 点 P_0 是 $\Delta P_1P_2P_3$ 的中心, 若集合

$S = \{P \mid P \in D, |PP_0| \leq |PP_i|, i = 1, 2, 3\}$, 则集合S表示的平面区域是 ()

- A. 三角形区域 B. 四边形区域
C. 五边形区域 D. 六边形区域

【答案】D

【解析】 本题主要考查集合与平面几何基础知识..5.u.c.o.

本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及学生的学习潜力,考查学生分析问题和解决问题的

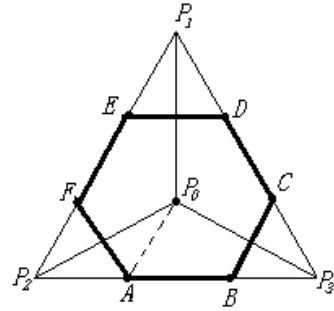
能力. 属于创新题型.

大光明

如图, A、B、C、D、E、F为各边三等分点, 答案是集合S为六边形ABCDEF, 其中,

$$P_0A = P_2A \leq P_iA (i=1,3)$$

即点P可以是点A.



第II卷 (110分)

注意事项:

1. 用铅笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三					总分	
			15	16	17	18	19	20
分数								

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分。把答案填写在题中横线上。

9. 若 $\sin \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta > 0$, 则 $\cos \theta =$.

【答案】 $-\frac{3}{5}$

【解析】 本题主要考查简单的三角函数的运算。属于基础知识、基本运算的考查。

由已知, θ 在第三象限, $\therefore \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$, \therefore 应填 $-\frac{3}{5}$.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in N^*)$, 则 $a_5 =$; 前8项的和 $S_8 =$. (用数字作答)

【答案】 16 255

【解析】 本题主要考查简单的递推数列以及数列的求和问题。属于基础知识、基本运算的考查。

$$a_1 = 1, a_2 = 2a_1 = 2, a_3 = 2a_2 = 4, a_4 = 2a_3 = 8, a_5 = 2a_4 = 16,$$

$$\text{易知 } S_8 = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255, \therefore \text{应填} 255.$$

11. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ x \leq 5, \end{cases}$ 则 $s = x + y$ 的最大值为 .

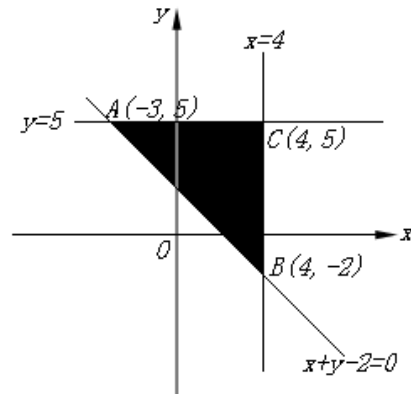
【答案】9

【解析】.s.5.u 本题主要考查线性规划方面的基础知. 属于基础知识、基本运算的考查.

如图, 当 $x = 4, y = 5$ 时,

$s = x + y = 4 + 5 = 9$ 为最大值.

故应填9.



12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1, \\ -x, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x) = 2$, 则 $x =$.

.w.w.k.s.5 【答案】 $\log_3 2$

.w 【解析】 5.u.c 本题主要考查分段函数和简单的已知函数值求 x 的值. 属于基础知识、基本运算的考查.

由 $\begin{cases} x \leq 1 \\ 3^x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \log_3 2$, $\begin{cases} x > 1 \\ -x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$ 无解, 故应填 $\log_3 2$.

13. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点P在椭圆上, 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$;

$\angle F_1PF_2$ 的大小为 .

【答案】 2, 120°

.w 【解析】 u.c 本题主要考查椭圆的定义、焦点、长轴、短轴、焦距之间的关系以及余弦定理. 属于基础知识、基本运算的考查.

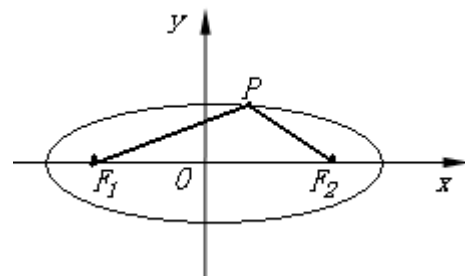
$$\therefore a^2 = 9, b^2 = 2,$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore |F_1F_2| = 2\sqrt{7},$$

$$\text{又 } |PF_1| = 4, |PF_1| + |PF_2| = 2a = 6, \therefore |PF_2| = 2,$$

$$\text{又由余弦定理, 得 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{2^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{2},$$



$\therefore \angle F_1PF_2 = 120^\circ$ ，故应填 2, 120° 。

14. 设A是整数集的一个非空子集，对于 $k \in A$ ，如果 $k-1 \notin A$ 且 $k+1 \notin A$ ，那么称 k 是A的一个“孤立元”，给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，由S的3个元素构成的所有集合中，不含“孤立元”的集合共有 个。

【答案】6

【解析】本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及学生的学习潜力,考查学生分析问题和解决问题的能力.属于创新题型.

什么是“孤立元”？依题意可知，必须是没有与 k 相邻的元素，因而无“孤立元”是指在集合中有与 k 相邻的元素.故所求的集合可分为如下两类：

因此，符合题意的集合是： $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}, \{6, 7, 8\}$ 共6个。

故应填6.

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题共12分）

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\pi - x) \cos x$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

【解析】本题主要考查特殊角三角函数值、诱导公式、二倍角的正弦、三角函数在闭区间上的最值等基础知识，主要考查基本运算能力.

(I) $\because f(x) = 2 \sin(\pi - x) \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$,

\therefore 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

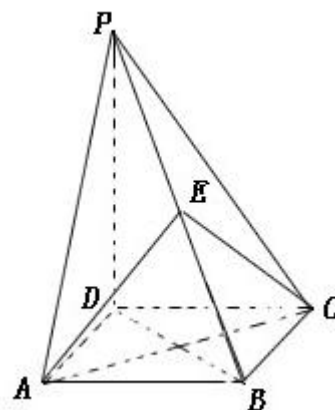
(II) 由 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \pi$, $\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq 1$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为1，最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. （本小题共14分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，

$PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，点E在棱PB上.



(I) 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 PDB ;

(II) 当 $PD = \sqrt{2}AB$ 且 E 为 PB 的中点时, 求 AE 与平面 PDB 所成的角的大小.

【解法1】 本题主要考查直线和平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力.

(I) \because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$,

$\because PD \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp AC$,

$\therefore AC \perp$ 平面 PDB ,

\therefore 平面 $AEC \perp$ 平面 PDB .

(II) 设 $AC \cap BD = O$, 连接 OE ,

由 (I) 知 $AC \perp$ 平面 PDB 于 O ,

$\therefore \angle AEO$ 为 AE 与平面 PDB 所成的角,

$\therefore O, E$ 分别为 DB, PB 的中点,

$$\therefore OE \parallel PD, \quad OE = \frac{1}{2}PD,$$

又 $\because PD \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore OE \perp$ 底面 $ABCD$, $OE \perp AO$,

$$\text{在 Rt}\triangle AOE \text{ 中, } OE = \frac{1}{2}PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = AO,$$

$\therefore \angle AEO = 45^\circ$, 即 AE 与平面 PDB 所成的角的大小为 45° .

【解法2】 如图, 以 D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

设 $AB = a, PD = h$, 则 $A(a, 0, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0), D(0, 0, 0), P(0, 0, h)$,

$$(I) \because \overrightarrow{AC} = (-a, a, 0), \overrightarrow{DP} = (0, 0, h), \overrightarrow{DB} = (a, a, 0),$$

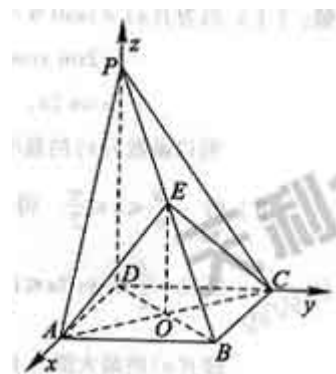
$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0,$$

$\therefore AC \perp DP, AC \perp BD$,

$\therefore AC \perp$ 平面 PDB ,

\therefore 平面 $AEC \perp$ 平面 PDB .

(II) 当 $PD = \sqrt{2}AB$ 且 E 为 PB 的中点时,



$$P(0,0,\sqrt{2}a), E\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

设 $AC \cap BD = O$, 则 $O\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right)$, 连接OE,

由 (I) 知 $AC \perp$ 平面PDB于O,

$\therefore \angle AEO$ 为AE与平面PDB所成的角,

$$\therefore \overrightarrow{EA} = \left(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right), \overrightarrow{EO} = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$\therefore \cos \angle AEO = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EO}}{|\overrightarrow{EA}| \cdot |\overrightarrow{EO}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \angle AEO = 45^\circ$, 即AE与平面PDB所成的角的大小为 45° .

17. (本小题共13分)

某学生在上学路上要经过4个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的

概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是2min.

(I) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;

(II) 这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间至多是4min的概率

【解析】 本题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率的基础知识, 考查运用概率知识解决实际问题的能力.

(I) 设这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件A, 因为事件A等于事件“这名学生在第一和第二个路口没有遇到红灯, 在第三个路口遇到红灯”, 所以事件A的

$$P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

概率为

(II) 设这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间至多是4min为事件B, 这名学生在上学路上遇到 k 次红灯的事件 $B_k (k = 0, 1, 2)$.

$$P(B_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

则由题意, 得

$$P(B_1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}, P(B_2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

由于事件B等价于“这名学生在上学路上至多遇到两次红灯”,

$$\therefore \text{事件B的概率为 } P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = \frac{8}{9}$$

18. (本小题共14分)

设函数 $f(x) = x^3 - 3ax + b (a \neq 0)$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处与直线 $y = 8$ 相切, 求 a, b 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

【解析】 本题主要考查利用导数研究函数的单调性和极值、解不等式等基础知识, 考查综合分析和解决问题的能力.

$$(I) f'(x) = 3x^2 - 3a,$$

\therefore 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处与直线 $y = 8$ 相切,

$$\therefore \begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4-a) = 0 \\ 8-6a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4, \\ b=24. \end{cases}$$

$$(II) \therefore f'(x) = 3(x^2 - a) (a \neq 0),$$

当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 没有极值点.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$,

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\sqrt{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

\therefore 此时 $x = -\sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $x = \sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

19. (本小题共14分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求双曲线C的方程;

(II) 已知直线 $x - y + m = 0$ 与双曲线C交于不同的两点A, B, 且线段AB的中点在圆

$x^2 + y^2 = 5$ 上, 求m的值

【解析】 本题主要考查双曲线的标准方程、圆的切线方程等基础知识, 考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法, 考查推理、运算能力.

(I) 由题意, 得
$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{c}{a} = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 } a=1, c=\sqrt{3},$$

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2, \therefore$ 所求双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(II) 设 A, B 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

由
$$\begin{cases} x - y + m = 0 \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$
 得 $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ (判别式 $\Delta > 0$),

$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = m, y_0 = x_0 + m = 2m,$

\therefore 点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上,

$\therefore m^2 + (2m)^2 = 5, \therefore m = \pm 1.$

20. (本小题共13分)

设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q (n \in N^*, P > 0)$. 数列 $\{b_n\}$ 定义如下: 对于正整数 m , b_m 是使得不等式 $a_n \geq m$ 成立的所有 n 中的最小值.

(I) 若 $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$, 求 b_3 ;

(II) 若 $p = 2, q = -1$, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项和公式;

(III) 是否存在 p 和 q , 使得 $b_m = 3m + 2 (m \in N^*)$? 如果存在, 求 p 和 q 的取值范围; 如果不存在, 请说明理由.

【解析】 本题主要考查数列的概念、数列的基本性质, 考查运算能力、推理论证能力、分类讨论等数学思想方法. 本题是数列与不等式综合的较难层次题.

(I) 由题意, 得 $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{3},$

解 $\frac{1}{2}n - \frac{1}{3} \geq 3, \text{ 得 } n \geq \frac{20}{3} \dots$

$\therefore \frac{1}{2}n - \frac{1}{3} \geq 3$ 成立的所有 n 中的最小正整数为 7 , 即 $b_3 = 7.$

(II) 由题意, 得 $a_n = 2n - 1$,

对于正整数 m , 由 $a_n \geq m$, 得 $n \geq \frac{m+1}{2}$.

根据 b_m 的定义可知

当 $m = 2k - 1$ 时, $b_m = k (k \in N^*)$;

当 $m = 2k$ 时, $b_m = k + 1 (k \in N^*)$.

$$\begin{aligned} \therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_{2m} &= (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2m-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2m}) \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + [2 + 3 + 4 + \cdots + (m+1)] \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} = m^2 + 2m \end{aligned}$$

(III) 假设存在 p 和 q 满足条件, 由不等式 $pn + q \geq m$ 及 $p > 0$ 得 $n \geq \frac{m-q}{p}$.

$\therefore b_m = 3m + 2 (m \in N^*)$, 根据 b_m 的定义可知, 对于任意的正整数 m 都有

$$3m + 1 < \frac{m-q}{p} \leq 3m + 2,$$

即 $-2p - q \leq (3p - 1)m < -p - q$ 对任意的正整数 m 都成立.

当 $3p - 1 > 0$ (或 $3p - 1 < 0$) 时, 得 $m < -\frac{p+q}{3p-1}$ (或 $m \leq -\frac{2p+q}{3p-1}$), 这与上述结论矛盾!

当 $3p - 1 = 0$, 即 $p = \frac{1}{3}$ 时, 得 $-\frac{2}{3} - q \leq 0 < -\frac{1}{3} - q$,

解得 $-\frac{2}{3} \leq q < -\frac{1}{3}$. (经检验符合题意)

\therefore 存在 p 和 q , 使得 $b_m = 3m + 2 (m \in N^*)$; p 和 q 的取值范围分别是 $p = \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} \leq q < -\frac{1}{3}$.