2006年山西高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则（　　）

A. $M\cap N=\varnothing$　B. $M\cap N=M$　C. $M\cup N=M$　D. $M\cup N=R$

2.（5分）已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则（　　）

A. $f(2x)=e^{2x}(x\in R)$　B. $f(2x)=\ln2\cdot\ln x\ (x>0)$

C. $f(2x)=2e^x(x\in R)$　D. $f(2x)=\ln x+\ln2\ (x>0)$

3.（5分）双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的2倍，则 $m=$（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　B. -4　C. 4　D. $\frac{1}{4}$

4.（5分）如果复数 $(m^2+i)(1+mi)$ 是实数，则实数 $m=$（　　）

A. 1　B. -1　C. $\sqrt{2}$　D. $-\sqrt{2}$

5.（5分）函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为（　　）

A. $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$，$k\in Z$　B. $(k\pi,(k+1)\pi)$，$k\in Z$

C. $(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$　D. $(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4})$，$k\in Z$

6.（5分）△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，若a、b、c成等比数列，且 $c=2a$，则 $\cos B=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7.（5分）已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为4，体积为16，则这个球的表面积是（　　）

A. 16π　B. 20π　C. 24π　D. 32π

8.（5分）抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{8}{5}$　D. 3

9.（5分）设平面向量 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$ 的和 $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}=0$．如果向量 $\vec{b_1}$、$\vec{b_2}$、$\vec{b_3}$，满足 $|\vec{b_i}|=2|\vec{a_i}|$，且 $\vec{a_i}$ 顺时针旋转30°后与 $\vec{b_i}$ 同向，其中 $i=1,2,3$，则（　　）

A. $-\vec{b_1}+\vec{b_2}+\vec{b_3}=0$　B. $\vec{b_1}-\vec{b_2}+\vec{b_3}=0$　C. $\vec{b_1}+\vec{b_2}-\vec{b_3}=0$　D. $\vec{b_1}+\vec{b_2}+\vec{b_3}=0$

10.（5分）设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$（　　）

A．120　B．105　C．90　 D．75

11．（5 分）用长度分别为 2、3、4、5、6（单位：cm）的 5 根细木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），能够得到的三角形的最大面积为（　　）

A．$8\sqrt{5}\mathrm{cm}^2$ B．$6\sqrt{10}\mathrm{cm}^2$　C．$3\sqrt{55}\mathrm{cm}^2$　D．$20\mathrm{cm}^2$

12．（5 分）设集合 I={1，2，3，4，5}．选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有（　　）

A．50 种 B．49 种 C．48 种 D．47 种

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$，则侧面与底面所成的二面角等于____°．

14．（4 分）设 z=2y－x，式中变量 x、y 满足下列条件 $\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\3x+2y\leqslant 23\\y\geqslant 1\end{cases}$，则 z 的最大值为____．

15．（4 分）安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日．不同的安排方法共有 ____种（用数字作答）．

16．（4 分）设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\phi)(0<\phi<\pi)$．若 f（x）+f′（x）是奇函数，则 φ=____．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）ABC 的三个内角为 A、B、C，求当 A 为何值时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$取得最大值，并求出这个最大值．

18．（12 分）A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验．每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效．若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组．设每只小白鼠服用 A 有效的概率为$\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为$\frac{1}{2}$．

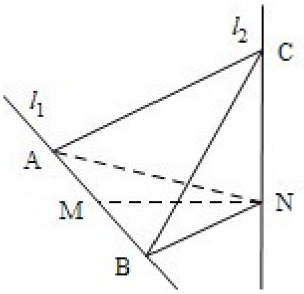
（Ⅰ）求一个试验组为甲类组的概率；

（Ⅱ）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期望．

19.（12 分）如图，l_1、l_2是互相垂直的异面直线，MN 是它们的公垂线段．点 A、B 在 l_1上,C 在 l_2上，AM=MB=MN.

（Ⅰ）证明 AC⊥NB；

（Ⅱ）若∠ACB=60°，求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



20.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以$F_1(0,\ -\sqrt{3})$和$F_2(0,\ \sqrt{3})$为焦点、离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆，设椭圆在第一象限的部分为曲线 C，动点 P 在 C 上，C 在点 P 处的切线与 x、y 轴的交点分别为 A、B，且向量$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求：

（Ⅰ）点 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）$|\overrightarrow{OM}|$的最小值.

21.（14 分）已知函数$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$.

（Ⅰ）设 a＞0，讨论 y=f（x）的单调性；

（Ⅱ）若对任意 x∈（0，1）恒有 f（x）＞1，求 a 的取值范围.

22.（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项的和$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}+\frac{2}{3}$，n=1，2，3，…

（Ⅰ）求首项a_1与通项a_n；

（Ⅱ）设$T_n=\frac{2^n}{S_n}$，n=1，2，3，…，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$.

2006 年山西高考理科数学真题参考答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1.（5 分）设集合 M={x|x^2 - x＜0}，N={x||x|＜2}，则（　　）

A．M∩N=∅　B．M∩N=M　C．M∪N=M　D．M∪N=R

【分析】M、N 分别是二次不等式和绝对值不等式的解集，分别解出再求交集合并集.

【解答】解：集合 $M=\{x|x^2-x<0\}=\{x|0<x<1\}$，$N=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$，∴$M\cap N=M$，

故选：B.

2.（5 分）已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则（　　）

A. $f(2x)=e^{2x}$（$x\in R$）　B. $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x$（$x>0$）

C. $f(2x)=2e^x$（$x\in R$）　D. $f(2x)=\ln x+\ln 2$（$x>0$）

【分析】本题考查反函数的概念、互为反函数的函数图象的关系、求反函数的方法等相关知识和方法.

根据函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称可知 $f(x)$ 是 $y=e^x$ 的反函数，由此可得 $f(x)$ 的解析式，进而获得 $f(2x)$.

【解答】解：函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

所以 $f(x)$ 是 $y=e^x$ 的反函数，即 $f(x)=\ln x$，

∴$f(2x)=\ln 2x=\ln x+\ln 2$（$x>0$），

选 D.

3.（5 分）双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则 $m=$（　　）

A. $-\frac{1}{4}$ B. -4 C. 4　D. $\frac{1}{4}$

【分析】由双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，可求出该双曲线的方程，从而求出 m 的值.

【解答】解：双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，

∴$m<0$，且双曲线方程为 $-\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

∴$m=-\frac{1}{4}$，

故选：A.

4.（5 分）如果复数 $(m^2+i)(1+mi)$ 是实数，则实数 $m=$（　　）

A. 1　B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

【分析】注意到复数 $a+bi$（$a\in R$，$b\in R$）为实数的充要条件是 $b=0$

【解答】解：复数 $(m^2+i)(1+mi)=(m^2-m)+(1+m^3)i$ 是实数，

∴$1+m^3=0$，$m=-1$，

选 B.

5.（5 分）函数$f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$的单调增区间为（　　）

A. $(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$，$k\in Z$ B.（kπ，（k+1）π），k∈Z

C. $(k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$　D. $(k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4})$，$k\in Z$

【分析】先利用正切函数的单调性求出函数单调增时 $x+\frac{\pi}{4}$的范围 i，进而求得 x 的范围.

【解答】解：函数$f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$的单调增区间满足$k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，

∴单调增区间为$(k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$，

故选 C

6.（5 分）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 a、b、c 成等比数列，且 c=2a，则 cosB=（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】根据等比数列的性质，可得 $b=\sqrt{2}a$，将 c、b 与 a 的关系结合余弦定理分析可得答案.

【解答】解：△ABC 中，a、b、c 成等比数列，则 $b^2=ac$，

由 c=2a，则 $b=\sqrt{2}a$，

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-2a^2}{4a^2}=\frac{3}{4}$，

故选 B.

7.（5 分）已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4，体积为 16，则这个球的表面积是（　　）

A. 16π　B. 20π　C. 24π　D. 32π

【分析】先求正四棱柱的底面边长，然后求其对角线，就是球的直径，再求其表面积.

【解答】解：正四棱柱高为 4，体积为 16，底面积为 4，正方形边长为 2，

正四棱柱的对角线长即球的直径为 $2\sqrt{6}$，

∴球的半径为$\sqrt{6}$，球的表面积是 24π，

故选 C.

8.（5 分）抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{8}{5}$　D. 3

【分析】设抛物线 $y=-x^2$ 上一点为（m，$-m^2$），该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离为 $\frac{|4m-3m^2-8|}{5}$，由此能够得到所求距离的最小值.

【解答】解：设抛物线 $y=-x^2$ 上一点为（m，$-m^2$），

该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离为$\frac{|4m-3m^2-8|}{5}$，

分析可得，当 $m=\frac{2}{3}$时，取得最小值为$\frac{4}{3}$，

故选 B.

9.（5 分）设平面向量$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$的和$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}=0$．如果向量$\overrightarrow{b_1}$、$\overrightarrow{b_2}$、$\overrightarrow{b_3}$，满足$|\overrightarrow{b_i}|=2|\overrightarrow{a_i}|$，且$\overrightarrow{a_i}$顺时针旋转 30° 后与$\overrightarrow{b_i}$同向，其中 i=1，2，3，则（　　）

A. $-\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=0$　B. $\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=0$　C. $\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}-\overrightarrow{b_3}=0$　D. $\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=0$

【分析】三个向量的和为零向量，在这三个向量前都乘以相同的系数，我们可以把系数提出公因式，括号中各项的和仍是题目已知中和为零向量的三个向量，当三个向量都按相同的方向和角度旋转时，相对关系不变.

【解答】解：向量$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$的和$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}=0$，

向量$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$顺时针旋转 30° 后与$\overrightarrow{b_1}$、$\overrightarrow{b_2}$、$\overrightarrow{b_3}$同向，

且$|\overrightarrow{b_i}|=2|\overrightarrow{a_i}|$，

∴$\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=0$，

故选 D.

10.（5 分）设$\{a_n\}$是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$（　　）

A．120　B．105　C．90　 D．75

【分析】先由等差数列的性质求得 a_2，再由 $a_1a_2a_3=80$ 求得 d 即可．

【解答】解：$\{a_n\}$是公差为正数的等差数列，

∵$a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，

∴$a_2=5$，

∴$a_1a_3=(5-d)(5+d)=16$，

∴$d=3$，$a_{12}=a_2+10d=35$

∴$a_{11}+a_{12}+a_{13}=105$

故选 B．

11．（5 分）用长度分别为 2、3、4、5、6（单位：cm）的 5 根细木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），能够得到的三角形的最大面积为（　　）

A．$8\sqrt{5}cm^2$ B．$6\sqrt{10}cm^2$　 C．$3\sqrt{55}cm^2$　 D．20cm²

【分析】设三角形的三边分别为 a，b，c，令 $p=\frac{a+b+c}{2}$，则 p=10．海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant\sqrt{10[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3}]^3}=\frac{100\sqrt{3}}{9}$故排除 C，D，

由于等号成立的条件为 10﹣a=10﹣b=10﹣c，故“=”不成立，推测当三边长相等时面积最大，故考虑当 a，b，c 三边长最接近时面积最大，进而得到答案．

【解答】解：设三角形的三边分别为 a，b，c，

令 $p=\frac{a+b+c}{2}$，则 p=10．由海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

知 $S=\sqrt{10(10-a)(10-b)(10-c)}\leqslant\sqrt{10[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3}]^3}=\frac{100\sqrt{3}}{9}<20<3\sqrt{55}$

由于等号成立的条件为 10﹣a=10﹣b=10﹣c，故“=”不成立，

∴$S<20<3\sqrt{55}$.

排除 C，D．

由以上不等式推测，当三边长相等时面积最大，故考虑当 a，b，c 三边长最接近时面积最大，此时三边长为 7，7，6，用 2、5 连接，3、4 连接各为一边，第三边长为 7 组成三角形，此

三角形面积最大，面积为$6\sqrt{10}cm^2$，

故选 B.

12．（5 分）设集合 I={1，2，3，4，5}．选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有（　　）

A．50 种 B．49 种 C．48 种 D．47 种

【分析】解法一，根据题意，按 A、B 的元素数目不同，分 9 种情况讨论，分别计算其选法种数，进而相加可得答案；

解法二，根据题意，B 中最小的数大于 A 中最大的数，则集合 A、B 中没有相同的元素，且都不是空集，按 A、B 中元素数目这和的情况，分 4 种情况讨论，分别计算其选法种数，进而相加可得答案.

【解答】解：

解法一，若集合 A、B 中分别有一个元素，则选法种数有 $C_5^2=10$ 种；

若集合 A 中有一个元素，集合 B 中有两个元素，则选法种数有 $C_5^3=10$ 种；

若集合 A 中有一个元素，集合 B 中有三个元素，则选法种数有 $C_5^4=5$ 种；

若集合 A 中有一个元素，集合 B 中有四个元素，则选法种数有 $C_5^5=1$ 种；

若集合 A 中有两个元素，集合 B 中有一个元素，则选法种数有 $C_5^3=10$ 种；

若集合 A 中有两个元素，集合 B 中有两个元素，则选法种数有 $C_5^4=5$ 种；

若集合 A 中有两个元素，集合 B 中有三个元素，则选法种数有 $C_5^5=1$ 种；

若集合 A 中有三个元素，集合 B 中有一个元素，则选法种数有 $C_5^4=5$ 种；

若集合 A 中有三个元素，集合 B 中有两个元素，则选法种数有 $C_5^5=1$ 种；

若集合 A 中有四个元素，集合 B 中有一个元素，则选法种数有 $C_5^5=1$ 种；

总计有 49 种，选 B.

解法二：集合 A、B 中没有相同的元素，且都不是空集，

从 5 个元素中选出 2 个元素，有 $C_5^2=10$ 种选法，小的给 A 集合，大的给 B 集合；

从 5 个元素中选出 3 个元素，有 $C_5^3=10$ 种选法，再分成 1、2 两组，较小元素的一组给 A 集合，较大元素的一组的给 B 集合，共有 2×10=20 种方法；

从 5 个元素中选出 4 个元素，有 $C_5^4=5$ 种选法，再分成 1、3；2、2；3、1 两组，较小元素的一组给 A 集合，较大元素的一组的给 B 集合，共有 3×5=15 种方法；

从 5 个元素中选出 5 个元素，有 $C_5^5=1$ 种选法，再分成 1、4；2、3；3、2；4、1 两组，较小元素的一组给 A 集合，较大元素的一组的给 B 集合，共有 $4\times1=4$ 种方法；

总计为 10+20+15+4=49 种方法．选 B．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$，则侧面与底面所成的二面角等于__60__°．

【分析】先根据底面对角线长求出边长，从而求出底面积，再由体积求出正四棱锥的高，求出侧面与底面所成的二面角的平面角的正切值即可．

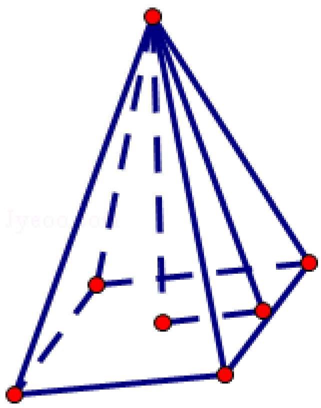
【解答】解：正四棱锥的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$，底面边长为 $2\sqrt{3}$，底面积为 12，

所以正四棱锥的高为 3，

则侧面与底面所成的二面角的正切 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，

∴二面角等于 60°，

故答案为 60°



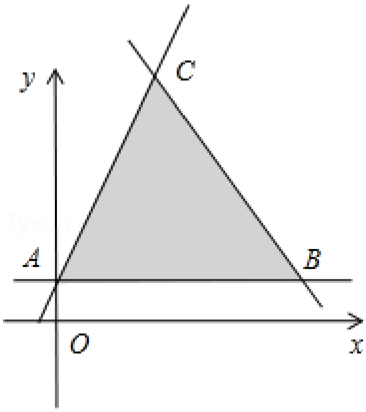
14．（4 分）设 $z=2y-x$，式中变量 x、y 满足下列条件：$\begin{cases}2x-y\geqslant-1\\3x+2y\leqslant23\\y\geqslant1\end{cases}$，则 z 的最大值为__11__．

【分析】先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值，$z=2y-x$ 表示直线在 y 轴上的截距，只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可．

【解答】解：$\begin{cases}2x-y\geqslant-1\\3x+2y\leqslant23\\y\geqslant1\end{cases}$，在坐标系中画出图象，

三条线的交点分别是 A（0，1），B（7，1），C（3，7），

在△ABC 中满足 $z=2y-x$ 的最大值是点 C，代入得最大值等于 11．



故填：11．

15．（4 分）安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日．不同的安排方法共有 __2400__ 种（用数字作答）．

【分析】本题是一个分步计数问题，先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 A_5^2 种排法，其余 5 人再进行排列，有 A_5^5 种排法，根据分步计数原理得到结果．

【解答】解：由题意知本题是一个分步计数问题，

首先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 $A_5^2=20$ 种排法，

其余 5 人再进行排列，有 $A_5^5=120$ 种排法，

∴根据分步计数原理知共有 20×120=2400 种安排方法．

故答案为：2400

16．（4 分）设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\phi)(0<\phi<\pi)$．若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数，则 $\phi=$__$\frac{\pi}{6}$__．

【分析】对函数求导结合两角差的正弦公式，代入整理可得，$f(x)+f'(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}x-\phi)$，根据奇函数的性质可得 $x=0$ 时函数值为 0，代入可求 ϕ 的值

【解答】解：$f'(x)=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\phi)$，

则 $f(x)+f'(x)=\cos(\sqrt{3}x+\phi)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\phi)=2\sin(\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}x-\phi)$，为奇函数，

令 g（x）=f（x）+f′（x），即函数 g（x）为奇函数，

g（0）=0⇒2sin（$\frac{\pi}{6}$－φ）=0，

∵0＜φ＜π，

∴φ=$\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{\pi}{6}$.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）ABC 的三个内角为 A、B、C，求当 A 为何值时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$取得最大值，并求出这个最大值.

【分析】利用三角形中内角和为 π，将三角函数变成只含角 A，再利用三角函数的二倍角公式将函数化为只含角$\frac{A}{2}$，利用二次函数的最值求出最大值

【解答】解：由 A+B+C=π，得$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$,

所以有 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$.

$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}=\cos A+2\sin\frac{A}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}$

$=-2(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$

当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$取得最大值为$\frac{3}{2}$

故最大值为$\frac{3}{2}$

18.（12 分）A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验．每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效．若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组．设每只小白鼠服用 A 有效的概率为$\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求一个试验组为甲类组的概率；

（Ⅱ）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期望.

【分析】(1) 由题意知本题是一个独立重复试验，根据所给的两种药物对小白鼠有效的概率，

计算出小白鼠有效的只数的概率，对两种药物有效的小白鼠进行比较，得到甲类组的概率.

（2）由题意知本试验是一个甲类组的概率不变，实验的条件不变，可以看做是一个独立重复试验，所以变量服从二项分布，根据二项分布的性质写出分布列和期望.

【解答】解：（1）设 A_i 表示事件“一个试验组中，服用 A 有效的小鼠有 i 只“，i=0，1，2，

B_i 表示事件“一个试验组中，服用 B 有效的小鼠有 i 只“，i=0，1，2，

依题意有：$P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$．$P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所求概率为：

$P=P(B_0\bullet A_1)+P(B_0\bullet A_2)+P(B_1\bullet A_2)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

（Ⅱ）ξ 的可能值为 0，1，2，3 且 $\xi\sim B(3,\frac{4}{9})$.

$P(\xi=0)=(\frac{5}{9})^3=\frac{125}{729}$，

$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{4}{9}\times(\frac{5}{9})^2=\frac{100}{243}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times(\frac{4}{9})^2\times\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$，

$P(\xi=3)=(\frac{4}{9})^3=\frac{64}{729}$

∴ξ 的分布列为：

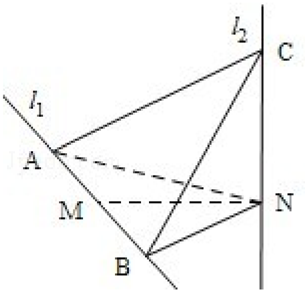
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

∴数学期望 $E\xi=3\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

19.（12 分）如图，l_1、l_2是互相垂直的异面直线，MN 是它们的公垂线段．点 A、B 在 l_1上，C 在 l_2上，AM=MB=MN.

（Ⅰ）证明 AC⊥NB；

（Ⅱ）若∠ACB=60°，求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



【分析】(1) 欲证 AC⊥NB，可先证 BN⊥面 ACN，根据线面垂直的判定定理只需证 AN⊥BN，CN⊥BN 即可；

(2) 易证 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心，连接 BH，∠NBH 为 NB 与平面 ABC 所成的角，在 Rt△NHB 中求出此角即可.

【解答】解：(Ⅰ) 由已知 l_2⊥MN，l_2⊥l_1，MN∩l_1=M，可得 l_2⊥平面 ABN.

由已知 MN⊥l_1，AM=MB=MN，

可知 AN=NB 且 AN⊥NB.

又 AN 为 AC 在平面 ABN 内的射影.

∴AC⊥NB

(Ⅱ) ∵AM=MB=MN，MN 是它们的公垂线段，

由中垂线的性质可得 AN=BN，

∴Rt△CAN≌Rt△CNB，

∴AC=BC，又已知∠ACB=60°，

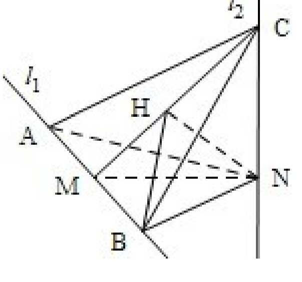
因此△ABC 为正三角形.

∵Rt△ANB≌Rt△CNB，

∴NC=NA=NB，因此 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心，

连接 BH，∠NBH 为 NB 与平面 ABC 所成的角.

在 Rt△NHB 中，$\cos\angle NBH=\frac{HB}{NB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



20．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以 $F_1(0,\ -\sqrt{3})$和 $F_2(0,\ \sqrt{3})$为焦点、离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆，设椭圆在第一象限的部分为曲线 C，动点 P 在 C 上，C 在点 P 处的切线与 x、y 轴的交点分别为 A、B，且向量$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$．求：

（Ⅰ）点 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）$|\overrightarrow{OM}|$的最小值．

【分析】(1）利用相关点法求轨迹方程，设 P（x_0，y_0），M（x，y），利用点 M 的坐标来表示点 P 的坐标，最后根据 x_0，y_0满足 C 的方程即可求得；

（2）先将$|\overrightarrow{OM}|$用含点 M 的坐标的函数来表示，再利用基本不等式求此函数的最小值即可．

【解答】解：(Ⅰ）椭圆方程可写为：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 式中 a＞b＞0，且$\begin{cases}a^2-b^2=3\\ \frac{\sqrt{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 得 $a^2=4$，$b^2=1$，

所以曲线 C 的方程为：$x^2+\frac{y^2}{4}=1$（x＞0，y＞0）．$y=2\sqrt{1-x^2}$（0＜x＜1）$y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

设 P（x_0，y_0），因 P 在 C 上，有 0＜x_0＜1，$y_0=2\sqrt{1-x_0^2}$，$y'|_{x=x_0}=-\frac{4x_0}{y_0}$，得切线 AB 的方程为：

$y=-\frac{4x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$.

设 A（x，0）和 B（0，y），由切线方程得 $x=\frac{1}{x_0}$，$y=\frac{4}{y_0}$.

由$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$得 M 的坐标为（x，y），由 x_0，y_0满足 C 的方程，得点 M 的轨迹方程为：

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1$（x＞1，y＞2）

（Ⅱ）$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2$，$y^2=\frac{4}{1-\frac{1}{x^2}}=4+\frac{4}{x^2-1}$，

$\therefore|\overrightarrow{OM}|^2=x^2-1+\dfrac{4}{x^2-1}+5\geqslant4+5=9$.

且当 $x^2-1=\dfrac{4}{x^2-1}$，即 $x=\sqrt{3}>1$ 时，上式取等号.

故 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值为 3.

21.（14 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}$.

（Ⅰ）设 $a>0$，讨论 $y=f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$，求 a 的取值范围.

【分析】（Ⅰ）根据分母不为 0 得到 f（x）的定义域，求出 f'（x），利用 a 的范围得到导函数的正负讨论函数的增减性即可得到 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$ 即要讨论当 $0<a\leqslant2$ 时，当 $a>2$ 时，当 $a\leqslant0$ 时三种情况讨论得到 a 的取值范围.

【解答】解：（Ⅰ）f（x）的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 对 f（x）求导数得 $f'(x)=\dfrac{ax^2+2-a}{(1-x)^2}e^{-ax}$.

（ⅰ）当 a=2 时，$f'(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}e^{-2x}$，f'（x）在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 均大于 0，

所以 f（x）在 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$ 为增函数.

（ⅱ）当 $0<a<2$ 时，$f'(x)>0$，f（x）在 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$ 为增函数.

（ⅲ）当 $a>2$ 时，$0<\dfrac{a-2}{a}<1$，令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$，$x_2=\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$.

当 x 变化时，f′（x）和 f（x）的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}}$	$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}$	$(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1$	$(1,+\infty)$
f'	+	-	+	+

(x)				
f(x)	↑	↓	↑	↑

f（x）在（-∞，$-\sqrt{\frac{a-2}{a}}$），（$\sqrt{\frac{a-2}{a}}$，1），（1，+∞）为增函数，f（x）在（$-\sqrt{\frac{a-2}{a}}$，$\sqrt{\frac{a-2}{a}}$）为减函数.

（Ⅱ）（ⅰ）当0＜a≤2时，由（Ⅰ）知：对任意x∈（0，1）恒有f（x）＞f（0）=1.

（ⅱ）当a＞2时，取$x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}}$∈（0，1），则由（Ⅰ）知f（$x_0$）＜f（0）=1

（ⅲ）当a≤0时，对任意x∈（0，1），恒有$\frac{1+x}{1-x}$＞1且e^{-ax}≥1，得f（x）=$\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$≥$\frac{1+x}{1-x}$＞1.

综上当且仅当a∈（-∞，2]时，对任意x∈（0，1）恒有f（x）＞1.

22.（12分）设数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}$，n=1，2，3，…

（Ⅰ）求首项a_1与通项a_n；

（Ⅱ）设$T_n=\frac{2^n}{S_n}$，n=1，2，3，…，证明：$\sum_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$.

【分析】对于（Ⅰ）首先由数列$\{a_n\}$的前n项的和求首项a_1与通项a_n，可先求出S_{n-1}，然后有$a_n=S_n-S_{n-1}$，公比为4的等比数列，从而求解；

对于（Ⅱ）已知$T_n=\frac{2^n}{S_n}$，n=1，2，3，…，将$a_n=4^n-2^n$代入$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}$，n=1，2，3，得$S_n=\frac{4}{3}\times(4^n-2^n)-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)$

然后再利用求和公式进行求解.

【解答】解：（Ⅰ）由$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}$，n=1，2，3，①得$a_1=S_1=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3}\times4+\frac{2}{3}$

所以$a_1=2$.

再由①有$S_{n-1}=\frac{4}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}\times2^n+\frac{2}{3}$，n=2，3，4，

将①和②相减得：$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{4}{3}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{3}\times(2^{n+1}-2^n)$，n=2，3，

整理得：$a_n+2^n=4(a_{n-1}+2^{n-1})$，n=2，3，

因而数列$\{a_n+2^n\}$是首项为$a_1+2=4$，公比为4的等比数列，即：$a_n+2^n=4\times4^{n-1}=4^n$，n=1，2，3，

因而$a_n=4^n-2^n$，n=1，2，3，

（Ⅱ）将$a_n=4^n-2^n$代入①得$S_n=\frac{4}{3}\times(4^n-2^n)-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)$

$=\frac{2}{3}\times(2^{n+1}-1)(2^n-1)$

$T_n=\frac{2^n}{S_n}=\frac{3}{2}\times\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

所以，$\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i-1}-\frac{1}{2^{i+1}-1}\right)=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{3}{2}$