

2015年上海市文科试题

一. 填空题(本大题共14小题, 满分56分) 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律零分)

1. 函数 $f(x) = 1 - 3\sin^2 x$ 的最小正周期为_____.

【答案】 π

【解析】 因为 $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, 所以 $f(x) = 1 - \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

【考点定位】 函数的周期, 二倍角的余弦公式.

2. 设全集 $U = \mathbb{R}$. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid 2 \leq x < 3\}$, 则 $A \cap (C_U B) =$ _____.

【答案】 $\{1, 4\}$

【解析】 因为 $B = \{x \mid 2 \leq x < 3\}$, 所以 $C_U B = \{x \mid x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 又因为 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap (C_U B) = \{1, 4\}$. 学科网

【考点定位】 集合的运算.

3. 若复数 z 满足 $3z + \bar{z} = 1 + i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $z =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$

【解析】 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 因为 $3z + \bar{z} = 1 + i$,

所以 $3(a + bi) + a - bi = 1 + i$, 即 $4a + 2bi = 1 + i$, 所以 $\begin{cases} 4a = 1 \\ 2b = 1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$,

所以 $z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$.

【考点定位】 复数的概念, 复数的运算.

4. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ 的反函数, 则 $f^{-1}(2) =$ _____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】因为 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ 的反函数， $\frac{x}{2x+1} = 2$ ，解得 $x = -\frac{2}{3}$ ，所以 $f^{-1}(2) = -\frac{2}{3}$.

【考点定位】反函数，函数的值.

5. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ 解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ ，则 $c_1 - c_2 =$ _____.

【答案】16

【解析】由题意， $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 2x+3y=c_1 \\ y=c_2 \end{cases}$ 的解，所以 $\begin{cases} c_1=21 \\ c_2=5 \end{cases}$ ，所以

$$c_1 - c_2 = 21 - 5 = 16.$$

【考点定位】增广矩阵，线性方程组的解法.

6. 若正三棱柱的所有棱长均为 a ，且其体积为 $16\sqrt{3}$ ，则 $a =$ _____.

【答案】4

【解析】依题意， $\frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 16\sqrt{3}$ ，解得 $a = 4$.

【考点定位】等边三角形的性质，正三棱柱的性质.

7. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为1，则 $p =$ _____.

【答案】2

【解析】依题意，点 Q 为坐标原点，所以 $\frac{p}{2} = 1$ ，即 $p = 2$.

【考点定位】抛物线的性质，最值.

8. 方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为_____.

【答案】2

【解析】依题意 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(4 \cdot 3^{x-1} - 8)$ ，所以 $9^{x-1} - 5 = 4 \cdot 3^{x-1} - 8$ ，

令 $3^{x-1} = t (t > 0)$ ，所以 $t^2 - 4t + 3 = 0$ ，解得 $t = 1$ 或 $t = 3$ ，

当 $t = 1$ 时， $3^{x-1} = 1$ ，所以 $x = 1$ ，而 $9^{1-1} - 5 < 0$ ，所以 $x = 1$ 不合题意，舍去；

当 $t = 3$ 时， $3^{x-1} = 3$ ，所以 $x = 2$ ， $9^{2-1} - 5 = 4 > 0$ ， $3^{2-1} - 2 = 1 > 0$ ，所以 $x = 2$ 满足条件，

所以 $x = 2$ 是原方程的解。

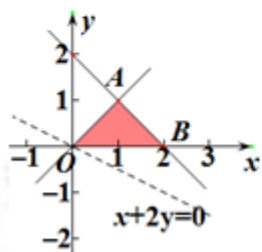
【考点定位】对数方程。

9. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = x + 2y$ 的最大值为_____。

【答案】3

【解析】不等式组表示的平面区域如图 $\triangle OAB$ （包括边界），联立方程组 $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ，即 $A(1, 1)$ ，

平移直线 $x + 2y = 0$ 当经过点 A 时，目标函数 $z = x + 2y$ 的取得最大值，即 $z_{\max} = 1 + 2 = 3$ 。



【考点定位】不等式组表示的平面区域，简单的线性规划。

10.

在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为_____。（结果用数值表示）。

【答案】120

【解析】①男教师选 1 人，女教师教师选 4 人，有 $C_3^1 C_6^4 = 45$ 中不同的选法；

②男教师选 2 人，女教师教师选 3 人，有 $C_3^2 C_6^3 = 60$ 中不同的选法；

③男教师选 3 人，女教师教师选 2 人，有 $C_3^3 C_6^2 = 15$ 中不同的选法；

由分累计数原理得不同的选取方式的种数为 $45 + 60 + 15 = 120$ 种。

【考点定位】组合，分类计数原理。

11. 在 $(2x + \frac{1}{x^2})^6$ 的二项式中，常数项等于_____（结果用数值表示）。

【答案】240

【解析】由 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (2x)^{6-r} \cdot (\frac{1}{x^2})^r = C_6^r \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-3r}$ ，令 $6-3r=0$ ，所以 $r=2$ ，所以常数项为 $C_6^2 \cdot 2^4 = 240$ 。

【考点定位】二项式定理。

12. 已知双曲线 C_1 、 C_2 的顶点重合， C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，若 C_2 的一条渐近线的斜率是 C_1 的一条渐近线的斜率的 2 倍，则 C_2 的方程为_____。

【答案】 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

【解析】因为 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，所以 C_1 的一条渐近线的斜率 $k_1 = \frac{1}{2}$ ，所以 C_2 的一条渐近线的斜率

$k_2 = 1$ ，因为双曲线 C_1 、 C_2 的顶点重合，即焦点都在 x 轴上，

设 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

所以 $a = b = 2$ ，所以 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。

【考点定位】双曲线的性质，直线的斜率。

13. 已知平面向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 满足 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，且 $\{|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|\} = \{1, 2, 3\}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 的最大值是_____。

【答案】 $3+\sqrt{5}$

【解析】 因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，设 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 2)$ ， $\vec{c} = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$ ，

所以 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1 + 3 \cos \theta, 2 + 3 \sin \theta)$ ，

所以 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (1 + 3 \cos \theta)^2 + (2 + 3 \sin \theta)^2 = 14 + 6\sqrt{5} \sin(\theta + \varphi)$ ，其中 $\sin \varphi = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

所以当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时， $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 取得最大值，即 $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}$ 。

【考点定位】 平向量的模，向量垂直。

14. 已知函数 $f(x) = \sin x$ 。若存在 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ ，且

$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$ ($m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$)，则 m

的最小值为_____。

【答案】 8

【解析】 因为函数 $f(x) = \sin x$ 对任意 x_i, x_j ($i, j = 1, 2, 3, \dots, m$)，

$|f(x_i) - f(x_j)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 2$ ，

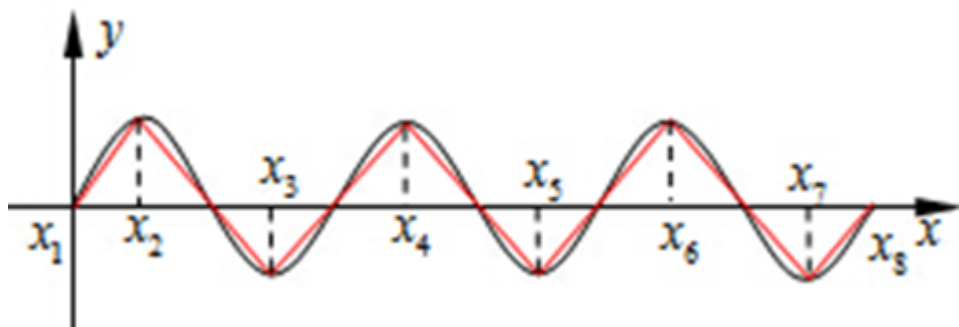
欲使 m 取得最小值，尽可能多的让 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) 取得最高点，考虑

$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ ，

$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$ ($m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$) 按下图

取值满足条件，

所以 m 的最小值为8。



【考点定位】 正弦函数的性质，最值。

二. 选择题 (本大题共4小题，满分20分) 每题有且只有一个正确答案案，考

生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律零分。

15. 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ，则“ z_1, z_2 均为实数”是“ $z_1 - z_2$ 是实数”的 ()。

- A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充要条件
D. 既非充分又非必要条件

【答案】A

【解析】设 $z_1 = a_1 + b_1i (a_1, b_1 \in \mathbf{R})$ ， $z_2 = a_2 + b_2i (a_2, b_2 \in \mathbf{R})$ ，

若 z_1, z_2 均为实数，则 $b_1 = b_2 = 0$ ，所以 $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i = a_1 - a_2$ 是实数；

若 $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$ 是实数，则 $b_1 = b_2$ ，

所以“ z_1, z_2 均为实数”是“ $z_1 - z_2$ 是实数”的充分非必要条件，选 A。

【考点定位】复数的概念，充分条件、必要条件的判定。

16. 下列不等式中，与不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ 解集相同的是 ()。

- A. $(x+8)(x^2+2x+3) < 2$
B. $x+8 < 2(x^2+2x+3)$
C. $\frac{1}{x^2+2x+3} < \frac{2}{x+8}$
D. $\frac{x^2+2x+3}{x+8} > \frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为 $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 \geq 2 > 0$ ， $x+8$ 可能是正数、负数或零，所以由

$x+8 < 2(x^2+2x+3)$ 可得 $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ ，所以不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ 解集相同的是

$x+8 < 2(x^2+2x+3)$ ，选 B。

【考点定位】同解不等式的判断。

17. 已知点

A 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 1)$ ，将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 至 OB ，则点 B 的纵坐标为 ()。

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{11}{2}$

D. $\frac{13}{2}$

【答案】D

【解析】设直线 OA 的倾斜角为 α ， $B(m, n)(m > 0, n > 0)$ ，则直线 OB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3} + \alpha$ ，因为 $A(4\sqrt{3}, 1)$ ，

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{n}{m}, \quad \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{4\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{13}{3\sqrt{3}}, \quad \text{即 } m^2 = \frac{27}{169}n^2,$$

因为 $m^2 + n^2 = (4\sqrt{3})^2 + 1^2 = 49$ ，所以 $n^2 + \frac{27}{169}n^2 = 49$ ，所以 $n = \frac{13}{2}$ 或 $n = -\frac{13}{2}$ （舍去），

所以点 B 的纵坐标为 $\frac{13}{2}$ 。

【考点定位】三角函数的定义，和角的正切公式，两点间距离公式。

18.

设 $P_n(x_n, y_n)$ 是直线 $2x - y = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限的交点，则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = (\quad).$$

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】因为 $P_n(x_n, y_n)$ 是直线 $2x - y = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限的交点

，而 $\frac{y_n - 1}{x_n - 1}$ 是经过点 $P_n(x_n, y_n)$ 与 $A(1, 1)$ 的直线的斜率，由于点 $A(1, 1)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上。

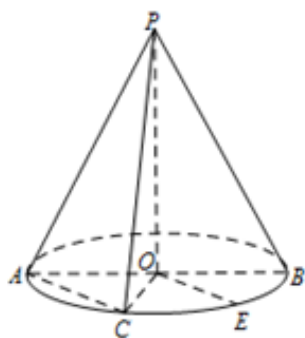
因为 $k_{OA} = 1$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = -\frac{1}{k_{OA}} = -1$ 。

【考点定位】圆的切线，极限。

三. 解答题（本大题共5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分12分）如图，圆锥的顶点为 P ，底面的一条直径为 AB ， C 为半圆弧 AB

的中点, E 为劣弧 CB 的中点. 已知 $PO=2$, $OA=1$, 求三棱锥 $P-AOC$ 的体积, 并求异面直线 PA 与 OE 所成角的大小.



【答案】 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】 因为 $PO=2$, $OA=1$,

所以三棱锥 $P-AOC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle AOC} \cdot OP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AO \times CO \times OP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$.

因为 $OE \parallel AC$, 所以异面直线 PA 与 OE 所成的角就是 PA 与 AC 的夹角.

在 $\triangle ACP$ 中, $AC = \sqrt{2}$, $AP = CP = \sqrt{5}$,

过 P 作 $PH \perp AC$, 则 $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

在 $Rt\triangle AHP$ 中, $\cos \angle PAH = \frac{AH}{AP} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以异面直线 PA 与 OE 所成角的大小 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$.

【考点定位】 圆锥的性质, 异面直线的夹角.

20. (本题满分14分) 本题共2小题, 第1小题6分, 第2小题8分.

已知函数 $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x}$, 其中 a 为实数.

(1) 根据 a 的不同取值, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 若 $a \in (1,3)$, 判断函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性, 并说明理由.

【答案】 (1) $f(x)$ 是非奇非偶函数; (2) 函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.

【解析】(1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$, 显然是奇函数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(1) = a+1$, $f(-1) = a-1$, $f(1) \neq f(-1)$ 且 $f(1) + f(-1) \neq 0$,

所以此时 $f(x)$ 是非奇非偶函数. 学科网

(2) 设 $\forall x_1 < x_2 \in [1, 2]$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left[a(x_1 + x_2) - \frac{1}{x_1 x_2} \right]$$

因为 $x_1 < x_2 \in [1, 2]$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$, $2 < x_1 + x_2 < 4$, $1 < x_1 x_2 < 4$,

$$\text{所以 } 2 < a(x_1 + x_2) < 12, \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{x_1 x_2} < 1,$$

$$\text{所以 } a(x_1 + x_2) - \frac{1}{x_1 x_2} > 0,$$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增.

【考点定位】函数的奇偶性、单调性.

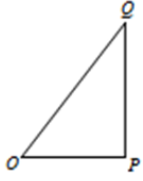
21. (本小题14分) 本题共2小题, 第1小题6分, 第2小题8分.

如图, O, P, Q 三地有直道相通, $OQ = 5$ 千米, $OP = 3$ 千米, $PQ = 4$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 O 地出发匀速前往 Q 地, 经过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 OQ , 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 OPQ , 速度为 8 千米/小时. 乙到达 Q 地后原地等待. 设 $t = t_1$ 时乙到达 P 地; $t = t_2$ 时, 乙到达 Q 地.

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1 \leq t \leq t_2$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式,

并判断 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上得最大值是否超过 3? 说明理由.



【答案】 (1) $\frac{3}{8}h$, $\frac{3\sqrt{41}}{8}$ 千米; (2) 不超过了3千米.

【解析】 (1) 根据条件知 $t_1 = \frac{3}{8}$, 设此时甲到达A点, 并连接 AP , 如图所示, 则

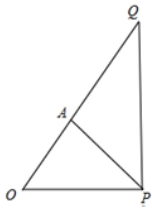
$$OA = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8},$$

所以在 $\triangle OAP$ 中,

由余弦定理得

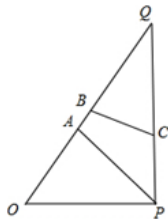
$$f(t_1) = AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cdot \cos \angle AOP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 9 - \frac{45}{4} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3\sqrt{41}}{8} \text{ (千米)}$$

).



(2) 可求得 $t_2 = \frac{7}{8}$, 设 t 小时后, 且 $\frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}$, 甲到达了B点, 乙到达了C点, 如图所示

,



所以 $BQ = 5 - 5t$, $CQ = 7 - 8t$,

所以在 $\triangle BCQ$ 中,

$$\text{由余弦定理 } f(t) = BC = \sqrt{(5-5t)^2 + (7-8t)^2 - 2(5-5t)(7-8t) \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{25t^2 - 42t + 18},$$

所以 $f(t) = \sqrt{25t^2 - 42t + 18}$, $\frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}$,

设 $g(t) = 25t^2 - 42t + 18$, $\frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}$,

因为函数 $g(t)$ 的对称轴为 $t = \frac{21}{25} \in [\frac{3}{8}, \frac{7}{8}]$, 且 $g(\frac{3}{8}) = \frac{369}{64}$, $g(\frac{7}{8}) = \frac{25}{64}$,

所以 $g(t)$ 得最大值为 $\frac{369}{64}$, 此时 $f(t)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{41}}{8} < 3$,

所以 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上得最大值不超过3.

【考点定位】 余弦定理的实际运用, 函数的值域.

22. (本题满分14分) 本题共3个小题, 第1小题4分, 第2小题6分, 第3小题6分.

已知椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别于椭圆交于 A 、 B 和 C 、 D , 设 $\triangle AOC$ 的面积为 S .

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 用 A 、 C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明

$$S = 2 |x_1 y_2 - x_2 y_1|;$$

(2) 设 $l_1: y = kx$, $C(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $S = \frac{1}{3}$, 求 k 的值;

(3) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 m , 求 m 的值, 使得无论 l_1 与 l_2 如何变动, 面积 S 保持不变.

【答案】 (1) 详见解析; (2) $k = -1$ 或 $k = -\frac{1}{5}$; (3) $m = -\frac{1}{2}$.

【解析】(1) 直线 l_1 的方程为 $y_1x - x_1y = 0$,

由点到直线的距离公式得点 C 到 l_1 的距离为 $d = \frac{|y_1x_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$,

因为 $|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

所以 $S = \frac{1}{2} |OA| \cdot d = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$.

(2) 由 $\begin{cases} y = kx \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 解得 $x_1^2 = \frac{1}{1+2k^2}$,

由 (1) 得 $S = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{3}}{3} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} kx_1 \right| = \frac{\sqrt{3} |k-1|}{6\sqrt{1+2k^2}}$

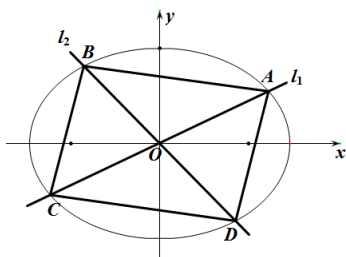
由题意知 $\frac{\sqrt{3} |k-1|}{6\sqrt{1+2k^2}} = \frac{1}{3}$,

解得 $k = -1$ 或 $k = -\frac{1}{5}$.

(3) 设 $l_1: y = kx$, 则 $l_2: y = \frac{m}{k}x$, 设 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = kx \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, 的 $x_1^2 = \frac{1}{1+2k^2}$,

同理 $x_2^2 = \frac{1}{1+2(\frac{m}{k})^2} = \frac{k^2}{k^2 + 2m^2}$,



由 (1) 知, $S = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{1}{2} \left| \frac{x_1 \cdot mx_1}{k} - x_2 \cdot kx_1 \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k^2 - m|}{|k|} \cdot |x_1x_2|$

$$= \frac{|k^2 - m|}{2\sqrt{1+2k^2} \cdot \sqrt{k^2 + 2m^2}},$$

整理得 $(8S^2 - 1)k^4 + (4S^2 + 16S^2m^2 + 2m)k^2 + (8S^2 - 1)m^2 = 0$,

由题意知 S 与 k 无关,

$$\text{则} \begin{cases} 8S^2 - 1 = 0 \\ 4S^2 + 16S^2m^2 + 2m = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} S^2 = \frac{1}{8} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{所以 } m = -\frac{1}{2}.$$

【考点定位】椭圆的性质，直线与椭圆的位置关系.

23. (本题满分16分) 本题共3小题. 第1小题4分, 第2小题6分, 第3小题6分.

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n = 3n + 5$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0} \geq a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1 = 3\lambda < 0$, $b_n = \lambda^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 λ 的取值范围, 使得对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \neq 0$, 且

$$\frac{a_m}{a_n} \in \left(\frac{1}{6}, 6\right).$$

【答案】(1) $a_n = 6n - 5$; (2) 详见解析; (3) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

【解析】(1.) 因为 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, $b_n = 3n + 5$,

所以 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n) = 2(3n + 8 - 3n - 5) = 6$,

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项为 $a_1 = 1$, 公差为6, 即 $a_n = 6n - 5$.

(2) 由 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, 得 $a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n$,

所以 $\{a_n - 2b_n\}$ 为常数列, $a_n - 2b_n = a_1 - 2b_1$, 即 $a_n = 2b_n + a_1 - 2b_1$,

因为 $a_{n_0} \geq a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $2b_{n_0} + a_1 - 2b_1 \geq 2b_n + a_1 - 2b_1$, 即 $b_{n_0} \geq b_n$,

所以 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项.

(3) 因为 $b_n = \lambda^n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2(\lambda^{n+1} - \lambda^n)$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2(\lambda^n - \lambda^{n-1}) + 2(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2}) + \cdots + 2(\lambda^2 - \lambda) + 3\lambda \\ &= 2\lambda^n + \lambda, \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 3\lambda$, 符合上式,

所以 $a_n = 2\lambda^n + \lambda$,

因为 $a_1 = 3\lambda < 0$, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{a_1}{a_n} \in (\frac{1}{6}, 6)$,

故 $a_n < 0$, 特别地 $a_2 = 2\lambda^2 + \lambda < 0$, 于是 $\lambda \in (-\frac{1}{2}, 0)$,

此时对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \neq 0$,

当 $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ 时, $a_{2n} = 2|\lambda|^{2n} + \lambda > \lambda$, $a_{2n-1} = -2|\lambda|^{2n-1} + \lambda < \lambda$,

由指数函数的单调性知, $\{a_n\}$ 的最大值为 $a_2 = 2\lambda^2 + \lambda < 0$, 最小值为 $a_1 = 3\lambda$,

由题意, $\frac{a_m}{a_n}$ 的最大值及最小值分别是 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2\lambda+1}$ 及 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2\lambda+1}{3}$,

由 $\frac{2\lambda+1}{3} > \frac{1}{6}$ 及 $\frac{3}{2\lambda+1} < 6$, 解得 $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$,

综上所述, λ 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, 0)$.

【考点定位】 数列的递推公式, 等差数列的性质, 常数列, 数列的最大项, 指数函数的单调性.