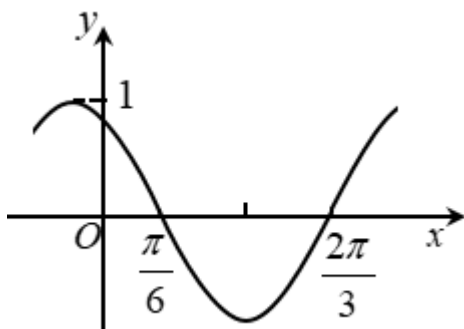


9. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$. ()

- A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
- B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 \sqrt{n}
- C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
- D. 若 $m = 0, n > 0$, 则 C 是两条直线

10. 下图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像, 则 $\sin(\omega x + \varphi) =$ ()



- A. $\sin(x + \frac{\pi}{3})$
- B. $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$
- C. $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
- D. $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$

11. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

- A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$
- B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
- C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$
- D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n$, 且

$P(X = i) = p_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1$, 定义 X 的信息熵 $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$. ()

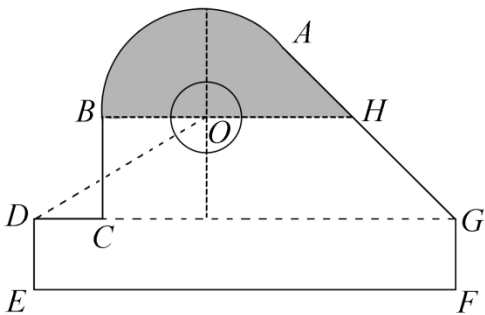
- A. 若 $n = 1$, 则 $H(X) = 0$
- B. 若 $n = 2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大
- C. 若 $p_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大
- D. 若 $n = 2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且 $P(Y = j) = p_j + p_{2m+1-j} (j = 1, 2, \dots, m)$, 则 $H(X) \leq H(Y)$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13.斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ = _____.

14.将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

15.某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为7 cm, 圆孔半径为1 cm, 则图中阴影部分的面积为_____ cm^2 .



体现了五育并举的育人方针.

16.已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

的棱长均为2, $\angle BAD=60^\circ$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为_____.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.在① $ac = \sqrt{3}$, ② $c \sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$, _____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18.已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2 - a_2a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

19.为加强环境保护,治理空气污染,环境监测部门对某市空气质量进行调研,随机抽查了100天空气中的PM2.5和SO₂浓度(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$),得下表:

SO ₂ PM2.5	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中PM2.5浓度不超过75,且SO₂浓度不超过150”的概率;

(2) 根据所给数据,完成下面的 2×2 列联表:

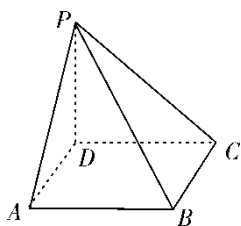
SO ₂ PM2.5	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关?

附:
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .



(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 3)$, 点 A 为其左顶点, 且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$,

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 N 为椭圆上任意一点, 求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22. 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.