

# 1996 年四川高考文科数学真题及答案

## 第 I 卷（选择题共 65 分）

注意事项：

1. 答案 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

一. 选择题：本大题共 15 小题；第 1—10 题每小题 4 分，第 11—15 题每小题 5 分，共 65 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

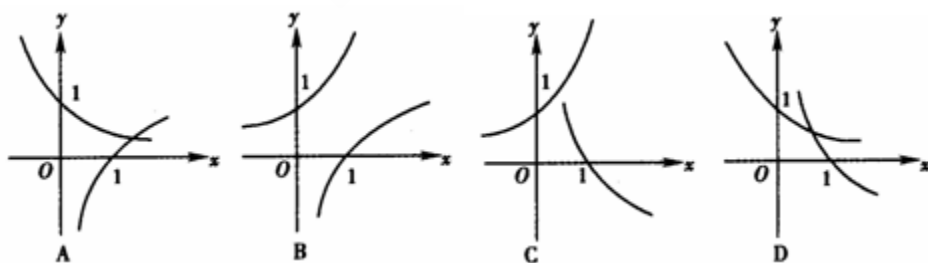
1. 设全集  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，集合  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{3, 5\}$ 。则

- A.  $I = A \cup B$       B.  $I = \overline{A} \cup B$       C.  $I = A \cup \overline{B}$       D.  $I = \overline{A} \cup \overline{B}$

【答案】C

【解析】显然 C 正确。

2. 当  $a > 1$  时，在同一坐标系中，函数  $y = a^{-x}$  与  $y = \log_a x$  的图像



【答案】A

【解析】当  $a > 1$  时，函数  $y = a^{-x}$  是减函数，且过点  $(0, 1)$ ；而函数  $y = \log_a x$  为增函数，且过点  $(1, 0)$ 。

3. 若  $\sin^2 x > \cos^2 x$ ，则  $x$  的取值范围是

A.  $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{3}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

B.  $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{5}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C.  $\left\{x \mid k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D.  $\left\{x \mid k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

【答案】D

【解析】 $\sin^2 x > \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$  或  $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ , 即  $(2k-1)\pi + \frac{\pi}{4} < x < (2k-1)\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ , 所以  $x$  的取值范围是  $\left\{x \mid k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

4. 复数  $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$  等于

A.  $1 + \sqrt{3}i$

B.  $-1 + \sqrt{3}i$

C.  $1 - \sqrt{3}i$

D.  $-1 - \sqrt{3}i$

【答案】B

【解析】 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} = \frac{2^4(1+i)^4}{2^5\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5} = \frac{(2i)^2}{2(-\omega)^5} = -1 + \sqrt{3}i$ .

5. 6名同学排成一排, 其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有

A. 720种

B. 360种

C. 240种

D. 120种

【答案】C

【解析】将甲、乙两人捆绑在一起, 不同的排法有  $A_5^5 A_2^2 = 240$ .

6. 已知  $\alpha$  是第三象限角且  $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$ , 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$

- A.  $\frac{4}{3}$       B.  $\frac{3}{4}$       C.  $-\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】由已知得  $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ ，所以  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

$$= \frac{1 - (-\frac{7}{25})}{-\frac{24}{25}} = -\frac{4}{3}.$$

7. 如果直线  $l, m$  与平面  $\alpha, \beta, \gamma$  满足:  $l = \beta \cap \gamma, l // \alpha, m \subset \alpha$  和  $m \perp \gamma$ , 那么必有

- A.  $\alpha \perp \gamma$  且  $l \perp m$     B.  $\alpha \perp \gamma$  且  $m // \beta$     C.  $m // \beta$  且  $l \perp m$     D.  $\alpha // \beta$  且  $\alpha \perp \gamma$

【答案】A

【解析】略.

8. 当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时, 函数  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  的

- A. 最大值是 1, 最小值是 -1      B. 最大值是 1, 最小值是  $-\frac{1}{2}$   
 C. 最大值是 2, 最小值是 -2      D. 最大值是 2, 最小值是 -1

【答案】D

【解析】因为  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ , 由已知  $-\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$ . 故当  $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)$  有最大值是 2; 当  $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ , 即  $x = -\frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  有最小值是 -1.

9. 中心在原点, 准线方程为  $x = \pm 4$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$  的椭圆方程是

- A.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$       B.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

C.  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$                       D.  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】A

【解析】由题设可得  $\frac{a^2}{c} = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，解得  $a = 2, c = 1$ ，所以椭圆方程是  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

10. 圆锥母线长为1，侧面展开图圆心角为  $240^\circ$ ，该圆锥的体积是

A.  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{81}$                       B.  $\frac{8\pi}{81}$                       C.  $\frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$                       D.  $\frac{10\pi}{81}$

【答案】C

【解析】设圆锥底面半径为  $r$ ，则  $\frac{2\pi r}{1} = \frac{240^\circ}{360^\circ} \times 2\pi$ ，得  $r = \frac{2}{3}$ ，则圆锥高为

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

圆锥的体积是  $\frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$ 。

11. 椭圆  $25x^2 - 150x + 9y^2 + 18y + 9 = 0$  的两个焦点坐标是

A.  $(-3, 5), (-3, -3)$                       B.  $(3, 3), (3, -5)$   
 C.  $(1, 1), (-7, 1)$                       D.  $(7, -1), (-1, -1)$

【答案】B

【解析】椭圆的标准方程为  $\frac{(y+1)^2}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{3^2} = 1$ ，而  $\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$  的焦点为  $(0, \pm 4)$ ，所以

$\frac{(y+1)^2}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{3^2} = 1$  的焦点坐标是  $(3, 3), (3, -5)$ 。

12. 将边长为  $a$  的正方形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折起，使得  $BD = a$ ，则三棱锥  $D-ABC$  的

体积为

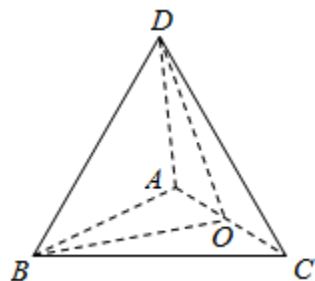
- A.  $\frac{a^3}{6}$       B.  $\frac{a^3}{12}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【答案】D

【解析】取  $AC$  的中点  $O$ ，连接  $BO, DO$ ，如图所示.

$\triangle ABC, \triangle ADC$  均为等腰直角三角形， $BO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ，

$\therefore \angle BOD = \frac{\pi}{2}$ ，则  $DO \perp$  面  $ABC$ ， $DO$  就是三棱锥  $D-ABC$



的高，所以  $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ .

13. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $m$  项和为 30，前  $2m$  项和为 100，则它的前  $3m$  项和为

- A. 130      B. 170      C. 210      D. 260

【答案】C

【解析】由已知得  $S_m = 30, S_{2m} = 100$ ，则  $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$  成等差数列，所以

$$S_{3m} = 3(S_{2m} - S_m) = 210.$$

14. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < a < b)$  的半焦距为  $c$ ，直线  $l$  过  $(a, 0), (0, b)$  两点. 已知原点

到直线  $l$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，则双曲线的离心率为

- A. 2      B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{2}$       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】直线  $l$  的方程为  $bx + ay - ab = 0$ ，原点到直线  $l$  的距离为  $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，则

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{3}{16} c^2, \text{ 即 } \frac{a^2 (c^2 - a^2)^2}{c^2} = \frac{3}{16} c^2, \text{ 解得 } e = 2 \text{ 或 } e = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } 0 < a < b, \text{ 所以}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > \sqrt{2}, \text{ 所以 } e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 不合题意.}$$

15.  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的奇函数,  $f(x+2) = -f(x)$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x$ , 则

$f(7.5)$  等于

- A. 0.5      B. -0.5      C. 1.5      D. -1.5

【答案】B

【解析】 $f(7.5) = f(5.5+2) = -f(5.5) = -[-f(3.5)] = f(3.5) = -f(1.5) = -[-f(-0.5)] = -f(0.5) = -0.5$ .

## 第 II 卷 (非选择题共 85 分)

注意事项:

1. 第 II 卷共 6 页, 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

二. 填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

16. 已知点  $(-2, 3)$  与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点的距离是 5, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】由已知得  $\sqrt{\left(\frac{p}{2} + 2\right)^2 + 3^2} = 5$ , 解得  $p = 4$ .

17. 正六边形的中心和顶点共 7 个点, 以其中 3 个点为顶点的三角形共有 \_\_\_\_\_ 个. (用数字作答)

【答案】32

【解析】从 7 个点中取 3 个点有  $C_7^3$  种取法, 3 个点共线的有 3 种, 三角形共有  $C_7^3 - 3 = 32$  个.

18.  $\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3}\text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\sqrt{3}$

【解析】  $\because \text{tg}(20^\circ + 40^\circ) = \frac{\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ}{1 - \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ} = \sqrt{3}$ ,  $\therefore \text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ = \sqrt{3}(1 - \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ)$ ,

$$\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3}\text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ = \sqrt{3}.$$

19. 如图, 正方形  $ABCD$  所在平面与正方形  $ABEF$  所在平面成  $60^\circ$  的二面角, 则异面直线  $AD$  与  $BF$  所成角的余弦值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{4}$



【解析】 由于  $AD \parallel BC$ , 所以  $\angle CBF$  即为异面直线  $AD$  与

$BF$  所成角, 设正方形边长为  $a$ , 在  $\triangle CBF$  中,  $BF = \sqrt{2}a, BC = a, FC = \sqrt{FD^2 + CD^2} = \sqrt{AD^2 + FA^2 - 2AD \cdot FA \cos 60^\circ + CD^2} = \sqrt{2}a$ ,  $\cos \angle CBF = \frac{BF^2 + BC^2 - FC^2}{2BF \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

三. 解答题: 本大题共 6 小题; 共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20. (本小题满分 11 分)

解不等式  $\log_a(x+1-a) > 1$ .

【解】 本小题考查对数函数性质, 对数不等式的解法, 分类讨论的方法和运算能力, 满分 11 分.

(I)  $a > 1$  时, 原不等式等价于不等式组:  $\begin{cases} x+1-a > 0, \\ x+1-a > a. \end{cases}$  ——2 分

解得  $x > 2a-1$ . ——5 分

(II) 当  $0 < a < 1$  时, 原不等式等价于不等式组:  $\begin{cases} x+1-a > 0, \\ x+1-a < a. \end{cases}$  ——7 分

解得  $a-1 < x < 2a-1$ . 10 分

综上, 当  $a > 1$  时, 不等式的解集为  $\{x | x > 2a - 1\}$ ;

当  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $\{x | a - 1 < x < 2a - 1\}$ .

——11分

21. (本小题满分 12 分)

设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $S_3 + S_6 = 2S_9$ , 求数列的公比  $q$ .

**【解】** 本小题主要考查等比数列的基础知识, 逻辑推理能力和运算能力. 满分 12 分.

若  $q = 1$ , 则有  $S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1, S_9 = 9a_1$ . 但  $a_1 \neq 0$ ,

即得  $S_3 + S_6 \neq 2S_9$ , 与题设矛盾, 故  $q \neq 1$ .

——2分

又依题意  $S_3 + S_6 = 2S_9$  可得  $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$ .

整理得  $q^3(2q^6 - q^3 - 1) = 0$ .

由  $q \neq 0$  得方程  $2q^6 - q^3 - 1 = 0$ .  $(2q^3 + 1)(q^3 - 1) = 0$ ,

——9分

$\because q \neq 1, q^3 \neq 1, \therefore 2q^3 + 1 = 0, \therefore q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ .

——12分

22. (本小题满分 11 分)

已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  满足:  $A + C = 2B, \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$ , 求  $\cos \frac{A-C}{2}$  的值.

解法一: 由题设条件知  $B = 60^\circ, A + C = 120^\circ$ .

——2分

$\because \frac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = -2\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -2\sqrt{2}$ .

将上式化为  $\cos A + \cos C = -2\sqrt{2} \cos A \cos C$ .

利用和差化积及积化和差公式, 上式可化为

$2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = -\sqrt{2} [\cos(A+C) + \cos(A-C)]$ .

——6分

将  $\cos \frac{A+C}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(A+C) = -\frac{1}{2}$  代入上式得

$$\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cos(A-C).$$

将  $\cos(A-C) = 2 \cos^2(\frac{A-C}{2}) - 1$  代入上式并整理得

$$4\sqrt{2} \cos^2(\frac{A-C}{2}) + 2 \cos(\frac{A-C}{2}) - 3\sqrt{2} = 0 \quad \text{---9分}$$

$$(2 \cos \frac{A-C}{2} - \sqrt{2})(2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3) = 0,$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3 \neq 0, \therefore 2 \cos \frac{A-C}{2} - \sqrt{2} = 0.$$

从而得  $\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . ---12分

解法二：由题设条件知  $B = 60^\circ$ ,  $A+C = 120^\circ$ .

设  $\alpha = \frac{A-C}{2}$ , 则  $A-C = 2\alpha$ , 可得  $A = 60^\circ + \alpha$ ,  $C = 60^\circ - \alpha$ , ---3分

$$\text{所以 } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\cos(60^\circ + \alpha)} + \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}}. \quad \text{---7分}$$

$$\text{依题设条件有 } \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{\cos B},$$

$$\because \cos B = \frac{1}{2}, \therefore \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{整理得 } 4\sqrt{2} \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 3\sqrt{2} = 0, \quad \text{---9分}$$

$$(2 \cos \alpha - \sqrt{2})(2\sqrt{2} \cos \alpha + 3) = 0,$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \alpha + 3 \neq 0, \therefore 2 \cos \alpha - \sqrt{2} = 0.$$

从而得  $\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

——11分

23. (本小题满分12分)

【注意：本题的要求是，参照标号①的写法，在标号②、③、④、⑤的横线上填写适当步骤，完成（I）证明的全过程；并解答（II），如图2.】

如图1，在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中，  $AB = \frac{AA_1}{3} = a$ ，  $E, F$  分别是  $BB_1, CC_1$  上的点，

且  $BE = a, CF = 2a$ .

(I) 求证：面  $AEF \perp$  面  $ACF$ ；

(II) 求三棱锥  $A_1-AEF$  的体积.

(I) 证明： ①  $\because BE = a, CF = 2a, BE \parallel CF$ ， 延长  $FE$  与  $CB$  延

长线交于  $D$ ， 连结  $AD$ .

$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DCF$ ，

$\therefore \frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF}$ .

② \_\_\_\_\_.

$\therefore DB = AB$ .

③ \_\_\_\_\_.

$\therefore DA \perp AC$ .

④ \_\_\_\_\_.

$\therefore FA \perp AD$ .

⑤ \_\_\_\_\_.

$\therefore AEF \perp$  面  $ACF$ .

(II) 解：

【解】 本小题考查空间线面关系， 正三棱柱的性质， 逻辑思维能力， 空间想象能力及运算能力. 满分12分.

(I) ②  $\because BE : CF = 1 : 2, \therefore DC = 2DB, \therefore DB = BC$ ，

——1分

③  $\because \triangle ABD$  是等腰三角形， 且  $\angle ABD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 30^\circ, \therefore \angle CAD = 90^\circ$ ，

——3分

④  $\because FC \perp$  面  $ACD, \therefore CA$  是  $FA$  在面  $ACD$  上的射影，  
且  $CA \perp AD$ ，

——5分

⑤  $\because FA \cap AC = A, DA \perp$  面  $ACF, DA \subset$  面  $ADF$ ，

$\therefore$  面  $ADF \perp$  面  $ACF$ . 7分

(II)  $\because V_{A_1-AEF} = V_{E-AA_1F}$ ，

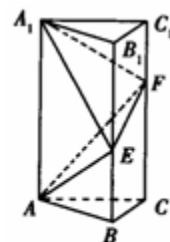


图1

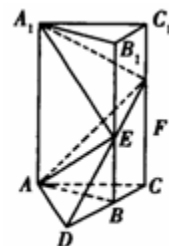
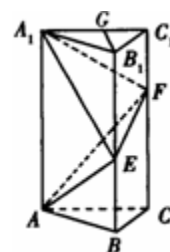


图2



在面  $A_1B_1C_1$  内作  $B_1G \perp A_1C_1$ ，垂足为  $G$ ．  $B_1G = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ．

面  $A_1B_1C_1 \perp$  面  $A_1C$ ，  $\therefore B_1G \perp$  面  $A_1C$ ，

$\because E \in BB_1$ ，而  $BB_1 \parallel$  面  $A_1C$ ，  $\therefore$  三棱柱  $E-AA_1F$  的高为  $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ ． ——9 分

$$S_{\Delta A_1FA} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot AC = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}． \quad \text{——10 分}$$

$$\therefore V_{A_1-AEF} = V_{E-AA_1F} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}． \quad \text{——12 分}$$

24. (本小题满分 10 分)

某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？（粮食单产 =  $\frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$ ，人均粮食占有量 =  $\frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$ ）

**【解】** 本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力，指数函数和二项式定理的应用，近似计算的方法和能力．满分 10 分．

设耕地平均每年至多只能减少  $x$  公顷，又设该地区现有人口为  $P$  人，粮食单产为  $M$  吨/公顷．

$$\text{依题意得不等式 } \frac{M \times (1 + 22\%) \times (10^4 - 10x)}{P \times (1 + 1\%)^{10}} \geq \frac{M \times 10^4}{P} \times (1 + 10\%)． \quad \text{——5 分}$$

$$\text{化简得 } x \leq 10^3 \times \left[ 1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right]． \quad \text{——7 分}$$

$$\therefore 10^3 \times \left[ 1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right] = 10^3 \times \left[ 1 - \frac{1.1}{1.22} \times (1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + \dots) \right]$$

$$\approx 10^3 \times \left[ 1 - \frac{1.1}{1.22} \times 1.1045 \right] \approx 4.1． \quad \text{——9 分}$$

$\therefore x \leq 4$ （公顷）．

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷． ——10 分

25. (本小题满分 12 分)

已知  $l_1, l_2$  是过点  $P(-\sqrt{2}, 0)$  的两条互相垂直的直线, 且  $l_1, l_2$  与双曲线  $y^2 - x^2 = 1$  各有两个交点, 分别为  $A_1, B_1$  和  $A_2, B_2$ .

(I) 求  $l_1$  的斜率  $k_1$  的取值范围;

(II) 若  $A_1$  恰是双曲线的一个顶点, 求  $|A_2B_2|$  的值.

**【解】** 本小题主要考查直线与双曲线的性质, 解析几何的基本思想, 以及综合运用知识的能力. 满分 12 分.

(I) 依题设,  $l_1, l_2$  的斜率都存在, 因为  $l_1$  过点  $P(-\sqrt{2}, 0)$  且与双曲线有两个交点, 故方程

$$\begin{cases} y = k_1(x + \sqrt{2}) (k_1 \neq 0), \\ y^2 - x^2 = 1. \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{---1 分}$$

有两个不同的解.

$$\text{在方程组①中消去 } y, \text{ 整理得 } (k_1^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_1^2x + 2k_1^2 - 1 = 0. \quad \text{②}$$

若  $k_1^2 - 1 = 0$ , 则方程组①只有一个解, 即  $l_1$  与双曲线只有一个交点, 与题设矛盾, 故

$k_1^2 - 1 \neq 0$ , 即  $|k_1| \neq 1$ , 方程②的判别式为

$$\Delta_1 = (2\sqrt{2}k_1^2)^2 - 4(k_1^2 - 1)(2k_1^2 - 1) = 4(3k_1^2 - 1).$$

设  $l_2$  的斜率为  $k_2$ , 因为  $l_2$  过点  $P(-\sqrt{2}, 0)$  且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y = k_2(x + \sqrt{2}) (k_2 \neq 0), \\ y^2 - x^2 = 1. \end{cases} \quad \text{③}$$

有两个不同的解. 在方程组③中消去  $y$ , 整理得

$$(k_2^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_2^2x + 2k_2^2 - 1 = 0. \quad \text{④}$$

同理有  $k_2^2 - 1 \neq 0, \Delta_2 = 4(3k_2^2 - 1)$ .

又因为  $l_1 \perp l_2$ , 所以有  $l_1 \cdot l_2 = -1$ . ---4 分

于是,  $l_1, l_2$  与双曲线各有两个交点, 等价于 
$$\begin{cases} 3k_1^2 - 1 > 0, \\ 3k_2^2 - 1 > 0, \\ k_1 \cdot k_2 = -1, \\ |k_1| \neq 1. \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} < |k_1| < \sqrt{3}, \\ |k_1| \neq 1. \end{cases} \quad \text{---6分}$$

$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3}).$  ---7分

(II) 双曲线  $y^2 - x^2 = 1$  的顶点为  $(0, 1), (0, -1)$ .

取  $A_1(0, 1)$  时, 有  $k_1(0 + \sqrt{2}) = 1,$

解得  $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$  从而  $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\sqrt{2}.$  ---8分

将  $k_2 = -\sqrt{2}$  代入方程④得  $x^2 + 4\sqrt{2}x + 3 = 0.$  ⑤

记  $l_2$  与双曲线的两交点为  $A_2(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2),$  则

$$|A_2B_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 3(x_1 - x_2)^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2].$$

由⑤知  $x_1 + x_2 = -4\sqrt{2}, x_1x_2 = 3.$

$$\therefore |A_2B_2|^2 = 60, |A_2B_2| = 2\sqrt{15}. \quad \text{---11分}$$

当取  $A_1(0, -1)$  时, 由双曲线  $y^2 - x^2 = 1$  关于  $x$  轴的对称性, 知  $|A_2B_2| = 2\sqrt{15}.$

所以  $l_1$  过双曲线的一个顶点时,  $|A_2B_2| = 2\sqrt{15}.$  ---12分