2006 年广东高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是

A. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$　　C. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\frac{1}{3})$

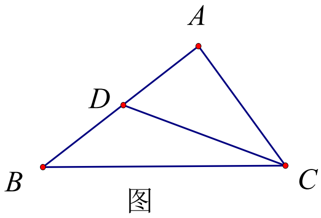
2、若复数 z 满足方程 $z^2+2=0$，则 $z^3=$

A. $\pm 2\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}$　　C. $-2\sqrt{2}i$　　D. $\pm 2\sqrt{2}i$

3、下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是

A. $y=-x^3$,$x\in R$　　B. $y=\sin x$,$x\in R$　　C. $y=x$,$x\in R$　　D. $y=(\frac{1}{2})^x$,$x\in R$

4、如图 1 所示，D 是 ΔABC 的边 AB 上的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}=$



图

A. $-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B. $-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D. $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

5、给出以下四个命题：

①如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行，

②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面

③如果两条直线都平行于一个平面，那么这两条直线互相平行，

④如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

其中真命题的个数是

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

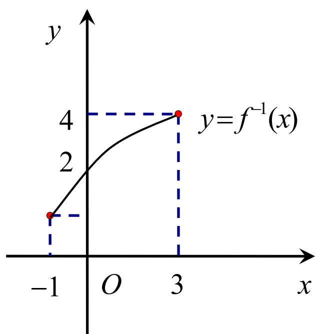


图 2

6、已知某等差数列共有 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7、函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 y 轴交于点 $P(0,2)$（如图 2 所示），则方程 $f(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上的根是 $x=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

8、已知双曲线 $3x^2-y^2=9$，则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. 2　　D. 4

9、在约束条件 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ y+x\le s \\ y+2x\le 4 \end{cases}$ 下，当 $3\le x\le 5$ 时，目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是

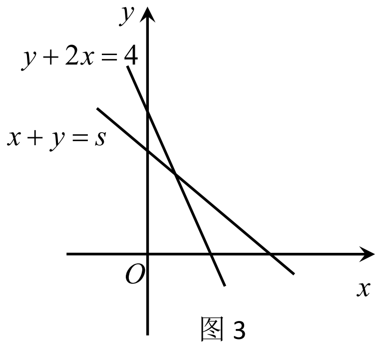


图 3

A. $[6,15]$　　B. $[7,15]$　　C. $[6,8]$　　D. $[7,8]$

10、对于任意的两个实数对 (a,b) 和 (c,d)，规定：$(a,b)=(c,d)$，当且仅当 $a=c,b=d$；运算“$\otimes$”为：$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$；运算“$\oplus$”为：$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$，设 $p,q\in R$，若 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$，则 $(1,2)\oplus(p,q)=$

A. $(4,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,-4)$

第二部分 非选择题（共 100 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

11、$\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x}\right)=$________.

12、棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为______.

13、在 $(x-\dfrac{2}{x})^{11}$ 的展开式中，x^5 的系数为________.

14、在德国不来梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品，其中第 1 堆只有 1 层，就一个球；第 $2,3,4,\cdots$ 堆最底层（第一层）分别按图 4 所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球,以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓

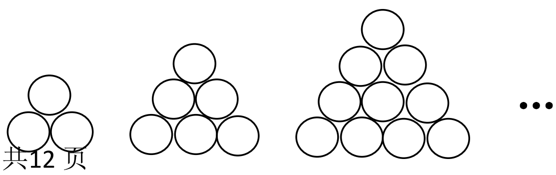


图 4

球总数,则 $f(3)=$______； $f(n)=$______（答案用 n 表示）.

三解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本题 14 分)已知函数 $f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2}),x\in R$.

(I)求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II)求 $f(x)$ 的的最大值和最小值;

(III)若 $f(\alpha)=\frac{3}{4}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

16、(本题 12 分)某运动员射击一次所得环数 X 的分布如下：

X	$0\sim6$	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

现进行两次射击，以该运动员两次射击中最高环数作为他的成绩，记为 ξ.

(I)求该运动员两次都命中 7 环的概率

(II)求 ξ 的分布列

(III) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

17、(本题 14 分)如图 5 所示， AF 、 DE 分别世 $\odot O$ 、 $\odot O_1$ 的直径， AD 与两圆所在的平面均垂直， $AD=8$. BC 是 $\odot O$ 的直径， $AB=AC=6$, $OE//AD$.

(I)求二面角 $B-AD-F$ 的大小;

(II)求直线 BD 与 EF 所成的角.

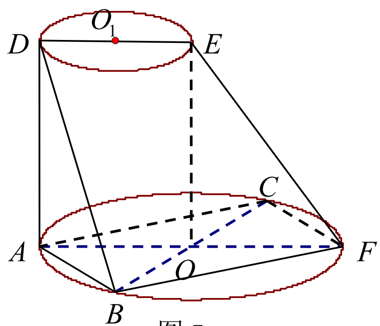


图 5

18、(本题 14 分)设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1、x_2 处取得极小值、极大值. xoy 平面上点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$，该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=4$，点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点. 求

(I)求点 A、B 的坐标；

(II)求动点 Q 的轨迹方程.

19、(本题 14 分)已知公比为 $q(0<q<1)$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9，无穷等比数列 $\{a_n^2\}$ 各项的和为 $\dfrac{81}{5}$.

(I)求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q；

(II)对给定的 $k(k=1,2,3,\cdots,n)$，设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k，公差为 $2a_k-1$ 的等差数列，求 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和；

(III)设 b_i 为数列 $T^{(k)}$ 的第 i 项，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求 S_n，并求正整数 $m(m>1)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零.

（注：无穷等比数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时该无穷等比数列前 n 项和的极限）

20、(本题 12 分) A 是定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：①对任意的 $x\in[1,2]$，都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$；②存在常数 $L(0<L<1)$，使得对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$，都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

(I)设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x},x\in[2,4]$ ，证明：$\varphi(x)\in A$

(II)设 $\varphi(x)\in A$，如果存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的；

(III)设 $\varphi(x)\in A$，任取 $x_1\in(1,2)$，令 $x_{n-1}=\varphi(2x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：给定正整数 k，对任意的正整数 p，成立不等式 $|x_{k+p}-x_k|\le\dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$

2006 年广东高考理科数学真题参考答案

第一部分 选择题（50分）

1、函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是

A. $(-\dfrac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\dfrac{1}{3},1)$　　C. $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\dfrac{1}{3})$

1、解：由 $\begin{cases}1-x>0\\3x+1>0\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<x<1$，故选 B.

2、若复数 z 满足方程 $z^2+2=0$，则 $z^3=$

A. $\pm 2\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}$　　C. $-2\sqrt{2}\ i$　　D. $\pm 2\sqrt{2}\,i$

2、由 $z^2+2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{2}i\Rightarrow z^3=\pm 2\sqrt{2}i$，故选 D.

3、下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是

A. $y=-x^3,x\in R$　　B. $y=\sin x,x\in R$　　C. $y=x,x\in R$　　D. $y=(\dfrac{1}{2})^x,x\in R$

3、B 在其定义域内是奇函数但不是减函数;C 在其定义域内既是奇函数又是增函数;D 在其定义域内不是奇函数,是减函数;故选 A.

4、如图 1 所示，D 是△ABC 的边 AB 上的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}=$

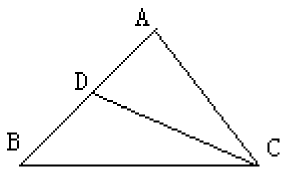


图1

A. $-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B. $-\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D. $\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

4、$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，故选 A.

5、给出以下四个命题

①如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的一个平面和这个平面相交,那么这条直线和交线平行;

②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面;

③如果两条直线都平行于一个平面,那么这两条直线互相平行;

④如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么些两个平面互相垂直.

其中真命题的个数是

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5、①②④正确，故选 B.

6、已知等差数列共有 10 项，其中奇数项之和 15，偶数项之和为 30，则其公差是

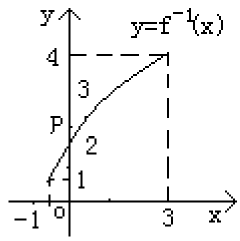


图2

A.5　　B.4　　C. 3　　D.2

6、$\begin{cases} 5a_1+20d=15 \\ 5a_1+25d=30 \end{cases} \Rightarrow d=3$，故选 C.

7、函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0,2)$（如图 2 所示），则方程 $f(x)=0$ 的根是 $x=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D.1

7、$f(x)=0$ 的根是 $x=2$，故选 C

8、已知双曲线 $3x^2-y^2=9$，则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D.4

8、依题意可知 $a=\sqrt{3}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，故选 C.

9、在约束条件 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\le s \\ y+2x\le 4 \end{cases}$ 下，当 $3\le s\le 5$ 时，

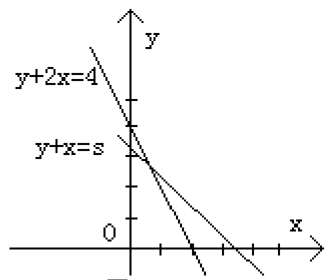


图3

目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是

A. $[6,15]$　　B. $[7,15]$　　C. $[6,8]$　　D. $[7,8]$

9、由 $\begin{cases} x+y=s \\ y+2x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-s \\ y=2s-4 \end{cases}$ 交点为 $A(0,2), B(4-s,2s-4), C(0,s), C'(0,4)$，

（1）　当 $3\le s<4$ 时可行域是四边形 OABC，此时，$7\le z\le 8$

（2）　当 $4\le s\le 5$ 时可行域是△OAC' 此时，$z_{\max}=8$

故选 D.

10、对于任意的两个实数对（a, b）和(c, d)，规定（a, b）=(c, d)当且仅当 a=c, b=d；运算“⊗”为：$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd, bc+ad)$，运算“⊕”为：

$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$，设 $p,q\in R$，若

$(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$ 则 $(1,2)\oplus(p,q)=$

A. $(4,0)$　　B. $(2,0)$　C. $(0,2)$　　D. $(0,-4)$

10、由 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$ 得 $\begin{cases}p-2q=5\\2p+q=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=1\\q=-2\end{cases}$,

所以 $(1,2)\oplus(p,q)=(1,2)\oplus(1,-2)=(2,0)$，故选 B.

第二部分 非选择题（100 分）

二、填空题

11、$\lim\limits_{x\to-2}(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x})=$__________

11、$\lim\limits_{x\to-2}(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x})=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{4}$

12、若棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为__________

12、$d=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S=4\pi R^2=27\pi$

13、在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{11}$ 的展开式中，x^5 的系数为__________

13、$T_{r+1}=C_{11}^{11-r}x^r(-\dfrac{2}{x})^{11-r}=(-2)^{11-r}C_{11}^{11-r}x^{2r-11}\Rightarrow 2r-11=5\Rightarrow r=8$

所以 x^5 的系数为 $(-2)^{11-r}C_{11}^{11-r}=(-2)^3C_{11}^3=-1320$

14、在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干准“正三棱锥”形的展品，其中第一堆只有一层，就一个乒乓球；第 2、3、4、…堆最底层（第一层）分别按图 4 所示方式固定摆放. 从第一层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球，以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(3)=$_____；$f(n)=$（答案用 n 表示）　　.

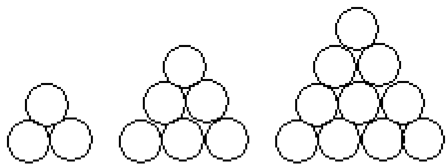


图4

14、$f(3)=10$，$f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

三、解答题

15、（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2}),x\in R$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值和最小值；

（Ⅲ）若 $f(\alpha)=\frac{3}{4}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

15 解：$f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

（Ⅰ）$f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$；

（Ⅱ）$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ 和最小值 $-\sqrt{2}$；

（Ⅲ）因为 $f(\alpha)=\frac{3}{4}$，即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{4}\cdots①\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{7}{16}$，即 $\sin 2\alpha=-\frac{7}{16}$

16、（本小题满分 12 分）

某运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下：

X	0-6	7	8	9	10
Y	0	0.2	0.3	0.3	0.2

现进行两次射击，以该运动员两次射击中最高环数作为他的成绩，记为 ξ.

(Ⅰ)求该运动员两次都命中 7 环的概率；

(Ⅱ)求 ξ 分布列；

(Ⅲ) 求 ξ 的数学希望.

16 解：(Ⅰ)求该运动员两次都命中 7 环的概率为 $P(7)=0.2\times0.2=0.04$；

(Ⅱ) ξ 的可能取值为 7、8、9、10

$P(\xi=7)=0.04$ $P(\xi=8)=2\times0.2\times0.3+0.3^2=0.21$

$P(\xi=9)=2\times0.2\times0.3+2\times0.3\times0.3+0.3^2=0.39$

$P(\xi=10)=2\times0.2\times0.2+2\times0.3\times0.2+2\times0.3\times0.2+0.2^2=0.36$

ξ分布列为

ξ	7	8	9	10
P	0.04	0.21	0.39	0.36

(III) ξ的数学希望为$E\xi=7\times0.04+8\times0.21+9\times0.39+10\times0.36=9.07$.

17、(本小题满分 14 分)

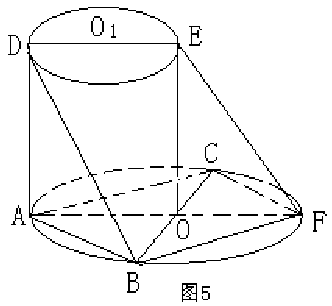


图5

如图 5 所示，AF、DE 分别是⊙O、⊙O_1的直径.AD 与两圆所在的平面均垂直，AD＝8,BC 是⊙O 的直径，AB＝AC＝6，OE//AD.

(Ⅰ)求二面角 B—AD—F 的大小；

(Ⅱ)求直线 BD 与 EF 所成的角.

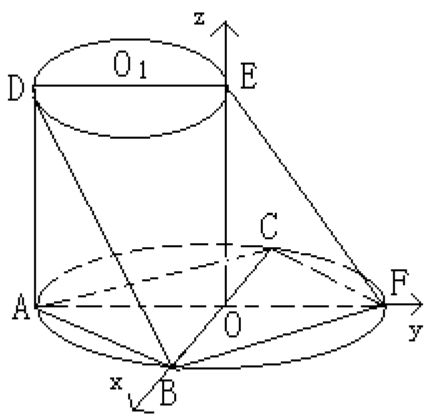
17、解：(Ⅰ)∵AD 与两圆所在的平面均垂直,

∴AD⊥AB, AD⊥AF,故∠BAD 是二面角 B—AD—F 的平面角，

依题意可知，ABCD 是正方形，所以∠BAD＝45^0.

即二面角 B—AD—F 的大小为45^0;

(Ⅱ)以 O 为原点，BC、AF、OE 所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系（如图所示），则 O（0，0，0），A（0，$-3\sqrt{2}$，0），B（$3\sqrt{2}$，0，0），D（0，$-3\sqrt{2}$，8），E（0，0，8），F（0，$3\sqrt{2}$，0）



所以，$\overrightarrow{BD}=(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2},8),\overrightarrow{FE}=(0,-3\sqrt{2},8)$

$\cos<\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}>=\dfrac{\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{FE}|}=\dfrac{0+18+64}{\sqrt{100}\times\sqrt{82}}=\dfrac{\sqrt{82}}{10}$

设异面直线 BD 与 EF 所成角为 α，则 $\cos\alpha=|\cos<\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}>|=\dfrac{\sqrt{82}}{10}$

直线 BD 与 EF 所成的角为$\arccos\dfrac{\sqrt{82}}{10}$

18、（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1 、 x_2 处取得极小值、极大值. xoy 平面上点 A、B 的坐标分别为 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$，该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB}=4$，点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点. 求（Ⅰ）点 A、B 的坐标 ；

（Ⅱ）动点 Q 的轨迹方程

18 解:（Ⅰ）令 $f'(x)=(-x^3+3x+2)'=-3x^2+3=0$ 解得 $x=1或x=-1$

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$ ，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$

所以，函数在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=1$ 取得极大值，故 $x_1=-1, x_2=1$，$f(-1)=0, f(1)=4$

所以，点 A、B 的坐标为 $A(-1,0), B(1,4)$.

（Ⅱ）设 $p(m,n)$，$Q(x,y)$，

$\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB}=(-1-m,-n)\bullet(1-m,4-n)=m^2-1+n^2-4n=4$

$k_{PQ}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{y-n}{x-m}=-\frac{1}{2}$，又 PQ 的中点在 $y=2(x-4)$ 上，所以 $\frac{y+m}{2}=2\left(\frac{x+n}{2}-4\right)$

消去 m,n 得 $(x-8)^2+(y+2)^2=9$

19、（本小题满分 14 分）

已知公比为 $q(0<q<1)$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9，无穷等比数列 $\{a^2{}_n\}$ 各项的和为 $\frac{81}{5}$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q ；

（Ⅱ）对给定的 $k(k=1,2,3,\cdots,n)$，设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k，公差为 $2a_k-1$ 的等差数列. 求数列 $T^{(k)}$ 的前 10 项之和；

(Ⅲ) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求 S_n，并求正整数 $m(m>1)$，使

得

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{m}$存在且不等于零.

(注：无穷等比数列各项的和即当$n\to\infty$时该无穷数列前 n 项和的极限)

19 解:（Ⅰ）依题意可知, $\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-q}=9\\ \dfrac{a^2{}_1}{1-q^2}=\dfrac{81}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=3\\ q=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，所以数列$T^{(2)}$的的首项为$t_1=a_2=2$，公差$d=2a_2-1=3$，

$S_{10}=10\times2+\dfrac{1}{2}\times10\times9\times3=155$，即数列$T^{(2)}$的前 10 项之和为 155.

(III) $b_i=a_i+(i-1)(2a_i-1)=(2i-1)a_i-(i-1)=3(2i-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{i-1}-(i-1)$，

$S_n=45-(18n+27)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{n(n-1)}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{45}{n^m}-\dfrac{18n+27}{n^m}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{n(n-1)}{2n^m}$

当 m=2 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}=-\dfrac{1}{2}$，当 m>2 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}=0$，所以 m=2

20、(本小题满分 12 分)

A 是由定义在$[2,4]$上且满足如下条件的函数$\varphi(x)$组成的集合：①对任意$x\in[1,2]$，都有$\varphi(2x)\in(1,2)$ ；②存在常数$L(0<L<1)$，使得对任意的$x_1,x_2\in[1,2]$，都有$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

（Ⅰ）设$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x},x\in[2,4]$，证明：$\varphi(x)\in A$

(Ⅱ)设$\varphi(x)\in A$，如果存在$x_0\in(1,2)$，使得$x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的x_0是唯一的;

(III)设$\varphi(x)\in A$，任取$x_l\in(1,2)$，令$x_{n+1}=\varphi(2x_n),n=1,2,\cdots$，证明:给定正整数 k,对任意

的正整数 p, 成立不等式$|x_{k+l}-x_k|\le\dfrac{L^{k+1}}{1-L}|x_2-x_1|$

解: 对任意$x\in[1,2]$, $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+2x},x\in[1,2]$, $\sqrt[3]{3}\le\varphi(2x)\le\sqrt[3]{5}$, $1<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{5}<2$, 所以$\varphi(2x)\in(1,2)$

对任意的$x_1,x_2\in[1,2]$,

$$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|=|x_1-x_2|\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)}^2},$$

$3<\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)}$, 所以 0<

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)}^2}$$

$<\dfrac{2}{3}$, 令 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)}^2}=L$, $0<L<1$,

$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

所以$\varphi(x)\in A$

反证法: 设存在两个$x_0,x_0'\in(1,2),x_0\ne x_0'$使得$x_0=\varphi(2x_0)$, $x_0'=\varphi(2x_0')$则

由$|\varphi(2x_0)-\varphi(2x_0')|\le L|x_0-x_0'|$, 得$|x_0-x_0'|\le L|x_0-x_0'|$, 所以$L\ge1$, 矛盾, 故结论成立。

$|x_3-x_2|=|\varphi(2x_2)-\varphi(2x_1)|\le L|x_2-x_1|$, 所以$|x_{n+1}-x_n|\le L^{n-1}|x_2-x_1|$

$$|x_{k+p}-x_k|=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots(x_{k+1}-x_k)|\le\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$$

$$\le|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots|x_{k+1}-x_k|\le L^{k+p-2}|x_2-x_1|+L^{k+p-3}|x_2-x_1|+\cdots$$

$$L^{k-1}|x_2-x_1|\le\frac{L^{K-1}}{1-L}|x_2-x_1|$$