2017年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）已知集合A={x|x＜1}，B={x|3^x＜1}，则（　　）

A．A∩B={x|x＜0}　B．A∪B=R　C．A∪B={x|x＞1}　D．A∩B=∅

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题；37：集合思想；4O：定义法；5J：集合．

【分析】先分别求出集合A和B，再求出A∩B和A∪B，由此能求出结果．

【解答】解：∵集合A={x|x＜1}，

B={x|3^x＜1}={x|x＜0}，

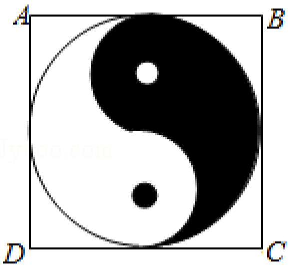
∴A∩B={x|x＜0}，故A正确，D错误；

A∪B={x|x＜1}，故B和C都错误．

故选：A．

【点评】本题考查交集和并集求法及应用，是基础题，解题时要认真审题，注意交集、并集定义的合理运用．

2．（5分）如图，正方形ABCD内的图形来自中国古代的太极图．正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称．在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是（　　）



A．$\frac{1}{4}$　B．$\frac{\pi}{8}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{\pi}{4}$

【考点】CF：几何概型．

【专题】35：转化思想；4O：定义法；5I：概率与统计．

【分析】根据图象的对称性求出黑色图形的面积，结合几何概型的概率公式进行求解即可．

【解答】解：根据图象的对称性知，黑色部分为圆面积的一半，设圆的半径为1，则正方形的边长为2，

则黑色部分的面积$S=\frac{\pi}{2}$，

则对应概率$P=\frac{\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{\pi}{8}$，

故选：B．

【点评】本题主要考查几何概型的概率计算，根据对称性求出黑色阴影部分的面积是解决本题的关键．

3．（5分）设有下面四个命题

p_1：若复数z满足$\frac{1}{z}\in R$，则$z\in R$；

p_2：若复数z满足$z^2\in R$，则$z\in R$；

p_3：若复数z_1，z_2满足$z_1z_2\in R$，则$z_1=\overline{z_2}$；

p_4：若复数$z\in R$，则$\overline{z}\in R$．

其中的真命题为（　　）

A．p_1，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_2，p_3　　D．p_2，p_4

【考点】2K：命题的真假判断与应用；A1：虚数单位i、复数；A5：复数的运算．

【专题】2A：探究型；5L：简易逻辑；5N：数系的扩充和复数．

【分析】根据复数的分类，有复数性质，逐一分析给定四个命题的真假，可得答案．

【解答】解：若复数z满足$\frac{1}{z}\in R$，则$z\in R$，故命题p_1为真命题；

p_2：复数$z=i$满足$z^2=-1\in R$，则$z\notin R$，故命题p_2为假命题；

p_3：若复数$z_1=i$，$z_2=2i$满足$z_1z_2\in R$，但$z_1\neq\overline{z_2}$，故命题p_3为假命题；

p_4：若复数$z\in R$，则$\overline{z}=z\in R$，故命题p_4为真命题．

故选：B．

【点评】本题以命题的真假判断与应用为载体，考查了复数的运算，复数的分类，复数的运算性质，难度不大，属于基础题．

4．（5分）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【考点】84：等差数列的通项公式；85：等差数列的前n项和．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】利用等差数列通项公式及前n项和公式列出方程组，求出首项和公差，由此能求出$\{a_n\}$的公差．

【解答】解：$\because S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_4+a_5=24$，$S_6=48$，

$$\therefore\begin{cases}a_1+3d+a_1+4d=24\\6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=48\end{cases},$$

解得$a_1=-2$，$d=4$，

$\therefore\{a_n\}$的公差为4．

故选：C．

【点评】本题考查等差数列公式的求法及应用，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列的性质的合理运用．

5．（5分）函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减，且为奇函数．若$f(1)=-1$，则满足$-1\leq f(x-2)\leq1$的x的取值范围是（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

【考点】3P：抽象函数及其应用．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】由已知中函数的单调性及奇偶性，可将不等式﹣$1\le f$（$x-2$）≤ 1化为﹣$1\le x-2\le 1$，解得答案．

【解答】解：∵函数f（x）为奇函数．

若f（1）=﹣1，则f（﹣1）=1，

又∵函数f（x）在（﹣∞，+∞）单调递减，﹣$1\le f$（$x-2$）≤ 1，

∴f（1）≤f（x﹣2）≤f（﹣1），

∴﹣$1\le x-2\le 1$，

解得：x∈[1，3]，

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是抽象函数及其应用，函数的单调性，函数的奇偶性，难度中档．

6．（5分）（$1+\frac{1}{x^2}$）（$1+x$）^{6}展开式中x^2的系数为（　　）

A．15　　B．20　　C．30　　D．35

【考点】DA：二项式定理．

【专题】35：转化思想；4R：转化法．

【分析】直接利用二项式定理的通项公式求解即可．

【解答】解：（$1+\frac{1}{x^2}$）（$1+x$）^{6}展开式中：

若（$1+\frac{1}{x^2}$）=（$1+x^{-2}$）提供常数项1，则（$1+x$）^{6}提供含有x^2的项，可得展开式中x^2的系数：

若（$1+\frac{1}{x^2}$）提供x^{-2}项，则（$1+x$）^{6}提供含有x^4的项，可得展开式中x^2的系数：

由（$1+x$）^{6}通项公式可得$C_6^r x^r$．

可知r=2时，可得展开式中x^2的系数为$C_6^2=15$．

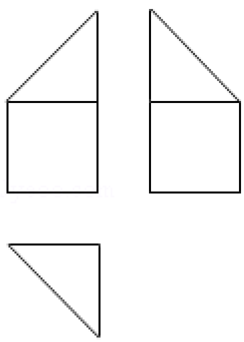
可知r=4时，可得展开式中x^2的系数为$C_6^4=15$．

$(1+\frac{1}{x^2})(1+x)^6$展开式中x^2的系数为：15+15=30．

故选：C．

【点评】本题主要考查二项式定理的知识点，通项公式的灵活运用．属于基础题．

7．（5分）某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为2，俯视图为等腰直角三角形，该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为（　　）



A．10　　B．12　　C．14　　D．16

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何．

【分析】由三视图可得直观图，由图形可知该立体图中只有两个相同的梯形的面，根据梯形的面积公式计算即可

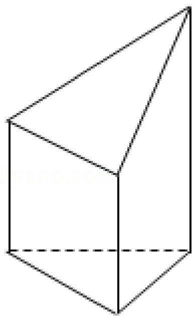
【解答】解：由三视图可画出直观图，

该立体图中只有两个相同的梯形的面，

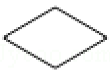
$S_{梯形}=\frac{1}{2}\times2\times(2+4)=6$，

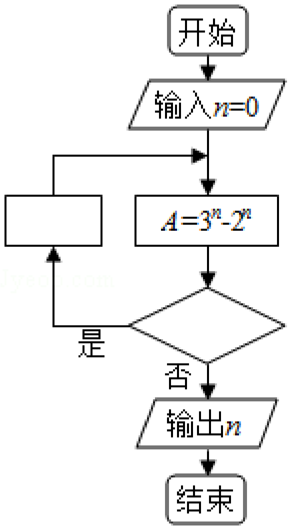
∴这些梯形的面积之和为6×2=12，

故选：B．



【点评】本题考查了体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

8．（5分）如图程序框图是为了求出满足$3^n-2^n>1000$的最小偶数n，那么在和两个空白框中，可以分别填入（　　）



A．A＞1000和n=n+1　　B．A＞1000和n=n+2

C．A≤1000和n=n+1　　D．A≤1000和n=n+2

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；38：对应思想；49：综合法；5K：算法和程序框图．

【分析】通过要求A＞1000时输出且框图中在“否”时输出确定“”内不能输入“A＞1000”，进而通过偶数的特征确定n=n+2．

【解答】解：因为要求A＞1000时输出，且框图中在“否”时输出，

所以“”内不能输入“A＞1000”，

又要求n为偶数，且n的初始值为0，

所以“”中n依次加2可保证其为偶数，

所以D选项满足要求，

故选：D.

【点评】本题考查程序框图，属于基础题，意在让大部分考生得分.

9．（5分）已知曲线C_1：y=cosx，C_2：y=sin（2x+$\frac{2\pi}{3}$），则下面结论正确的是（　　）

A．把C_1上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线C_2

B．把C_1上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线C_2

C．把C_1上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线C_2

D．把C_1上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线C_2

【考点】HJ：函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换.

【专题】11：计算题；35：转化思想；57：三角函数的图像与性质.

【分析】利用三角函数的伸缩变换以及平移变换转化求解即可.

【解答】解：把C_1上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数y=cos2x图象，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到函数y=cos2（x+$\frac{\pi}{12}$）=cos（2x+$\frac{\pi}{6}$）=sin（2x+$\frac{2\pi}{3}$）的图象，即曲线C_2，

故选：D.

【点评】本题考查三角函数的图象变换，诱导公式的应用，考查计算能力．

10．（5分）已知F为抛物线C：$y^2=4x$的焦点，过F作两条互相垂直的直线l_1，l_2，直线l_1与C交于A、B两点，直线l_2与C交于D、E两点，则|AB|+|DE|的最小值为（　　）

A．16　　B．14　　C．12　　D．10

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4R：转化法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】方法一：根据题意可判断当A与D，B，E关于x轴对称，即直线DE的斜率为1，|AB|+|DE|最小，根据弦长公式计算即可．

方法二：设直线l_1的倾斜角为θ，则l_2的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\theta$，利用焦点弦的弦长公式分别表示出|AB|，|DE|，整理求得答案

【解答】解：如图，$l_1\perp l_2$，直线l_1与C交于A、B两点，

直线l_2与C交于D、E两点，

要使|AB|+|DE|最小，

则A与D，B，E关于x轴对称，即直线DE的斜率为1，

又直线l_2过点（1，0），

则直线l_2的方程为$y=x-1$，

联立方程组$\begin{cases}y^2=4x\\y=x-1\end{cases}$，则$y^2-4y-4=0$，

$\therefore y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-4$，

$\therefore |DE|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\bullet|y_1-y_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{32}=8$，

$\therefore$|AB|+|DE|的最小值为2|DE|=16，

方法二：设直线l_1的倾斜角为θ，则l_2的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\theta$，

根据焦点弦长公式可得$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}$

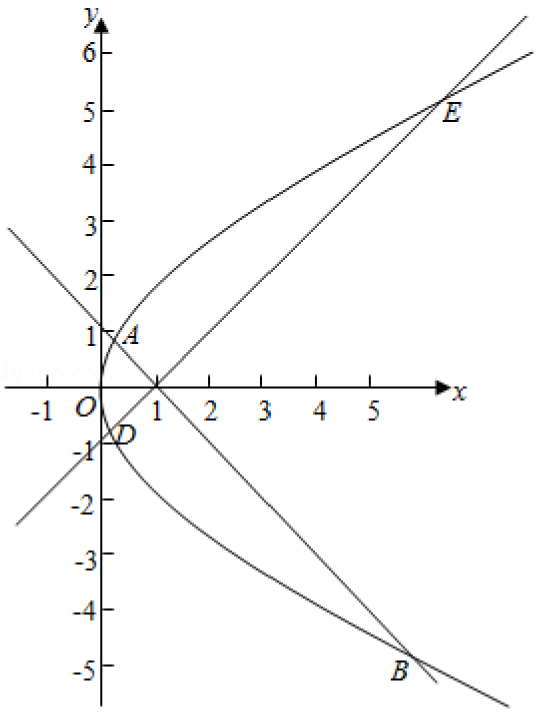
$|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\dfrac{2p}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\cos^2\theta}$

$\therefore|AB|+|DE|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}$,

$\because 0<\sin^2 2\theta\leq 1$,

∴当$\theta=45°$时，$|AB|+|DE|$的最小，最小为16，

故选：A.



【点评】本题考查了抛物线的简单性质以及直线和抛物线的位置关系，弦长公式，对于过焦点的弦，能熟练掌握相关的结论，解决问题事半功倍属于中档题.

11．（5分）设x、y、z为正数，且$2^x=3^y=5^z$，则（　　）

A．$2x<3y<5z$　　B．$5z<2x<3y$　　C．$3y<5z<2x$　　D．$3y<2x<5z$

【考点】72：不等式比较大小.

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用；59：不等式的解法及应用.

【分析】x、y、z为正数，令$2^x=3^y=5^z=k>1$．$\lg k>0$．可得$x=\dfrac{\lg k}{\lg 2}$，$y=\dfrac{\lg k}{\lg 3}$，z=

$\frac{lgk}{lg5}$．可得$3y=\frac{lgk}{lg\sqrt[3]{3}}$，$2x=\frac{lgk}{lg\sqrt{2}}$，$5z=\frac{lgk}{lg\sqrt[5]{5}}$．根据$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$，

$\sqrt{2}=\sqrt[10]{32}>\sqrt[10]{25}=\sqrt[5]{5}$．即可得出大小关系．

另解：x、y、z为正数，令$2^x=3^y=5^z=k>1$．$lgk>0$．可得$x=\frac{lgk}{lg2}$，$y=\frac{lgk}{lg3}$，$z=\frac{lgk}{lg5}$

．$\frac{2x}{3y}=\frac{2}{3}\times\frac{lg3}{lg2}=\frac{lg9}{lg8}>1$，可得$2x>3y$，同理可得$5z>2x$．

【解答】解：x、y、z为正数，

令$2^x=3^y=5^z=k>1$．$lgk>0$．

则$x=\frac{lgk}{lg2}$，$y=\frac{lgk}{lg3}$，$z=\frac{lgk}{lg5}$．

$\therefore 3y=\frac{lgk}{lg\sqrt[3]{3}}$，$2x=\frac{lgk}{lg\sqrt{2}}$，$5z=\frac{lgk}{lg\sqrt[5]{5}}$．

$\because \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$，$\sqrt{2}=\sqrt[10]{32}>\sqrt[10]{25}=\sqrt[5]{5}$．

$\therefore lg\sqrt[3]{3}>lg\sqrt{2}>lg\sqrt[5]{5}>0$．

$\therefore 3y<2x<5z$．

另解：x、y、z为正数，

令$2^x=3^y=5^z=k>1$．$lgk>0$．

则$x=\frac{lgk}{lg2}$，$y=\frac{lgk}{lg3}$，$z=\frac{lgk}{lg5}$．

$\therefore\frac{2x}{3y}=\frac{2}{3}\times\frac{lg3}{lg2}=\frac{lg9}{lg8}>1$，可得$2x>3y$，

$\frac{5z}{2x}=\frac{5}{2}\times\frac{lg2}{lg5}=\frac{lg2^5}{lg5^2}>1$．可得$5z>2x$．

综上可得：$5z>2x>3y$．

解法三：对k取特殊值，也可以比较出大小关系．

故选：D．

【点评】本题考查了对数函数的单调性、换底公式、不等式的性质，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

12．（5分）几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软

件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，…，其中第一项是2^0，接下来的两项是2^0，2^1，再接下来的三项是2^0，2^1，2^2，依此类推．求满足如下条件的最小整数N：N＞100且该数列的前N项和为2的整数幂．那么该款软件的激活码是（　　）

A．440　　　　B．330　　　　C．220　　　　D．110

【考点】8E：数列的求和．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；54：等差数列与等比数列．

【分析】方法一：由数列的性质，求得数列$\{b_n\}$的通项公式及前n项和，可知当N为$\frac{n(n+1)}{2}$时（$n\in N_+$），数列$\{a_n\}$的前N项和为数列$\{b_n\}$的前n项和，即为$2^{n+1}-n-2$，容易得到N＞100时，n≥14，分别判断，即可求得该款软件的激活码；

方法二：由题意求得数列的每一项，及前n项和$S_n=2^{n+1}-2-n$，及项数，由题意可知：2^{n+1}为2的整数幂．只需将－2－n消去即可，分别即可求得N的值．

【解答】解：设该数列为$\{a_n\}$，设$b_n=a_{\frac{(n-1)n}{2}+1}+\ldots+a_{\frac{n(n+1)}{2}}=2^{n+1}-1$，（$n\in N_+$），则$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}a_i$，

由题意可设数列$\{a_n\}$的前N项和为S_N，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$T_n=2^1-1+2^2-1+\ldots+2^{n+1}-1=2^{n+1}-n-2$，

可知当N为$\frac{n(n+1)}{2}$时（$n\in N_+$），数列$\{a_n\}$的前N项和为数列$\{b_n\}$的前n项和，即为$2^{n+1}-n-2$，

容易得到N＞100时，n≥14，

A项，由$\frac{29\times 30}{2}=435$，440=435+5，可知$S_{440}=T_{29}+b_5=2^{30}-29-2+2^5-1=2^{30}$，故A项符合题意．

B项，仿上可知$\frac{25\times 26}{2}=325$，可知$S_{330}=T_{25}+b_5=2^{26}-25-2+2^5-1=2^{26}+4$，显然不为2的整数幂，故B项不符合题意．

C项，仿上可知$\frac{20\times 21}{2}=210$，可知$S_{220}=T_{20}+b_{10}=2^{21}-20-2+2^{10}-1=2^{21}+2^{10}-23$，

显然不为2的整数幂，故C项不符合题意．

D项，仿上可知$\frac{14\times15}{2}$=105，可知$S_{110}=T_{14}+b_5=2^{15}-14-2+2^5-1=2^{15}+15$，显然不为2的整数幂，故D项不符合题意．

故选A．

方法二：由题意可知：$\underbrace{2^0}_{第一项}$，$\underbrace{2^0，2^1}_{第二项}$，$\underbrace{2^0，2^1，2^2}_{第三项}$，…

$\underbrace{2^0，2^1，2^2，\cdots，2^{n-1}}_{第n项}$，

根据等比数列前n项和公式，求得每项和分别为：2^1-1，2^2-1，2^3-1，…，2^n-1，

每项含有的项数为：1，2，3，…，n，

总共的项数为$N=1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}$，

所有项数的和为S_n：$2^1-1+2^2-1+2^3-1+\ldots+2^n-1=(2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n)-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$，

由题意可知：2^{n+1}为2的整数幂．只需将$-2-n$消去即可，

则①$1+2+(-2-n)=0$，解得：n=1，总共有$\frac{(1+1)\times1}{2}+2=3$，不满足N＞100，

②$1+2+4+(-2-n)=0$，解得：n=5，总共有$\frac{(1+5)\times5}{2}+3=18$，不满足N＞100，

③$1+2+4+8+(-2-n)=0$，解得：n=13，总共有$\frac{(1+13)\times13}{2}+4=95$，不满足N＞100，

④$1+2+4+8+16+(-2-n)=0$，解得：n=29，总共有$\frac{(1+29)\times29}{2}+5=440$，满足N＞100，

∴该款软件的激活码440．

故选：A．

【点评】本题考查数列的应用，等差数列与等比数列的前n项和，考查计算能力，属于难题．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．（5分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$___$2\sqrt{3}$___．

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】31：数形结合；4O：定义法；5A：平面向量及应用．

【分析】根据平面向量的数量积求出模长即可．

【解答】解：【解法一】向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，

$\therefore(\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\bullet\vec{b}+4\vec{b}^2$

$=2^2+4\times2\times1\times\cos60°+4\times1^2$

$=12$，

$\therefore|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

【解法二】根据题意画出图形，如图所示；

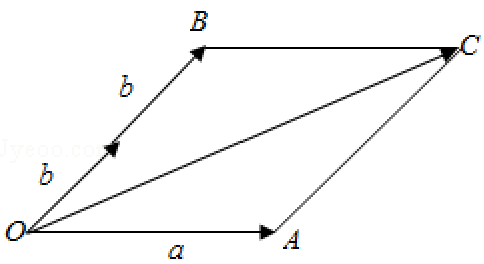
结合图形$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b}$;

在△OAC中，由余弦定理得

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°}=2\sqrt{3}$,

即$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.



【点评】本题考查了平面向量的数量积的应用问题，解题时应利用数量积求出模长，是基础题．

14．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\leqslant 1\\2x+y\geqslant -1\\x-y\leqslant 0\end{cases}$，则z=3x－2y的最小值为___﹣5___．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式．

【分析】由约束条件作出可行域，由图得到最优解，求出最优解的坐标，数形结合得答案．

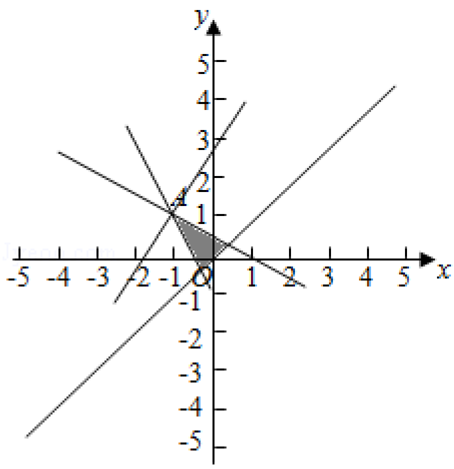
【解答】解：由x，y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\leqslant 1\\2x+y\geqslant -1\\x-y\leqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，

由图可知，目标函数的最优解为A，

联立$\begin{cases}x+2y=1\\2x+y=-1\end{cases}$，解得A（﹣1，1）．

∴z=3x﹣2y的最小值为﹣3×1﹣2×1=﹣5．

故答案为：﹣5．



【点评】本题考查了简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题．

15．（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右顶点为A，以A为圆心，b为半径作圆A，圆A与双曲线C的一条渐近线交于M、N两点．若∠MAN=

60°，则C的离心率为__$\frac{2\sqrt{3}}{3}$__.

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用已知条件，转化求解A到渐近线的距离，推出a，c的关系，然后求解双曲线的离心率即可.

【解答】解：双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右顶点为A（a，0），

以A为圆心，b为半径做圆A，圆A与双曲线C的一条渐近线交于M、N两点.

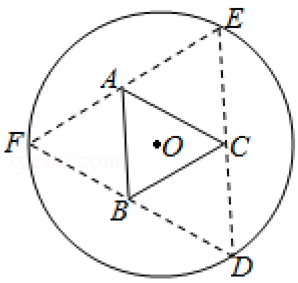
若∠MAN=60°，可得A到渐近线bx+ay=0的距离为：bcos30°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$b，

可得：$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$b，即$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得离心率为：e=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，点到直线的距离公式以及圆的方程的应用，考查转化思想以及计算能力.

16．（5分）如图，圆形纸片的圆心为O，半径为5cm，该纸片上的等边三角形ABC的中心为O．D、E、F为圆O上的点，△DBC，△ECA，△FAB分别是以BC，CA，AB为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以BC，CA，AB为折痕折起△DBC，△ECA，△FAB，使得D、E、F重合，得到三棱锥．当△ABC的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为__$4\sqrt{15}cm^3$__.



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题．

【分析】法一：由题，连接OD，交BC于点G，由题意得OD⊥BC，OG=$\frac{\sqrt{3}}{6}$BC，设OG=x，则BC=2$\sqrt{3}$x，DG=5﹣x，三棱锥的高h=$\sqrt{25-10x}$，求出$S_{\triangle ABC}$=3$\sqrt{3}x^2$，V=$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times h=\sqrt{3}\cdot\sqrt{25x^4-10x^5}$，令f（x）=25x⁴﹣10x⁵，x∈（0，$\frac{5}{2}$），f′（x）=100x³﹣50x⁴，f（x）≤f（2）=80，由此能求出体积最大值．

法二：设正三角形的边长为x，则OG=$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，FG=SG=5﹣$\frac{\sqrt{3}}{6}x$，SO=h=$\sqrt{SG^2-GO^2}=\sqrt{(5-\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2}=\sqrt{5(5-\frac{\sqrt{3}}{3})}$，由此能示出三棱锥的体积的最大值．

【解答】解法一：由题意，连接OD，交BC于点G，由题意得OD⊥BC，OG=$\frac{\sqrt{3}}{6}$BC，

即OG的长度与BC的长度成正比，

设OG=x，则BC=2$\sqrt{3}$x，DG=5﹣x，

三棱锥的高h=$\sqrt{DG^2-OG^2}=\sqrt{25-10x+x^2-x^2}=\sqrt{25-10x}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2\sqrt{3}x)^2=3\sqrt{3}x^2$，

则V=$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times h=\sqrt{3}x^2\times\sqrt{25-10x}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{25x^4-10x^5}$，

令f（x）=25x⁴﹣10x⁵，x∈（0，$\frac{5}{2}$），f′（x）=100x³﹣50x⁴，

令f′（x）≥0，即x⁴﹣2x³≤0，解得x≤2，

则f（x）≤f（2）=80，

∴V≤$\sqrt{3}\times\sqrt{80}$=4$\sqrt{15}$cm³，∴体积最大值为4$\sqrt{15}$cm³．

故答案为：4$\sqrt{15}$cm³．

解法二：如图，设正三角形的边长为x，则OG=$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

∴FG=SG=5﹣$\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

SO=h=$\sqrt{SG^2-GO^2}=\sqrt{(5-\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2}=\sqrt{5(5-\frac{\sqrt{3}}{3})}$，

∴三棱锥的体积V=$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$

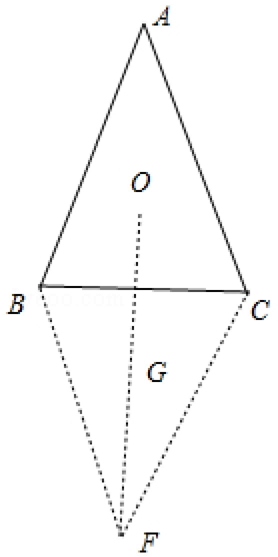
$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{5(5-\frac{\sqrt{3}}{3}x)}=\frac{\sqrt{15}}{12}\sqrt{5x^4-\frac{\sqrt{3}}{3}x^5}$，

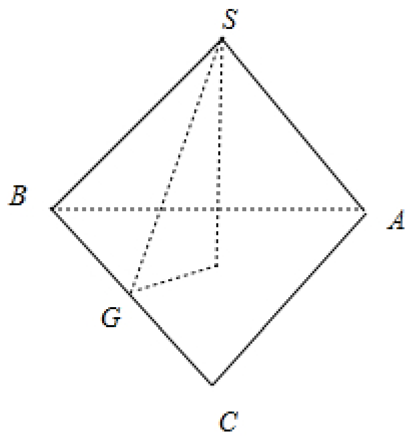
令b（x）=$5x^4-\frac{\sqrt{3}}{3}x^5$，则$b'(x)=20x^3-\frac{5\sqrt{3}}{3}x^4$，

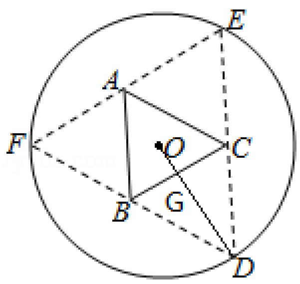
令b'（x）=0，则$4x^3-\frac{x^4}{\sqrt{3}}=0$，解得$x=4\sqrt{3}$，

∴$V_{max}=\frac{\sqrt{75}}{12}\times48\times\sqrt{5-4}=4\sqrt{15}$（$cm^3$）．

故答案为：$4\sqrt{15}cm^3$．







【点评】本题考查三棱锥的体积的最大值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系、函数性质、导数等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题．

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

17．（12分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知△ABC的面积为$\frac{a^2}{3\sin A}$.

（1）求sinBsinC；

（2）若6cosBcosC=1，a=3，求△ABC的周长.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】11：计算题；33：函数思想；4R：转化法；56：三角函数的求值；58：解三角形.

【分析】（1）根据三角形面积公式和正弦定理可得答案，

（2）根据两角余弦公式可得$\cos A=\frac{1}{2}$，即可求出$A=\frac{\pi}{3}$，再根据正弦定理可得bc=8，根据余弦定理即可求出b+c，问题得以解决.

【解答】解：（1）由三角形的面积公式可得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a^2}{3\sin A}$，

∴3csinBsinA=2a，

由正弦定理可得3sinCsinBsinA=2sinA，

∵sinA≠0，

∴$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$；

（2）∵6cosBcosC=1，

∴$\cos B\cos C=\frac{1}{6}$，

∴$\cos B\cos C-\sin B\sin C=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}$，

∴$\cos(B+C)=-\frac{1}{2}$，

∴$\cos A=\frac{1}{2}$，

∵0＜A＜π，

∴$A=\frac{\pi}{3}$，

∵$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，

∴$\sin B\sin C=\frac{b}{2R}\bullet\frac{c}{2R}=\frac{bc}{(2\sqrt{3})^2}=\frac{bc}{12}=\frac{2}{3}$，

∴$bc=8$，

∵$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

∴$b^2+c^2-bc=9$，

∴（$b+c$）$^2=9+3cb=9+24=33$，

∴$b+c=\sqrt{33}$

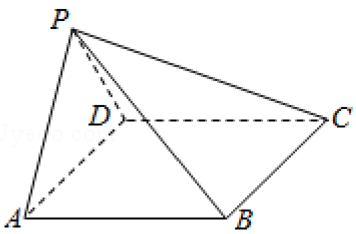
∴周长$a+b+c=3+\sqrt{33}$.

【点评】本题考查了三角形的面积公式和两角和的余弦公式和诱导公式和正弦定理余弦定理，考查了学生的运算能力，属于中档题.

18．（12分）如图，在四棱锥P﹣ABCD中，AB∥CD，且∠BAP=∠CDP=90°.

（1）证明：平面PAB⊥平面PAD；

（2）若PA=PD=AB=DC，∠APD=90°，求二面角A﹣PB﹣C的余弦值.



【考点】LY：平面与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】15：综合题；31：数形结合；41：向量法；5G：空间角.

【分析】（1）由已知可得PA⊥AB，PD⊥CD，再由AB∥CD，得AB⊥PD，利用线面垂直的判定可得AB⊥平面PAD，进一步得到平面PAB⊥平面PAD；

（2）由已知可得四边形ABCD为平行四边形，由（1）知AB⊥平面PAD，得到AB⊥AD，则四边形ABCD为矩形，设PA=AB=2a，则AD=$2\sqrt{2}a$．取AD中点O，BC中点E，连接PO、OE，以O为坐标原点，分别以OA、OE、OP所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系，求出平面PBC的一个法向量，再证明PD⊥平面PAB，得$\overrightarrow{PD}$为平面PAB的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得二面角A﹣PB﹣C的余弦值.

【解答】（1）证明：∵∠BAP=∠CDP=90°，∴PA⊥AB，PD⊥CD，

∵AB∥CD，∴AB⊥PD，

又∵PA∩PD=P，且PA⊂平面PAD，PD⊂平面PAD，

∴AB⊥平面PAD，又AB⊂平面PAB，

∴平面PAB⊥平面PAD；

（2）解：∵AB∥CD，AB=CD，∴四边形ABCD为平行四边形，

由（1）知AB⊥平面PAD，∴AB⊥AD，则四边形ABCD为矩形，

在△APD中，由PA=PD，∠APD=90°，可得△PAD为等腰直角三角形，

设PA=AB=2a，则AD=$2\sqrt{2}a$.

取AD中点O，BC中点E，连接PO、OE，

以O为坐标原点，分别以OA、OE、OP所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系，

则：D（$-\sqrt{2}a$，0，0），B（$\sqrt{2}a$，2a，0），P（0，0，$\sqrt{2}a$），C（$-\sqrt{2}a$，2a，0）.

$\overrightarrow{PD}=(-\sqrt{2}a,\ 0,\ -\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2}a,\ 2a,\ -\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$.

设平面PBC的一个法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}\sqrt{2}ax+2ay-\sqrt{2}az=0\\ -2\sqrt{2}ax=0\end{cases}$，取y=1，得$\vec{n}=(0,\ 1,\ \sqrt{2})$.

∵AB⊥平面PAD，AD⊂平面PAD，∴AB⊥PD，

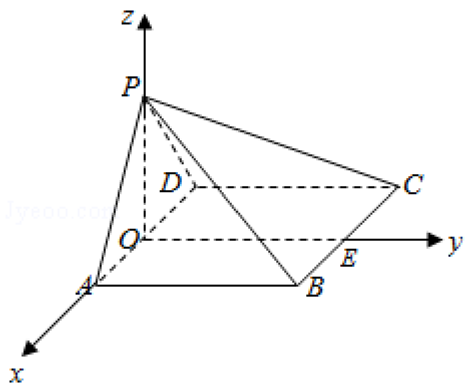
又PD⊥PA，PA∩AB=A，

∴PD⊥平面PAB，则$\overrightarrow{PD}$为平面PAB的一个法向量，$\overrightarrow{PD}=(-\sqrt{2}a,\ 0,\ -\sqrt{2}a)$.

∴$\cos<\overrightarrow{PD},\ \vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PD}||\vec{n}|}=\dfrac{-2a}{2a\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由图可知，二面角A﹣PB﹣C为钝角，

∴二面角A﹣PB﹣C的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查平面与平面垂直的判定，考查空间想象能力和思维能力，训练了利用空间向量求二面角的平面角，是中档题．

19．（12分）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取16个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布N（μ，σ^2）．

（1）假设生产状态正常，记X表示一天内抽取的16个零件中其尺寸在（μ﹣3σ，μ+3σ）之外的零件数，求P（X≥1）及X的数学期望；

（2）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在（μ﹣3σ，μ+3σ）之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．

（ⅰ）试说明上述监控生产过程方法的合理性；

（ⅱ）下面是检验员在一天内抽取的16个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得$\overline{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2)}\approx0.212$，其中$x_i$为抽取的第i个零件的尺寸，i=1，2，…，16．

用样本平均数$\overline{x}$作为μ的估计值$\hat{\mu}$，用样本标准差s作为σ的估计值$\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的数据，用剩下的数据估计μ和σ（精确到0.01）．

附：若随机变量Z服从正态分布N（μ，σ^2），则P（$\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma$）=0.9974，$0.9974^{16}\approx0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx0.09$.

【考点】CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4A：数学模型法；5I：概率与统计.

【分析】（1）通过P（X=0）可求出P（X≥1）=1﹣P（X=0）=0.0408，利用二项分布的期望公式计算可得结论；

（2）（ⅰ）由（1）及知落在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）之外为小概率事件可知该监控生产过程方法合理；

（ⅱ）通过样本平均数$\overline{x}$、样本标准差s估计$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$可知（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）=（9.334，10.606），进而需剔除（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的数据9.22，利用公式计算即得结论.

【解答】解：（1）由题可知尺寸落在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）之内的概率为0.9974，

则落在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）之外的概率为1﹣0.9974=0.0026，

因为P（X=0）=$C_{16}^{0}\times(1-0.9974)^{0}\times0.9974^{16}\approx0.9592$，

所以P（X≥1）=1﹣P（X=0）=0.0408，

又因为X～B（16，0.0026），

所以E（X）=16×0.0026=0.0416；

（2）（ⅰ）如果生产状态正常，一个零件尺寸在（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的概率只有0.0026，一天内抽取的16个零件中，出现尺寸在（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的零件的概率只有0.0408，发生的概率很小.因此一旦发生这种状况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的.

（ⅱ）由$\overline{x}$=9.97，s≈0.212，得μ的估计值为$\hat{\mu}$=9.97，σ的估计值为$\hat{\sigma}$=0.212，由样本数据可以看出一个

零件的尺寸在（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外，因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的数据9.22，剩下的数据的平均数为

$\frac{1}{15}$（16×9.97﹣9.22）=10.02，

因此μ的估计值为10.02．

$\sum_{i=1}^{16} x_i^2=16\times0.212^2+16\times9.97^2\approx1591.134$，

剔除（$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}$）之外的数据9.22，剩下的数据的样本方差为

$\frac{1}{15}$（$1591.134-9.22^2-15\times10.02^2$）≈0.008，

因此σ的估计值为$\sqrt{0.008}$≈0.09．

【点评】本题考查正态分布，考查二项分布，考查方差、标准差，考查概率的计算，考查运算求解能力，注意解题方法的积累，属于中档题．

20．（12分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0），四点$P_1$（1，1），$P_2$（0，1），$P_3$（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），$P_4$（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）中恰有三点在椭圆C上．

（1）求C的方程；

（2）设直线l不经过P_2点且与C相交于A，B两点．若直线P_2A与直线P_2B的斜率的和为﹣1，证明：l过定点．

【考点】K3：椭圆的标准方程；KI：圆锥曲线的综合．

【专题】14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题．

【分析】（1）根据椭圆的对称性，得到P_2（0，1），P_3（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_4（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）三点在椭圆C上．把P_2（0，1），P_3（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）代入椭圆C，求出$a^2=4$，$b^2=1$，由此能求出椭圆C的方程．

（2）当斜率不存在时，不满足；当斜率存在时，设l：y=kx+t，（t≠1），联立$\begin{cases}y=kx+t\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，得（$1+4k^2$）$x^2+8ktx+4t^2-4=0$，由此利用根的判别式、韦达

定理、直线方程，结合已知条件能证明直线l过定点（2，﹣1）．

【解答】解：（1）根据椭圆的对称性，P_3（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_4（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）两点必在椭圆C上，

又P_4的横坐标为1，∴椭圆必不过P_1（1，1），

∴P_2（0，1），P_3（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_4（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）三点在椭圆C上．

把P_2（0，1），P_3（﹣1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）代入椭圆C，得：

$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，解得$a^2=4$，$b^2=1$，

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

证明：（2）①当斜率不存在时，设l：x=m，A（m，y_A），B（m，﹣y_A），

∵直线P_2A与直线P_2B的斜率的和为﹣1，

∴$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_A-1}{m}+\frac{-y_A-1}{m}=\frac{-2}{m}=-1$，

解得m=2，此时l过椭圆右顶点，不存在两个交点，故不满足．

②当斜率存在时，设l：y=kx+t，（t≠1），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立$\begin{cases}y=kx+t\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，整理，得$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，

$x_1+x_2=\frac{-8kt}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$，

则$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{x_2(kx_1+t)-x_2+x_1(kx_2+t)-x_1}{x_1x_2}$

$=\frac{\frac{8kt^2-8k-8kt^2+8kt}{1+4k^2}}{\frac{4t^2-4}{1+4k^2}}=\frac{8k(t-1)}{4(t+1)(t-1)}=-1$，又t≠1，

∴t=﹣2k﹣1，此时△=﹣64k，存在k，使得△＞0成立，

∴直线l的方程为y=kx﹣2k﹣1，

当$x=2$时，$y=-1$，

∴l过定点（2，﹣1）．

【点评】本题考查椭圆方程的求法，考查椭圆、直线方程、根的判别式、韦达定理、直线方程位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想，是中档题．

21．（12分）已知函数$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$．

（1）讨论f（x）的单调性；

（2）若f（x）有两个零点，求a的取值范围．

【考点】52：函数零点的判定定理；6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】32：分类讨论；35：转化思想；4R：转化法；53：导数的综合应用．

【分析】（1）求导，根据导数与函数单调性的关系，分类讨论，即可求得f（x）单调性；

（2）由（1）可知：当a＞0时才有两个零点，根据函数的单调性求得f（x）最小值，由$f(x)_{min}<0$，$g(a)=a\ln a+a-1$，$a>0$，求导，由$g(a)_{min}=g(e^{-2})=e^{-2}\ln e^{-2}+e^{-2}-1=-\frac{1}{e^{2}}-1$，$g(1)=0$，即可求得a的取值范围．

（1）求导，根据导数与函数单调性的关系，分类讨论，即可求得f（x）单调性；

（2）分类讨论，根据函数的单调性及函数零点的判断，分别求得函数的零点，即可求得a的取值范围．

【解答】解：（1）由$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，求导$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1$，

当$a=0$时，$f'(x)=-2e^{x}-1<0$，

∴当x∈R，f（x）单调递减，

当a＞0时，$f'(x)=(2e^{x}+1)(ae^{x}-1)=2a(e^{x}+\frac{1}{2})(e^{x}-\frac{1}{a})$，

令$f'(x)=0$，解得：$x=\ln\frac{1}{a}$，

当$f'(x)>0$，解得：$x>\ln\frac{1}{a}$，

当$f'(x)<0$，解得：$x<\ln\frac{1}{a}$，

∴$x\in(-\infty,\ \ln\frac{1}{a})$时，$f(x)$单调递减，$x\in(\ln\frac{1}{a},\ +\infty)$单调递增；

当$a<0$时，$f'(x)=2a(e^x+\frac{1}{2})(e^x-\frac{1}{a})<0$，恒成立，

∴当$x\in R$，$f(x)$单调递减，

综上可知：当$a\leq0$时，$f(x)$在R单调减函数，

当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ \ln\frac{1}{a})$是减函数，在$(\ln\frac{1}{a},\ +\infty)$是增函数；

（2）①若$a\leq0$时，由（1）可知：$f(x)$最多有一个零点，

当$a>0$时，$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，

当$x\to-\infty$时，$e^{2x}\to0$，$e^x\to0$，

∴当$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

当$x\to\infty$，$e^{2x}\to+\infty$，且远远大于e^x和x，

∴当$x\to\infty$，$f(x)\to+\infty$，

∴函数有两个零点，$f(x)$的最小值小于0即可，

由$f(x)$在$(-\infty,\ \ln\frac{1}{a})$是减函数，在$(\ln\frac{1}{a},\ +\infty)$是增函数，

∴$f(x)_{min}=f(\ln\frac{1}{a})=a\times(\frac{1}{a^2})+(a-2)\times\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$，

∴$1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$，即$\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1>0$，

设$t=\frac{1}{a}$，则$g(t)=\ln t+t-1$，$(t>0)$，

求导$g'(t)=\frac{1}{t}+1$，由$g(1)=0$，

∴$t=\frac{1}{a}>1$，解得：$0<a<1$，

∴a的取值范围$(0,\ 1)$．

方法二：（1）由$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，求导$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1$，

当$a=0$时，$f'(x)=-2e^x-1<0$，

∴当$x\in R$，$f(x)$单调递减，

当$a>0$时，$f'(x)=(2e^x+1)(ae^x-1)=2a(e^x+\frac{1}{2})(e^x-\frac{1}{a})$，

令$f'(x)=0$，解得：$x=-\ln a$，

当f′（x）>0，解得：x>－lna，

当f′（x）<0，解得：x<－lna，

∴x∈（－∞，－lna）时，f（x）单调递减，x∈（－lna，+∞）单调递增；

当a<0时，f′（x）=2a（$e^x+\frac{1}{2}$）（$e^x-\frac{1}{a}$）<0，恒成立，

∴当x∈R，f（x）单调递减，

综上可知：当a≤0时，f（x）在R单调减函数，

当a>0时，f（x）在（－∞，－lna）是减函数，在（－lna，+∞）是增函数；

（2）①若a≤0时，由（1）可知：f（x）最多有一个零点，

②当a>0时，由（1）可知：当x=－lna时，f（x）取得最小值，$f(x)_{min}$=f（－lna）=$1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}$，

当a=1，时，f（－lna）=0，故f（x）只有一个零点，

当a∈（1，+∞）时，由$1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}>0$，即f（－lna）>0，

故f（x）没有零点，

当a∈（0，1）时，$1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$，f（－lna）<0，

由f（－2）=$ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>-2e^{-2}+2>0$，

故f（x）在（－∞，－lna）有一个零点，

假设存在正整数n_0，满足$n_0>\ln(\frac{3}{a}-1)$，则$f(n_0)=e^{n_0}(ae^{n_0}+a-2)-n_0>e^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$，

由$\ln(\frac{3}{a}-1)>-\ln a$，

因此在（－lna，+∞）有一个零点.

∴a的取值范围（0，1）.

【点评】本题考查导数的综合应用，考查利用导数求函数单调性及最值，考查函数零点的判断，考查计算能力，考查分类讨论思想，属于中档题.

[选修4-4，坐标系与参数方程]

22．（10分）在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta\end{cases}$，（θ为参数

），直线l的参数方程为$\begin{cases}x=a+4t\\y=1-t\end{cases}$，（t为参数）.

（1）若a=﹣1，求C与l的交点坐标；

（2）若C上的点到l距离的最大值为$\sqrt{17}$，求a.

【考点】IT：点到直线的距离公式；QH：参数方程化成普通方程.

【专题】34：方程思想；4Q：参数法；5S：坐标系和参数方程.

【分析】（1）将曲线C的参数方程化为标准方程，直线l的参数方程化为一般方程，联立两方程可以求得焦点坐标；

（2）曲线C上的点可以表示成P（3cosθ，sinθ），θ∈[0，2π），运用点到直线距离公式可以表示出P到直线l的距离，再结合距离最大值为$\sqrt{17}$进行分析，可以求出a的值.

【解答】解：（1）曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（θ为参数），化为标准方程是：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

a=﹣1时，直线l的参数方程化为一般方程是：x+4y﹣3=0；

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\x+4y-3=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{21}{25}\\y=\frac{24}{25}\end{cases}$，

所以椭圆C和直线l的交点为（3，0）和（$-\frac{21}{25}$，$\frac{24}{25}$）.

（2）l的参数方程$\begin{cases}x=a+4t\\y=1-t\end{cases}$（t为参数）化为一般方程是：x+4y﹣a﹣4=0，

椭圆C上的任一点P可以表示成P（3cosθ，sinθ），θ∈[0，2π），

所以点P到直线l的距离d为：

$d=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-a-4|}{\sqrt{17}}=\frac{|5\sin(\theta+\phi)-a-4|}{\sqrt{17}}$，ϕ满足$\tan\phi=\frac{3}{4}$，且的d的最大值为$\sqrt{17}$.

①当﹣a﹣4≤0时，即a≥﹣4时，

|5sin（θ+4）﹣a﹣4|≤|﹣5﹣a﹣4|=5+a+4=17

解得$a=8\geq -4$，符合题意．

②当$-a-4>0$时，即$a<-4$时

$|5\sin(\theta+4)-a-4|\leq|5-a-4|=5-a-4=1-a=17$

解得$a=-16<-4$，符合题意．

【点评】本题主要考查曲线的参数方程、点到直线距离和三角函数的最值，难点在于如何根据曲线C上的点到直线l距离的最大值求出a．

[选修4-5：不等式选讲]

23．已知函数$f(x)=-x^2+ax+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$．

（1）当a=1时，求不等式$f(x)\geq g(x)$的解集；

（2）若不等式$f(x)\geq g(x)$的解集包含$[-1,1]$，求a的取值范围．

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【专题】32：分类讨论；4R：转化法；51：函数的性质及应用；5T：不等式．

【分析】（1）当a=1时，$f(x)=-x^2+x+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}2x, & x>1\\ 2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ -2x, & x<-1\end{cases}$，分$x>1$、$x\in[-1,1]$、$x\in(-\infty,-1)$三类讨论，结合g（x）与f（x）的单调性质即可求得$f(x)\geq g(x)$的解集为$[-1,\frac{\sqrt{17}-1}{2}]$；

（2）依题意得：$-x^2+ax+4\geq 2$在$[-1,1]$恒成立$\Leftrightarrow x^2-ax-2\leq 0$在$[-1,1]$恒成立，只需$\begin{cases}1^2-a\cdot 1-2\leqslant 0\\ (-1)^2-a(-1)-2\leqslant 0\end{cases}$，解之即可得a的取值范围．

【解答】解：（1）当a=1时，$f(x)=-x^2+x+4$，是开口向下，对称轴为$x=\frac{1}{2}$的二次函数，

$g(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}2x, & x>1\\ 2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -2x, & x<-1\end{cases}$

当$x\in(1,+\infty)$时，令$-x^2+x+4=2x$，解得$x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$，g（x）在$(1,+\infty)$上单调递增，f（x）在$(1,+\infty)$上单调递减，∴此时$f(x)\geq g(x)$的解集为（1，

$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$];

当x∈[﹣1，1]时，g（x）=2，f（x）≥f（﹣1）=2.

当x∈（﹣∞，﹣1）时，g（x）单调递减，f（x）单调递增，且g（﹣1）=f（﹣1）=2.

综上所述，f（x）≥g（x）的解集为[﹣1，$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$]；

（2）依题意得：﹣x^2+ax+4≥2在[﹣1，1]恒成立，即x^2﹣ax﹣2≤0在[﹣1，1]恒成立，则只需$\begin{cases}1^2-a\cdot 1-2\leqslant 0\\(-1)^2-a(-1)-2\leqslant 0\end{cases}$，解得﹣1≤a≤1，

故a的取值范围是[﹣1，1].

【点评】本题考查绝对值不等式的解法，去掉绝对值符号是关键，考查分类讨论思想与等价转化思想的综合运用，属于中档题.