

# 2012年浙江省高考数学试卷（文科）

## 参考答案与试题解析

### 一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1. (2012•浙江) 设全集  $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，设集合  $P=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $Q=\{3, 4, 5\}$ ，则  $P \cap (C_U Q) =$  ( )

- A.  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$     B.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$     C.  $\{1, 2, 5\}$     D.  $\{1, 2\}$

考点：交、并、补集的混合运算。

专题：计算题。

分析：由题意，可先由已知条件求出  $C_U Q$ ，然后由交集的定义求出  $P \cap (C_U Q)$  即可得到正确选项

解答：解： $\because U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $Q=\{3, 4, 5\}$ ，

$\therefore C_U Q = \{1, 2, 6\}$ ，又  $P = \{1, 2, 3, 4\}$ ，

$\therefore P \cap (C_U Q) = \{1, 2\}$

故选 D

点评：本题考查交、并、补的运算，解题的关键是熟练掌握交、并、补的运算规则，准确计算

2. (2012•浙江) 已知  $i$  是虚数单位，则  $\frac{3+i}{1-i} =$  ( )

- A.  $1 - 2i$     B.  $2 - i$     C.  $2 + i$     D.  $1 + 2i$

考点：复数代数形式的乘除运算。

专题：计算题。

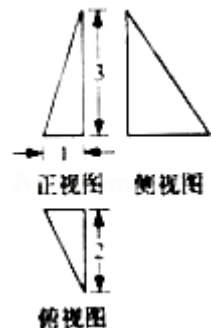
分析：由题意，可对复数代数式分子与分母都乘以  $1+i$ ，再由进行计算即可得到答案

解答：解： $\frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

故选 D

点评：本题考查复数代数形式的乘除运算，解题的关键是分子分母都乘以分母的共轭，复数的四则运算是复数考查的重要内容，要熟练掌握

3. (2012•浙江) 已知某三棱锥的三视图（单位：cm）如图所示，则该三棱锥的体积是 ( )



- A.  $1\text{cm}^3$     B.  $2\text{cm}^3$     C.  $3\text{cm}^3$     D.  $6\text{cm}^3$

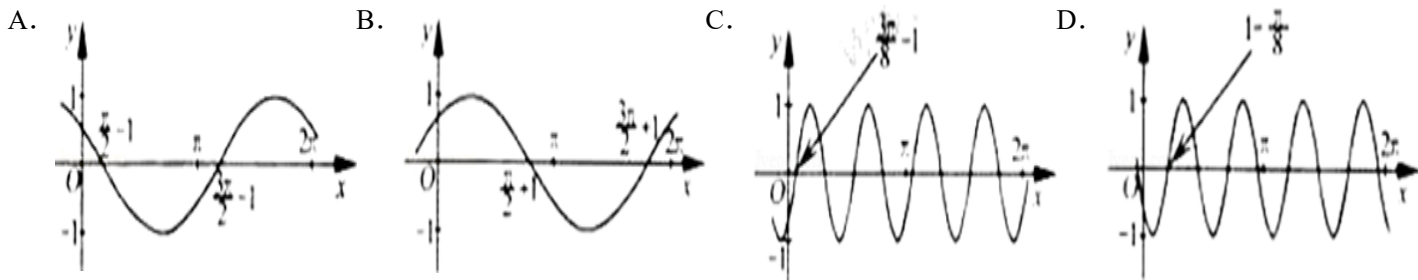
考点：由三视图求面积、体积。

专题：计算题。

分析：由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为 1 和 2 的直角三角形，三棱锥的一条侧棱与底面垂直，且长度是 3，这是三棱锥的高，根据三棱锥的体积公式得到结果。

解答：解：由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为 1cm 和 2cm 的直角三角形，面积是





**考点:** 函数  $y=A\sin(\omega x+\phi)$  的图象变换。

**专题:** 证明题; 综合题。

**分析:** 首先根据函数图象变换的公式, 可得最终得到的图象对应的解析式为:  $y=\cos(x+1)$ , 然后将曲线  $y=\cos(x+1)$  的图象和余弦曲线  $y=\cos x$  进行对照, 可得正确答案。

**解答:** 解: 将函数  $y=\cos 2x+1$  的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变),

得到的图象对应的解析式为:  $y=\cos x+1$ ,

再将  $y=\cos x+1$  图象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度,

得到的图象对应的解析式为:  $y=\cos(x+1)$ ,

$\therefore$  曲线  $y=\cos(x+1)$  由余弦曲线  $y=\cos x$  左移一个单位而得,

$\therefore$  曲线  $y=\cos(x+1)$  经过点  $(\frac{\pi}{2}-1, 0)$  和  $(\frac{3\pi}{2}-1, 0)$ , 且在区间  $(\frac{\pi}{2}-1, \frac{3\pi}{2}-1)$  上函数

数值小于 0

由此可得, A 选项符合题意。

故选 A

**点评:** 本题给出一个函数图象的变换, 要我们找出符合的选项, 着重考查了函数图象变换规律和函数  $y=A\sin(\omega x+\phi)$  的图象变换公式等知识点, 属于基础题。

7. (2012•浙江) 设  $\vec{a}, \vec{b}$  是两个非零向量 ( )

A. 若  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ , 则  $\vec{a}\perp\vec{b}$

B. 若  $\vec{a}\perp\vec{b}$ , 则  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

C. 若  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ , 则存在实数  $\lambda$ , 使得  $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

D. 若存在实数  $\lambda$ , 使得  $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ , 则  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

**考点:** 平面向量的综合题。

**专题:** 计算题。

**分析:** 通过向量特例, 判断 A 的正误;

利用向量的垂直判断矩形的对角线长度相等, 判断 B 的正误;

通过特例直接判断向量共线, 判断正误;

通过反例直接判断结果不正确即可。

**解答:** 解: 对于 A,  $\vec{a}=(3, 0), \vec{b}=(-1, 0)$ , 显然  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ , 但是  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  不垂直, 而是共线,

所以 A 不正确;

对于 B, 若  $\vec{a}\perp\vec{b}$ , 则  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ , 矩形的对角线长度相等, 所以  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$  不正确;

对于 C, 若  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ , 则存在实数  $\lambda$ , 使得  $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ , 例如  $\vec{a}=(3, 0), \vec{b}=(-1, 0)$ , 显然

$\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{a}$ , 所以正确。

对于 D, 若存在实数  $\lambda$ , 使得  $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ , 则  $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ , 例如  $\vec{a}=(3, 0), \vec{b}=(1, 0)$ , 显然  $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}$

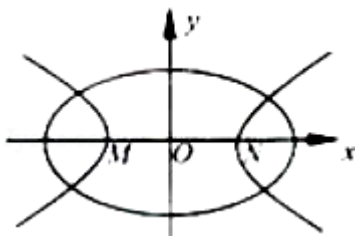
$$\frac{1}{3}\vec{a},$$

但是  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ , 不正确.

故选 C.

**点评:** 本题考查向量的关系的综合应用, 特例法的具体应用, 考查计算能力.

8. (2012•浙江) 如图, 中心均为原点 O 的双曲线与椭圆有公共焦点, M, N 是双曲线的两顶点. 若 M, O, N 将椭圆长轴四等分, 则双曲线与椭圆的离心率的比值是 ( )



A. 3

B. 2

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{2}$

**考点:** 圆锥曲线的共同特征.

**专题:** 计算题.

**分析:** 根据 M, N 是双曲线的两顶点, M, O, N 将椭圆长轴四等分, 可得椭圆的长轴长是双曲线实轴长的 2 倍, 利用双曲线与椭圆有公共焦点, 即可求得双曲线与椭圆的离心率的比值.

**解答:** 解:  $\because$  M, N 是双曲线的两顶点, M, O, N 将椭圆长轴四等分

$\therefore$  椭圆的长轴长是双曲线实轴长的 2 倍

$\because$  双曲线与椭圆有公共焦点,

$\therefore$  双曲线与椭圆的离心率的比值是 2

故选 B.

**点评:** 本题考查椭圆、双曲线的几何性质, 解题的关键是确定椭圆的长轴长是双曲线实轴长的 2 倍.

9. (2012•浙江) 若正数 x, y 满足  $x+3y=5xy$ , 则  $3x+4y$  的最小值是 ( )

A.  $\frac{24}{5}$

B.  $\frac{28}{5}$

C. 5

D. 6

**考点:** 基本不等式在最值问题中的应用.

**专题:** 计算题.

**分析:** 将  $x+3y=5xy$  转化成  $\frac{3}{5x} + \frac{1}{5y} = 1$ , 然后根据  $3x+4y = (\frac{3}{5x} + \frac{1}{5y})(3x+4y)$ , 展开后利用基本不等式可求出  $3x+4y$  的最小值.

**解答:** 解:  $\because$  正数 x, y 满足  $x+3y=5xy$ ,

$$\therefore \frac{3}{5x} + \frac{1}{5y} = 1$$

$$\therefore 3x+4y = (\frac{3}{5x} + \frac{1}{5y})(3x+4y) = \frac{9}{5} + \frac{4}{5} + \frac{12y}{5x} + \frac{3x}{5y} \geq \frac{13}{5} + 2\sqrt{\frac{12y}{5x} \cdot \frac{3x}{5y}} = 5$$

当且仅当  $\frac{12y}{5x} = \frac{3x}{5y}$  时取等号

$$\therefore 3x+4y \geq 5$$

即  $3x+4y$  的最小值是 5

故选 C

**点评:** 本题主要考查了基本不等式在求解函数的值域中的应用, 解答本题的关键是由已知变形, 然后进行“1”的代换, 属于基础题.

10. (2012•浙江) 设  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $e$  是自然对数的底数 ( )

- A. 若  $e^a + 2a = e^b + 3b$ , 则  $a > b$                       B. 若  $e^a + 2a = e^b + 3b$ , 则  $a < b$   
C. 若  $e^a - 2a = e^b - 3b$ , 则  $a > b$                       D. 若  $e^a - 2a = e^b - 3b$ , 则  $a < b$

考点: 指数函数综合题。

专题: 计算题。

分析: 对于  $e^a + 2a = e^b + 3b$ , 若  $a \leq b$  成立, 经分析可排除 B; 对于  $e^a - 2a = e^b - 3b$ , 若  $a \geq b$  成立, 经分析可排除 C, D, 从而可得答案.

解答: 解: 对于  $e^a + 2a = e^b + 3b$ , 若  $a \leq b$  成立, 则必有  $e^a \leq e^b$ , 故必有  $2a \geq 3b$ , 即有  $a \geq \frac{3}{2}b$  这与  $a \leq b$  矛盾, 故  $a \leq b$  成立不可能成立, 故 B 不对;

对于  $e^a - 2a = e^b - 3b$ , 若  $a \geq b$  成立, 则必有  $e^a \geq e^b$ , 故必有  $2a \geq 3b$ , 即有  $a \geq \frac{3}{2}b$ , 故排除 C, D.

故选 A.

点评: 本题考查指数函数综合题, 对于  $e^a + 2a = e^b + 3b$  与  $e^a - 2a = e^b - 3b$ , 根据选项中的条件逆向分析而排除不适合的选项是关键, 也是难点, 属于难题.

## 二、填空题: 本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分.

11. (2012•浙江) 某个年级有男生 560 人, 女生 420 人, 用分层抽样的方法从该年级全体学生中抽取一个容量为 280 的样本, 则此样本中男生人数为 160.

考点: 分层抽样方法。

专题: 计算题。

分析: 先根据男生和女生的人数做出年纪大总人数, 用要抽取得人数除以总人数得到每个个体被抽到的概率, 用男生人数乘以概率, 得到结果.

解答: 解:  $\because$  有男生 560 人, 女生 420 人,

$\therefore$  年级共有  $560 + 420 = 980$

$\therefore$  用分层抽样的方法从该年级全体学生中抽取一个容量为 280 的样本,

$\therefore$  每个个体被抽到的概率是  $\frac{280}{980} = \frac{2}{7}$ ,

$\therefore$  要从男生中抽取  $560 \times \frac{2}{7} = 160$ ,

故答案为: 160

点评: 本题考查分层抽样方法, 本题解题的关键是在抽样过程中每个个体被抽到的概率相等, 这是解题的依据, 本题是一个基础题.

12. (2012•浙江) 从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中, 随机 (等可能) 取两点, 则该两点间的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的概率是  $\frac{2}{5}$ .

考点: 列举法计算基本事件数及事件发生的概率。

专题: 计算题。

分析: 先求出随机 (等可能) 取两点的总数, 然后求出满足该两点间的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的种数, 最后根据古典概型的概率公式求之即可.

解答: 解: 从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中, 随机 (等可能) 取两点共有  $C_5^2 = 10$  种

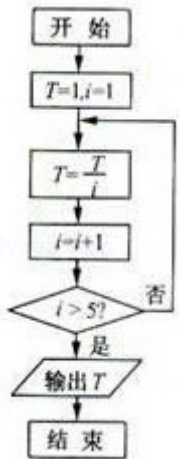
其中两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的必选中心，共有4种可能

故该两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

故答案为： $\frac{2}{5}$

点评：本题主要考查了古典概型的概率，同时考查了分析问题的能力，属于基础题。

13. (2012•浙江) 若某程序框图如图所示，则该程序运行后输出的值是 $\frac{1}{120}$ 。



考点：循环结构。

专题：计算题。

分析：通过循环框图，计算循环变量的值，当 $i=6$ 时结束循环，输出结果即可。

解答：解：循环前， $T=1$ ， $i=2$ ，不满足判断框的条件，第1次循环， $T=\frac{1}{2}$ ， $i=3$ ，

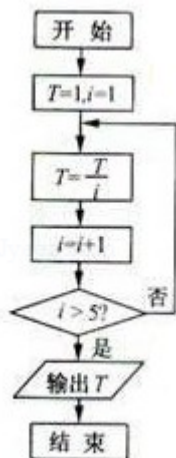
不满足判断框的条件，第2次循环， $T=\frac{1}{6}$ ， $i=4$ ，

不满足判断框的条件，第3次循环， $T=\frac{1}{24}$ ， $i=5$ ，

不满足判断框的条件，第4次循环， $T=\frac{1}{120}$ ， $i=6$ ，

满足判断框的条件，退出循环，输出结果 $\frac{1}{120}$ 。

故答案为： $\frac{1}{120}$ 。



点评： 本题考查循环结构的应用，注意循环的变量的计算，考查计算能力。

14. (2012•浙江) 设  $z=x+2y$ ，其中实数  $x, y$  满足 
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 则  $z$  的取值范围是  $[0, \frac{7}{2}]$ 。

考点： 简单线性规划。

专题： 计算题。

分析： 根据已知的约束条件画出满足约束条件的可行域，结合  $z$  在目标函数中的几何意义，求出目标函数的最大值、及最小值，进一步求出目标函数  $z$  的范围。

解答：

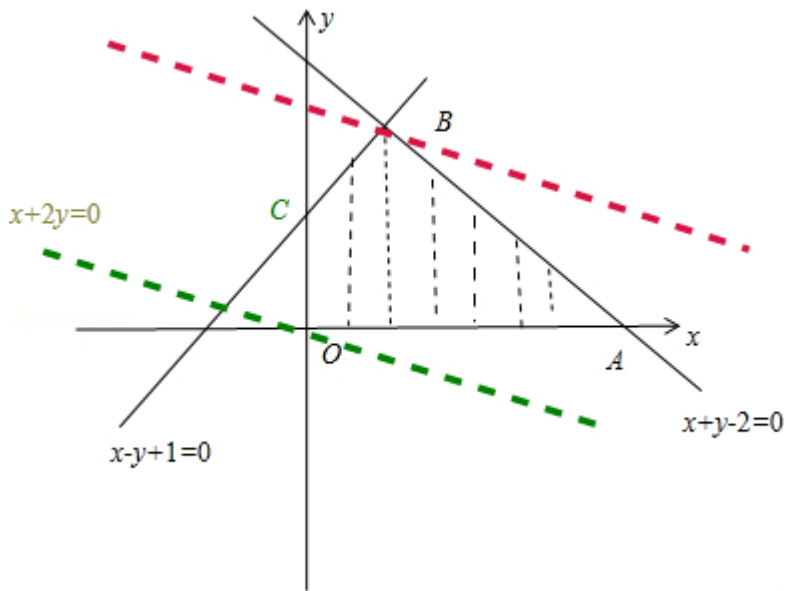
解： 约束条件 
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 对应的平面区域如图示：

由图易得目标函数  $z=2y+x$  在  $O(0, 0)$  处取得最小值，此时  $z=0$

在  $B$  处取最大值，由 
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$
 可得  $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ，此时  $z=\frac{7}{2}$

故  $Z=x+2y$  的取值范围为： $[0, \frac{7}{2}]$

故答案为： $[0, \frac{7}{2}]$



**点评:** 用图解法解决线性规划问题时, 分析题目的已知条件, 找出约束条件, 利用目标函数中  $z$  的几何意义是关键.

15. (2012•浙江) 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  是  $BC$  的中点,  $AM=3$ ,  $BC=10$ , 则  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \underline{-16}$ .

**考点:** 平面向量数量积的运算.

**专题:** 计算题.

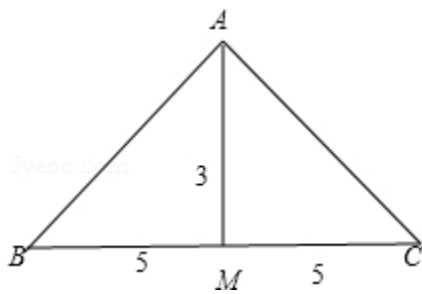
**分析:** 设  $\angle AMB = \theta$ , 则  $\angle AMC = \pi - \theta$ , 再由  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{MB} - \vec{MA}) \cdot (\vec{MC} - \vec{MA})$  以及两个向量的数量积的定义求出结果.

**解答:** 解: 设  $\angle AMB = \theta$ , 则  $\angle AMC = \pi - \theta$ . 又  $\vec{AB} = \vec{MB} - \vec{MA}$ ,  $\vec{AC} = \vec{MC} - \vec{MA}$ ,

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{MB} - \vec{MA}) \cdot (\vec{MC} - \vec{MA}) = \vec{MB} \cdot \vec{MC} - \vec{MB} \cdot \vec{MA} - \vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MA}^2,$$

$$= -25 - 5 \times 3 \cos \theta - 3 \times 5 \cos(\pi - \theta) + 9 = -16,$$

故答案为  $-16$ .



**点评:** 本题主要考查两个向量的数量积的定义, 属于基础题.

16. (2012•浙江) 设函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的周期为 2 的偶函数, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x+1$ , 则  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \underline{-\frac{3}{2}}$ .

**考点:** 函数的周期性; 函数奇偶性的性质; 函数的值.

**专题:** 计算题.

**分析:** 利用函数的周期性先把  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  转化成  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ , 再利用函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数转化成:

$(\frac{1}{2})$ , 代入已知求解即可.

**解答:** 解:  $\because$  函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的周期为 2 的函数,

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

又  $\because$  函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数,

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

又  $\because$  当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x + 1$ ,

$$\therefore \text{有: } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

$$\text{则 } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

故答案为  $\frac{3}{2}$ .

**点评:** 本题主要考查函数的性质中的周期性和奇偶性, 属于基础题, 应熟练掌握.

17. (2012•浙江) 定义: 曲线  $C$  上的点到直线  $l$  的距离的最小值称为曲线  $C$  到直线  $l$  的距离, 已知曲线  $C_1: y = x^2 + a$  到直线  $l: y = x$  的距离等于曲线  $C_2: x^2 + (y + 4)^2 = 2$  到直线  $l: y = x$  的距离, 则实数  $a = -\frac{9}{4}$ .

**考点:** 利用导数研究曲线上某点切线方程; 点到直线的距离公式.

**专题:** 计算题.

**分析:** 先根据定义求出曲线  $C_2: x^2 + (y + 4)^2 = 2$  到直线  $l: y = x$  的距离, 然后根据曲线  $C_1: y = x^2 + a$  的切线与直线  $y = x$  平行时, 该切点到直线的距离最近建立等式关系, 解之即可.

**解答:** 解: 圆  $x^2 + (y + 4)^2 = 2$  的圆心为  $(0, -4)$ , 半径为  $\sqrt{2}$

$$\text{圆心到直线 } y = x \text{ 的距离为 } \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{曲线 } C_2: x^2 + (y + 4)^2 = 2 \text{ 到直线 } l: y = x \text{ 的距离为 } 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

则曲线  $C_1: y = x^2 + a$  到直线  $l: y = x$  的距离等于  $\sqrt{2}$

$$\text{令 } y' = 2x = 1 \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 故切点为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + a\right)$$

$$\text{切线方程为 } y - \left(\frac{1}{4} + a\right) = x - \frac{1}{2} \text{ 即 } x - y - \frac{1}{4} + a = 0$$

由题意可知  $x - y - \frac{1}{4} + a = 0$  与直线  $y = x$  的距离为  $\sqrt{2}$

$$\text{即 } \frac{\left|a - \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ 解得 } a = \frac{9}{4} \text{ 或 } -\frac{7}{4}$$

当  $a = -\frac{7}{4}$  时直线  $y = x$  与曲线  $C_1: y = x^2 + a$  相交, 故不符合题意, 舍去

故答案为:  $\frac{9}{4}$

**点评:** 本题主要考查了利用导数研究曲线上某点切线方程, 以及点到直线的距离的计算, 同时考查了分析求解的能力, 属于中档题.

**三、解答题:** 本大题共 5 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (2012•浙江) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b \sin A = \sqrt{3} a \cos B$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 若  $b=3$ ,  $\sin C=2\sin A$ , 求  $a$ ,  $c$  的值.

考点: 解三角形.

专题: 计算题.

分析: (1) 将已知的等式利用正弦定理化简, 根据  $\sin A$  不为 0, 等式两边同时除以  $\sin A$ , 再利用同角三角函数间的基本关系求出  $\tan B$  的值, 由  $B$  为三角形的内角, 利用特殊角的三角函数值即可求出  $B$  的度数;

(2) 由正弦定理化简  $\sin C=2\sin A$ , 得到关于  $a$  与  $c$  的方程, 记作①, 再由  $b$  及  $\cos B$  的值, 利用余弦定理列出关于  $a$  与  $c$  的另一个方程, 记作②, 联立①②即可求出  $a$  与  $c$  的值.

解答: 解: (1) 由  $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$  及正弦定理  $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ , 得:  $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$ ,

$\therefore A$  为三角形的内角,  $\therefore \sin A \neq 0$ ,

$\therefore \sin B=\sqrt{3}\cos B$ , 即  $\tan B=\sqrt{3}$ ,

又  $B$  为三角形的内角,  $\therefore B=\frac{\pi}{3}$ ;

(2) 由  $\sin C=2\sin A$  及正弦定理  $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ , 得:  $c=2a$ ①,

$\therefore b=3$ ,  $\cos B=\frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  由余弦定理  $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$  得:  $9=a^2+c^2-ac$ ②,

联立①②解得:  $a=\sqrt{3}$ ,  $c=2\sqrt{3}$ .

点评: 此题属于解直角三角形的题型, 涉及的知识有: 正弦、余弦定理, 同角三角函数间的基本关系, 以及特殊角的三角函数值, 熟练掌握正弦、余弦定理是解本题的关键.

19. (2012•浙江) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n=2n^2+n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $a_n=4\log_2 b_n+3$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 求  $a_n$ ,  $b_n$ ;

(2) 求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

考点: 数列的求和; 等差关系的确定; 等比关系的确定.

专题: 计算题.

分析: (I) 由  $S_n=2n^2+n$  可得, 当  $n=1$  时, 可求  $a_1$ , 当  $n \geq 2$  时, 由  $a_n=S_n-S_{n-1}$  可求通项, 进而可求  $b_n$

(II) 由 (I) 知,  $a_n b_n = (4n-1) \cdot 2^{n-1}$ , 利用错位相减可求数列的和

解答: 解 (I) 由  $S_n=2n^2+n$  可得, 当  $n=1$  时,  $a_1=S_1=3$

当  $n \geq 2$  时,  $a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-2(n-1)^2-(n-1)=4n-1$

而  $n=1$ ,  $a_1=4-1=3$  适合上式,

故  $a_n=4n-1$ ,

又  $\therefore$  足  $a_n=4\log_2 b_n+3=4n-1$

$\therefore b_n=2^{n-1}$

(II) 由 (I) 知,  $a_n b_n = (4n-1) \cdot 2^{n-1}$

$T_n=3 \times 2^0+7 \times 2^1+\dots+(4n-1) \cdot 2^{n-1}$

$2T_n=3 \times 2^1+7 \times 2^2+\dots+(4n-5) \cdot 2^{n-1}+(4n-1) \cdot 2^n$

$\therefore T_n=(4n-1) \cdot 2^n-[3+4(2+2^2+\dots+2^{n-1})]$

$= (4n-1) \cdot 2^n - [3+4 \cdot \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}]$

$$= (4n - 1) \cdot 2^n - [3 + 4(2^n - 2)] = (4n - 5) \cdot 2^{n+5}$$

点评:

本题主要考查了数列的递推公式  $a_n = \begin{cases} s_1, & n=1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$  在数列的通项公式求解中的应用, 数列求和的错位相减求和方法的应用.

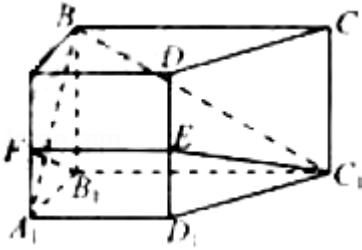
20. (2012·浙江) 如图, 在侧棱垂直底面的四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AD = 2$ ,  $BC = 4$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $E$  是  $DD_1$  的中点,  $F$  是平面  $B_1C_1E$  与直线  $AA_1$  的交点.

(1) 证明:

(i)  $EF \parallel A_1D_1$ ;

(ii)  $BA_1 \perp$  平面  $B_1C_1EF$ ;

(2) 求  $BC_1$  与平面  $B_1C_1EF$  所成的角的正弦值.



考点: 直线与平面所成的角; 直线与平面垂直的判定.

专题: 综合题.

分析: (1) (i) 先由  $C_1B_1 \parallel A_1D_1$  证明  $C_1B_1 \parallel$  平面  $ADD_1A_1$ , 再由线面平行的性质定理得出  $C_1B_1 \parallel EF$ , 证出  $EF \parallel A_1D_1$ .

(ii) 易通过证明  $B_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$  得出  $B_1C_1 \perp BA_1$ , 再由  $\tan \angle A_1B_1F = \tan \angle AA_1B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即

$\angle A_1B_1F = \angle AA_1B$ , 得出  $BA_1 \perp B_1F$ . 所以  $BA_1 \perp$  平面  $B_1C_1EF$ ;

(2) 设  $BA_1$  与  $B_1F$  交点为  $H$ , 连接  $C_1H$ , 由 (1) 知  $BA_1 \perp$  平面  $B_1C_1EF$ , 所以  $\angle BC_1H$  是  $BC_1$  与平面  $B_1C_1EF$  所成的角. 在  $RT\triangle BHC_1$  中求解即可.

解答: (1) 证明 (i)  $\because C_1B_1 \parallel A_1D_1$ ,  $C_1B_1 \notin$  平面  $ADD_1A_1$ ,  $\therefore C_1B_1 \parallel$  平面  $ADD_1A_1$ , 又  $C_1B_1 \subset$  平面  $B_1C_1EF$ , 平面  $B_1C_1EF \cap$  平面  $ADD_1A_1 = EF$ ,

$\therefore C_1B_1 \parallel EF$ ,  $\therefore EF \parallel A_1D_1$ ;

(ii)  $\because BB_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $\therefore BB_1 \perp B_1C_1$ ,

又  $\because B_1C_1 \perp B_1A_1$ ,

$\therefore B_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

$\therefore B_1C_1 \perp BA_1$ ,

在矩形  $ABB_1A_1$  中,  $F$  是  $AA_1$  的中点,  $\tan \angle A_1B_1F = \tan \angle AA_1B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即  $\angle A_1B_1F = \angle AA_1B$ , 故

$BA_1 \perp B_1F$ .

所以  $BA_1 \perp$  平面  $B_1C_1EF$ ;

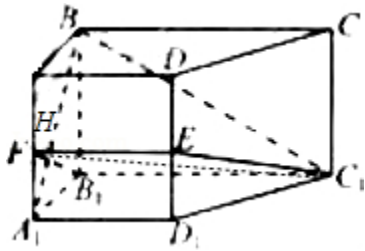
(2) 解: 设  $BA_1$  与  $B_1F$  交点为  $H$ ,

连接  $C_1H$ , 由 (1) 知  $BA_1 \perp$  平面  $B_1C_1EF$ , 所以  $\angle BC_1H$  是  $BC_1$  与平面  $B_1C_1EF$  所成的角.

在矩形  $AA_1B_1B$  中,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 2$ , 得  $BH = \frac{4}{\sqrt{6}}$ ,

在  $RT\triangle BHC_1$  中,  $BC_1 = 2\sqrt{5}$ ,  $\sin \angle BC_1H = \frac{BH}{BC_1} = \frac{\sqrt{30}}{15}$ ,

所以  $BC_1$  与平面  $B_1C_1EF$  所成的角的正弦值是  $\frac{\sqrt{30}}{15}$ .



**点评:** 本题考查空间直线、平面位置关系的判定, 线面角求解. 考查空间想象能力、推理论证能力、转化、计算能力.

21. (2012•浙江) 已知  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = 4x^3 - 2ax + a$ .

- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 证明: 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) + |2 - a| > 0$ .

**考点:** 利用导数求闭区间上函数的最值; 利用导数研究函数的单调性.

**专题:** 综合题.

**分析:** (1) 求导函数, 再分类讨论:  $a \leq 0$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立;  $a > 0$  时,  $f'(x) = 12x^2 - 2a = 12(x - \sqrt{\frac{a}{6}})$

$(x + \sqrt{\frac{a}{6}})$ , 由此可确定  $f(x)$  的单调递增区间; 单调递增区间:

(2) 由于  $0 \leq x \leq 1$ , 故当  $a \leq 2$  时,  $f(x) + |2 - a| = 4x^3 - 2ax + 2 \geq 4x^3 - 4x + 2$ ; 当  $a > 2$  时,  $f(x) + |2 - a| = 4x^3 + 2a(1 - x) - 2 \geq 4x^3 + 4(1 - x) - 2 = 4x^3 - 4x + 2$ , 构造函数  $g(x) = 2x^3 - 2x + 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , 确定  $g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$ , 即可证得结论.

**解答:** (1) 解: 求导函数可得  $f'(x) = 12x^2 - 2a$

$a \leq 0$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立, 此时  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, +\infty)$

$a > 0$  时,  $f'(x) = 12x^2 - 2a = 12(x - \sqrt{\frac{a}{6}})(x + \sqrt{\frac{a}{6}})$

$\therefore f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{6}})$ ,  $(\sqrt{\frac{a}{6}}, +\infty)$ ; 单调递减区间为  $(-\sqrt{\frac{a}{6}}, \sqrt{\frac{a}{6}})$ ;

(2) 证明: 由于  $0 \leq x \leq 1$ , 故

当  $a \leq 2$  时,  $f(x) + |2 - a| = 4x^3 - 2ax + 2 \geq 4x^3 - 4x + 2$

当  $a > 2$  时,  $f(x) + |2 - a| = 4x^3 + 2a(1 - x) - 2 \geq 4x^3 + 4(1 - x) - 2 = 4x^3 - 4x + 2$

设  $g(x) = 2x^3 - 2x + 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\therefore g'(x) = 6(x - \frac{\sqrt{3}}{3})(x + \frac{\sqrt{3}}{3})$

	$x$	0	$(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$	
			$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
	$g'(x)$	-		+
	$g(x)$			极小值

$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$

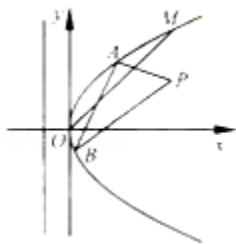
$\therefore$  当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $2x^3 - 2x + 1 > 0$

$\therefore$  当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) + |2 - a| > 0$ .

**点评:** 本题考查导数知识的运用, 考查函数的单调性, 考查不等式的证明, 属于中档题.

22. (2012·浙江) 如图, 在直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P(1, \frac{1}{2})$  到抛物线  $C: y^2=2px (P>0)$  的准线的距离为  $\frac{5}{4}$ . 点  $M(t, 1)$  是  $C$  上的定点,  $A, B$  是  $C$  上的两动点, 且线段  $AB$  被直线  $OM$  平分.

- (1) 求  $p, t$  的值.
- (2) 求  $\triangle ABP$  面积的最大值.



**考点:** 直线与圆锥曲线的综合问题; 抛物线的简单性质.

**专题:** 计算题; 综合题; 转化思想.

**分析:** (1) 通过点  $P(1, \frac{1}{2})$  到抛物线  $C: y^2=2px (P>0)$  的准线的距离为  $\frac{5}{4}$ . 列出方程, 求出  $p, t$  的值即可.

(2) 设  $A(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 线段  $AB$  的中点为  $Q(m, m)$ , 设直线  $AB$  的斜率为  $k, (k \neq 0)$ , 利用  $\begin{cases} y_1^2 = x_1 \\ y_2^2 = x_2 \end{cases}$  推出  $AB$  的方程  $y - m = \frac{1}{2m}(x - m)$ . 利用弦长公式求出  $|AB|$ , 设点  $P$  到直线  $AB$  的距

离为  $d$ , 利用点到直线的距离公式求出  $d$ , 设  $\triangle ABP$  的面积为  $S$ , 求出  $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = |1 - 2(m - m^2)| \cdot \sqrt{m - m^2}$ . 利用函数的导数求出  $\triangle ABP$  面积的最大值.

**解答:**

解: (1) 由题意可知  $\begin{cases} 2pt=1 \\ 1+\frac{p}{2}=\frac{5}{4} \end{cases}$  得,  $\begin{cases} p=\frac{1}{2} \\ t=1 \end{cases}$ .

(2) 设  $A(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 线段  $AB$  的中点为  $Q(m, m)$ , 由题意可知, 设直线  $AB$  的斜率为  $k, (k \neq 0)$ ,

由  $\begin{cases} y_1^2 = x_1 \\ y_2^2 = x_2 \end{cases}$  得,  $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = x_1 - x_2$ ,

故  $k \cdot 2m = 1$ ,

所以直线  $AB$  方程为  $y - m = \frac{1}{2m}(x - m)$ .

即  $\Delta = 4m - 4m^2 > 0, y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = 2m^2 - m$ .

从而  $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + 4m^2} \cdot \sqrt{4m - 4m^2}$ ,

设点  $P$  到直线  $AB$  的距离为  $d$ , 则

$$d = \frac{|1 - 2m + 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^2}},$$

设  $\triangle ABP$  的面积为  $S$ , 则

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = |1 - 2(m - m^2)| \cdot \sqrt{m - m^2}.$$

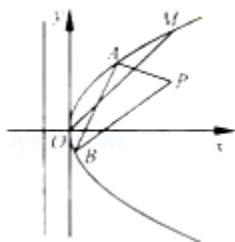
由 $\Delta = \sqrt{m - m^2} > 0$ , 得  $0 < m < 1$ ,

令  $u = \sqrt{m - m^2}$ ,  $0 < u < \frac{1}{2}$ , 则  $S = u(1 - 2u^2)$ ,  $0 < u < \frac{1}{2}$ ,

则  $S'(u) = 1 - 6u^2$ ,  $S'(u) = 0$ , 得  $u = \frac{\sqrt{6}}{6} \in (0, \frac{1}{2})$ ,

所以  $S_{\text{最大值}} = S(\frac{\sqrt{6}}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ .

故 $\triangle ABP$  面积的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$ .



**点评:** 本题考查直线与圆锥曲线的综合问题, 抛物线的简单性质, 函数与导数的应用, 函数的最大值的求法, 考查分析问题解决问题的能力.