

2015年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- （5分）已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
- （5分）已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\vec{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\vec{BC} =$ ()
A. $(-7, -4)$ B. $(7, 4)$ C. $(-1, 4)$ D. $(1, 4)$
- （5分）已知复数 z 满足 $(z - 1)i = 1 + i$, 则 $z =$ ()
A. $-2 - i$ B. $-2 + i$ C. $2 - i$ D. $2 + i$
- （5分）如果3个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这3个数为一组勾股数. 从1, 2, 3, 4, 5中任取3个不同的数, 则这3个数构成一组勾股数的概率为 ()
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{20}$
- （5分）已知椭圆 E 的中心在坐标原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB| =$ ()
A. 3 B. 6 C. 9 D. 12
- （5分）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” “其意思为: ”在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为8尺, 米堆的高为5尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? “已知1斛米的体积约为1.62立方尺, 圆周率约为3, 估算出堆放的米约有 ()

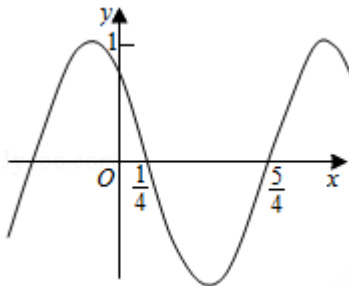


- A. 14斛 B. 22斛 C. 36斛 D. 66斛

7. (5分) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8=4S_4$, 则 $a_{10} = (\quad)$

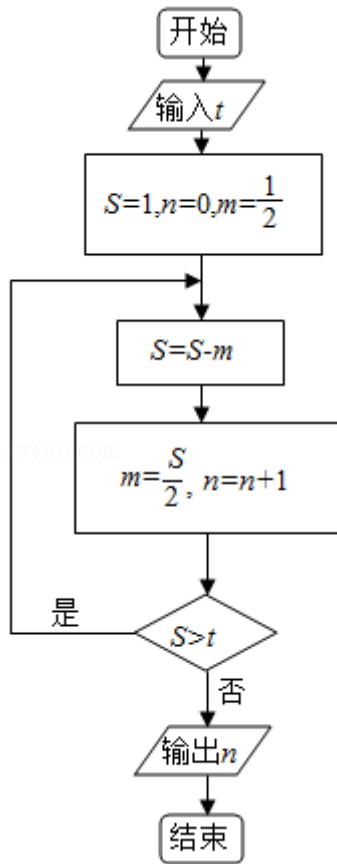
- A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{19}{2}$ C. 10 D. 12

8. (5分) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$
 C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

9. (5分) 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n = (\quad)$



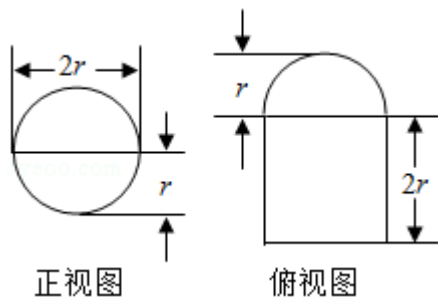
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

10. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}-2, & x \leq 1 \\ -\log_2(x+1), & x > 1 \end{cases}$, 且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a)$

) = ()

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

11. (5分) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16 + 20\pi$, 则 $r =$ ()



- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

12. (5分) 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于 $y=-x$ 对称, 且 $f(-2) + f$

$(-4)^a = 1$, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

二、本大题共4小题，每小题5分.

13. (5分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=126$, 则 $n=$ _____.

14. (5分) 已知函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(2, 7)$, 则 $a=$ _____.

15. (5分) 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$$
, 则 $z=3x+y$ 的最大值为_____.

16. (5分) 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点, P 是 C 的左支上一点, $A(0, 6\sqrt{6})$. 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为_____.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B = 2\sin A \sin C$.

(I) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;

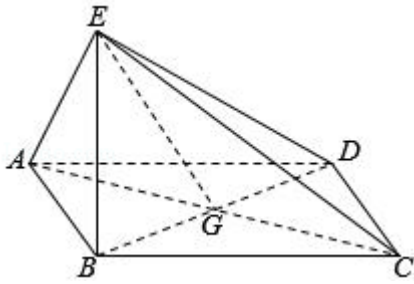
(II) 设 $B=90^\circ$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$.

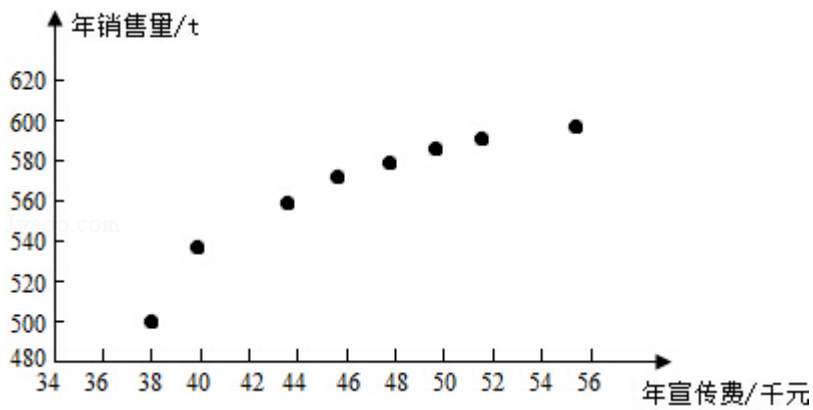
(I) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 BED ;

(II) 若 $\angle ABC=120^\circ$, $AE \perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面

积.



19. (12分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x (单位：千元) 对年销售量 y (单位：t) 和年利润 z (单位：千元) 的影响，对近8年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值.



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

- (I) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- (II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;
- (III) 已知这种产品的年利润 z 与 x 、 y 的关系为 $z = 0.2y - x$. 根据 (II) 的结果回答下列问题:
- (i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- (ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为: $\hat{\beta} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

20. (12分) 已知过点 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 交于点 M 、 N 两点.
- (1) 求 k 的取值范围;
- (2) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

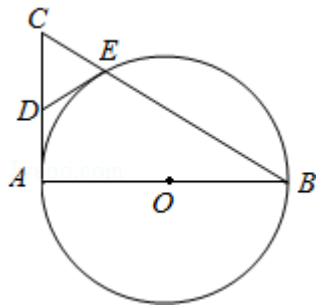
21. (12分) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.
- (I) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;
- (II) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

四、请考生在第22、23、24题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。【选修4-1：几何证明选讲】

22. (10分) 如图，AB是 $\odot O$ 的直径，AC是 $\odot O$ 的切线，BC交 $\odot O$ 于点E.

(I) 若D为AC的中点，证明：DE是 $\odot O$ 的切线；

(II) 若 $OA = \sqrt{3}CE$ ，求 $\angle ACB$ 的大小.



五、【选修4-4：坐标系与参数方程】

23. 在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1: x = -2$ ，圆 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ ，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求 C_1, C_2 的极坐标方程；

(II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbb{R}$)，设 C_2 与 C_3 的交点为M, N，求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

六、【选修4-5：不等式选讲】

24. 已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.