

# 1995 年天津高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

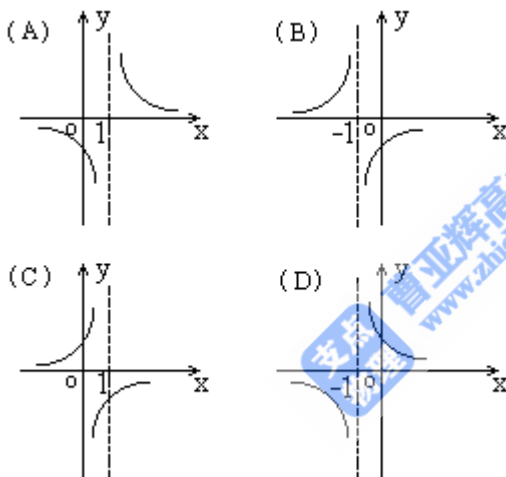
## 第 I 卷(选择题共 65 分)

一、选择题(本大题共 15 小题; 第 1—10 题每小题 4 分, 第 11—15 题每小题 5 分, 共 65 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项有符合题目要求的) .

1. 已知集合  $F = \{0, -1, -2, -3, -4\}$ , 集合  $M = \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $N = \{0, -3, -4\}$ , 则  $\bar{M} \cap N = (\quad)$

- (A)  $\{0\}$                       (B)  $\{-3, -4\}$               (C)  $\{-1, -2\}$               (D)  $\phi$

2. 函数  $y = \frac{1}{x+1}$  的图像是( )



3. 函数  $y = 4\sin(3x + \frac{\pi}{4}) + 3\cos(3x + \frac{\pi}{4})$  的最小正周期是( )

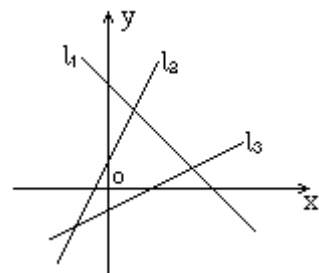
- (A)  $6\pi$                       (B)  $2\pi$                       (C)  $\frac{2\pi}{3}$                       (D)  $\frac{\pi}{3}$

4. 正方体的全面积是  $a^2$ , 它的顶点都在球面上, 这个球的表面积是( )

- (A)  $\frac{\pi a^2}{3}$                       (B)  $\frac{\pi a^2}{2}$                       (C)  $2\pi a^2$                       (D)  $3\pi a^2$

5. 若图中的直线  $l_1, l_2, l_3$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3$ , 则( )

- (A)  $k_1 < k_2 < k_3$   
(B)  $k_3 < k_1 < k_2$



(C)  $k_3 < k_2 < k_1$

(D)  $k_1 < k_3 < k_2$

6. 双曲线  $3x^2 - y^2 = 3$  的渐近线方程是( )

(A)  $y = \pm 3x$

(B)  $\pm \frac{x}{3}$

(C)  $y = \pm \sqrt{3}x$

(D)  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

7. 使  $\sin x \leq \cos x$  成立的  $x$  的一个变化区间是( )

(A)  $\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$

(B)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(C)  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

(D)  $[0, \pi]$

8.  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  和  $x^2 + y^2 + 4y = 0$  的位置关系是( )

(A) 相离

(B) 外切

(C) 相交

(D) 内切

9. 已知  $\theta$  是第三象限角, 且  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$ , 那么  $\sin 2\theta$  等于( )

(A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(B)  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(C)  $\frac{2}{3}$

(D)  $-\frac{2}{3}$

10. 如图  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是正方体,  $E_1, F_1$  是  $A_1B_1, D_1C_1$  的中点, 则  $BE_1$  与  $DF_1$  所成的角的余弦值是( )

(A)  $\frac{15}{17}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{8}{17}$

(D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



11. 已知  $y = \log_a(2-x)$  是  $x$  的增函数, 则  $a$  的取值范围是( )

(A)  $(0, 2)$

(B)  $(0, 1)$

(C)  $(1, 2)$

(D)  $(2, +\infty)$

12. 在  $(1-x^3)(1+x)^{10}$  的展开式中,  $x^5$  的系数是( )

(A)  $-297$

(B)  $-252$

(C)  $297$

(D)  $207$

13. 已知直线  $l \perp$  平面  $\alpha$ , 直线  $m \subset$  平面  $\beta$ , 有下面四个命题,

①  $\alpha \parallel \beta \Rightarrow l \perp m$

②  $\alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel m$

③  $l \parallel m \Rightarrow \alpha \perp \beta$

④  $l \perp m \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

其中正确的两个命题是( )

(A) ①与②

(B) ③与④

(C) ②与④

(D) ①与③

14. 等差数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别是  $S_n$  与  $T_n$ , 若  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  等于( )

- (A) 1                      (B)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       (C)  $\frac{2}{3}$                       (D)  $\frac{4}{9}$

15. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中偶数共有 ( )

- (A) 24 个                      (B) 30 个                      (C) 40 个                      (D) 60 个

### 第 II 卷(非选择题共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在题中的横线上)

16. 方程  $\log_2(x+1)^2 + \log_4(x+1) = 5$  的解是\_\_\_\_\_.

17. 已知圆台上、下底面圆周都在球面上, 且下底面过球心, 母线与底面所成角为  $\frac{\pi}{3}$ , 则圆台的体积与球体积之比为\_\_\_\_\_.

18. 函数  $y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3})$  的最大值是\_\_\_\_\_.

19. 若直线  $l$  过抛物线  $y^2 = 4(x+1)$  的焦点, 并且与  $x$  轴垂直, 则  $l$  被抛物线截得的线段长为\_\_\_\_\_.

20. 四个不同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中, 则恰有一个空盒的放法共有\_\_\_\_\_种(用数字作答).

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 65 分: 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

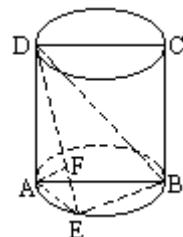
21. (本小题满分 7 分) 解方程  $3^{x+2} - 3^{2-x} = 80$ .

22. (本小题满分 12 分) 设复数  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\theta \in (\pi, 2\pi)$ , 求复数  $z^2 + z$  的模和辐角.

23. (本小题满分 10 分) 设  $\{a_n\}$  是由正数组成的等比数列,  $S_n$  是其前  $n$  项和, 证明:

$$\frac{\log_{0.5} S_n + \log_{0.5} S_{n+2}}{2} > \log_{0.5} S_{n+1}.$$

24. (本小题满分 12 分) 如图,  $ABCD$  是圆柱的轴截面, 点  $E$  在底面的圆周上,  $AF \perp DE$ ,  $F$  是垂足.



(1) 求证:  $AF \perp DB$

(2) 如果  $AB = a$ , 圆柱与三棱锥  $D-ABE$  的体积比等于  $3\pi$ , 求点  $E$  到截面  $ABCD$  的距离.

25. (本小题满分 12 分) 某地为促进淡水鱼养殖业的发展, 将价格控制在适当范围内,

决定对淡水鱼养殖提供政府补贴，设淡水鱼的市场价格为  $x$  元/千克，政府补贴为  $t$  元/千克，根据市场调查，当  $8 \leq x \leq 14$  时，淡水鱼的市场日供应量  $p$  千克与市场日需求量  $Q$  近似地满足关系：

$$P=1000(x+t-8) \quad (x \geq 8, t \geq 0),$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2} \quad (8 \leq x \leq 14),$$

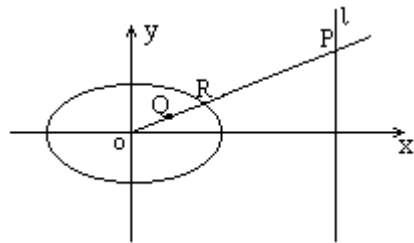
当  $P=Q$  时的市场价格为市场平衡价格，

(1) 将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域：

(2) 为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少每千克多少元？

26. (本小题满分 12 分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，直线  $l$ ：

$x=12$ ， $P$  是  $l$  上一点，射线  $OP$  交椭圆于点  $R$ ，又点  $Q$  在  $OP$  上，且满足  $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$ ，当点  $P$  在  $l$  上移动时，求点  $Q$  的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线。



## 参考答案

### 一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1. B 2. D 3. C 4. B 5. D 6. C 7. A 8. C 9. A 10. A 11. B 12. D  
13. D 14. C 15. A

### 二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16. 3 17.  $\frac{7\sqrt{3}}{32}$  18.  $\sqrt{3}$  19. 4 20. 144

### 三、解答题

21. 本小题主要考查指数方程的解法及运算能力，

解：设  $y=3^x$ ，则原方程可化为  $9y^2-80y-9=0$ ，

解得： $y_1=9$ ， $y_2=-\frac{1}{9}$

方程  $3^x=-\frac{1}{9}$  无解，

由  $3^x=9$  得  $x=2$ ，所以原方程的解为  $x=2$ 。

22. 本小题主要考查复数的有关概念，三角公式及运算能力，

解:  $z^2+z=(\cos \theta+i \sin \theta)^2+(\cos \theta+i \sin \theta)$

$$\begin{aligned}
 &= \cos 2 \theta+i \sin 2 \theta+\cos \theta+i \sin \theta \\
 &= 2 \cos \frac{3 \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}+i\left(2 \sin \frac{3 \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2 \cos \frac{\theta}{2}\left(\cos \frac{3 \theta}{2}+i \sin \frac{3 \theta}{2}\right) \\
 &= -2 \cos \frac{\theta}{2}\left[\cos \left(-\pi+\frac{3 \theta}{2}\right)+i \sin \left(-\pi+\frac{3 \theta}{2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta \in(\pi, 2 \pi)$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} \in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\therefore -2 \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)>0$$

所以复数  $z^2+z$  的模为  $-2 \cos \frac{\theta}{2}$ , 辐角  $(2k-1) \pi+\frac{3 \theta}{2}(k \in \mathbb{Z})$ .

23. 本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识以及逻辑推理能力,

证法一: 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 由题设知  $a_1>0, q>0$ ,

(1) 当  $q=1$  时,  $S_n=na_1$ , 从而

$$S_n \cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2 a_1^2=-a_1^2<0.$$

(2) 当  $q \neq 1$  时,  $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ , 从而

$$S_n \cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2 q^n<0.$$

由(1)和(2)得  $S_n \cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$ .

根据对数函数的单调性, 得  $\log_{0.5}\left(S_n \cdot S_{n+2}\right)>\log_{0.5} S_{n+1}^2$ ,

$$\text{即 } \frac{\log_{0.5} S_n+\log_{0.5} S_{n+2}}{2}>\log_{0.5} S_{n+1}.$$

证法二: 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 由题设知  $a_1>0, q>0$ ,

$$\therefore S_{n+1}=a_1+qS_n,$$

$$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1},$$

$$\therefore S_n \cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n\left(a_1+qS_{n+1}\right)-\left(a_1+qS_n\right)S_{n+1}=-a_1\left(S_n-S_{n+1}\right)=-a_1 a_{n+1}<0.$$

即  $S_n \cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$ . (以下同证法一)

24. 本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力.

(1) 证明: 根据圆柱性质,  $DA \perp$  平面  $ABE$ ,

$\therefore EB \subset$  平面  $ABE$ ,

$\therefore DA \perp EB$ ,

$\therefore AB$  是圆柱底面的直径, 点  $E$  在圆周上,

$\therefore AE \perp EB$ , 又  $AE \cap AD = A$ , 故得  $EB \perp$  平面  $DAE$ ,

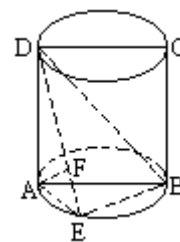
$\therefore AF \subset$  平面  $DAE$ ,

$\therefore EB \perp AF$ ,

又  $AF \perp DE$ , 且  $EB \cap DE = E$ , 故得  $AF \perp$  平面  $DEB$ ,

$\therefore DB \subset$  平面  $DEB$ ,

$\therefore AF \perp DB$ .



(2) 解: 设点  $E$  到平面  $ABCD$  的距离为  $d$ , 记  $AD = h$ , 因圆柱轴截面  $ABCD$  是矩形, 所以  $AD \perp AB$ .

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{ah}{2}$$

$$\therefore V_{D-ABE} = V_{E-ABD} = \frac{d}{3} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6} dah$$

$$\text{又 } V_{\text{圆柱}} = \pi \left( \frac{AB^2}{4} \right) \cdot AD = \frac{\pi}{4} a^2 h$$

$$\text{由题设知 } \frac{\frac{\pi}{4} a^2 h}{\frac{1}{6} dah} = 3\pi, \text{ 即 } d = \frac{a}{2}.$$

25. 本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力, 以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法.

解: (1) 依题设有  $1000(x+t-8) = 500\sqrt{40-(x-8)^2}$

化简得  $5x^2 + (8t-80)x + (4t^2 - 64t + 280) = 0$ ,

当判别式  $\Delta = 800 - 16t^2 \geq 0$  时, 可得:  $x = 8 - \frac{4}{5}t \pm \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$ .

由  $\Delta \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ,  $8 \leq x \leq 14$ , 得不等式组:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{50} \\ 8 \leq 8 - \frac{4}{5}t + \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2} \leq 14 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{50} \\ 8 \leq 8 - \frac{4}{5}t - \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2} \leq 14 \end{cases}$$

解不等式组①，得  $0 \leq t \leq \sqrt{10}$ ，不等式组②无解，故所求的函数关系式为

$$x = 8 - \frac{4}{5}t + \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

函数的定义域为  $[0, \sqrt{10}]$

$$(2) \text{ 为使 } x \leq 10, \text{ 应有 } 8 - \frac{4}{5}t + \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2} \leq 10,$$

$$\text{化简得: } t^2 + 4t - 5 \geq 0,$$

解得  $t \geq 1$  或  $t \leq -5$ ，由于  $t \geq 0$  知  $t \geq 1$ ，从而政府补贴至少为每千克 1 元。

26. 本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质，曲线与方程的关系，轨迹的概念和求法等解析几何的基本思想综合运用知识的能力。

解：设点  $P, Q, R$  的坐标分别为  $(12, y_p), (x, y),$

$(x_R, y_R)$  由题设知  $x_R > 0, x > 0,$

由点  $R$  在椭圆上及点  $O, Q, R$  共线，得方程组

$$\begin{cases} \frac{x_R^2}{24} + \frac{y_R^2}{16} = 1 & \text{解得} & \begin{cases} x_R^2 = \frac{48x^2}{2x^2 + 3y^2} & \textcircled{1} \\ y_R^2 = \frac{48y^2}{2x^2 + 3y^2} & \textcircled{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{由点 } O, Q, P \text{ 共线, 得 } \frac{y_p}{12} = \frac{y}{x}, \text{ 即 } y_p = \frac{12y}{x}. \quad \textcircled{3}$$

由题设  $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$  得

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{12^2 + y_p^2} = \left(\sqrt{x_R^2 + y_R^2}\right)^2$$

将①、②、③式代入上式，整理得点  $Q$  的轨迹方程

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \quad (x > 0)$$

所以点  $Q$  的轨迹是以  $(1, 0)$  为中心，长、短半轴长分别为 1 和  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，且长轴在  $x$  轴上的椭圆、

去掉坐标原点。

