2004年湖北高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）与直线 $2x-y+4=0$ 的平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是（　　）

A．$2x-y+3=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$2x-y+1=0$　　D．$2x-y-1=0$

2．（5分）复数 $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{1+\sqrt{3}i}$ 的值是（　　）

A．-2　　B．16　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

3．（5分）已知 $f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A．$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$　　B．$f(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$

C．$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$　　D．$f(x)=-\frac{x}{1+x^2}$

4．（5分）已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为非零的平面向量．甲：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，乙：$\vec{b}=\vec{c}$，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

5．（5分）若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式

①$a+b<ab$；

②$|a|>|b|$；

③$a<b$；

④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有（　　）

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

6．（5分）已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上．若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点，则点 P 到 x 轴的距离为（　　）

A．$\frac{9}{5}$　　B．3　　C．$\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D．$\frac{9}{4}$

7．（5分）函数 $f(x)=a^x+\log_a(x+1)$ 在 $[0，1]$ 上的最大值与最小值的和为 a，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

8.（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=a[2-(\frac{1}{2})^{n-1}]-b[2-(n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}](n=1,2,\ldots)$，其中$a$、$b$是非零常数，则存在数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$使得(　　)

A. $a_n=x_n+y_n$，其中$\{x_n\}$为等差数列，$\{y_n\}$为等比数列

B. $a_n=x_n+y_n$，其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都为等差数列

C. $a_n=x_n\bullet y_n$，其中$\{x_n\}$为等差数列，$\{y_n\}$都为等比数列

D. $a_n=x_n\bullet y_n$，其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都为等比数列

9.（5 分）函数$f(x)=ax^3+x+1$有极值的充要条件是(　　)

A. $a>0$　　B. $a\geqslant 0$　　C. $a<0$　　D. $a\leqslant 0$

10.（5 分）设集合$P=\{m\mid -1<m<0\}$，$Q=\{m\in R\mid mx^2+4mx-4<0$对任意实数$x$恒成立$\}$，则下列关系中成立的是(　　)

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$　　C. $P=Q$　　D. $P\bigcap Q=Q$

11.（5 分）如图是正方体的平面展开图．在这个正方体中，

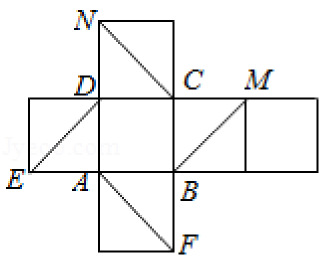
①BM与ED平行；

②CN与BE是异面直线；

③CN与BM成60°角；

④DM与BN垂直．

以上四个命题中，正确命题的序号是(　　)



A. ①②③　　B. ②④　　C. ③④　　D. ②③④

12.（5 分）设$y=f(t)$是某港口水的深度y（米）关于时间t（时）的函数，其中$0\leqslant t\leqslant 24$，下表是该港口某

一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经观察，$y=f(t)$ 可以近似看成 $y=K+A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，下面的函数中最能近似地表示表中数据对应关系的函数是(　　)

A．$y=12+3\sin\frac{\pi}{6}t$，$t\in[0，24]$

B．$y=12+3\sin(\frac{\pi}{6}t+\pi)$，$t\in[0，24]$

C．$y=12+3\sin\frac{\pi}{12}t$，$t\in[0，24]$

D．$y=12+3\sin(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2})$，$t\in[0，24]$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）设随机变量 ξ 的概率分布为 $P\left(\xi=k\right)=\frac{a}{5^k},a为常数,k=1,2,\ldots,则a=$______.

14．（4 分）将标号为 1，2，…，10 的 10 个球放入标号为 1，2，…，10 的 10 个盒子内，每个盒内放一个球，则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有______种.（以数字作答）

15．（4 分）设 A 、B 为两个集合．下列四个命题：

① Aà $B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

② Aà $B\Leftrightarrow A\bigcap B=\varnothing$；

③ Aà $B\Leftrightarrow A$á B；

④ Aà $B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$．

其中真命题的序号是______.（把符合要求的命题序号都填上）

16．（4 分）某日中午 12 时整，甲船自 A 处以 $16km/h$ 的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北 $18km$ 处以 $24km/h$ 的速度向正南行驶，则当日 12 时 30 分时两船之间距间对时间的变化率是______ km/h．

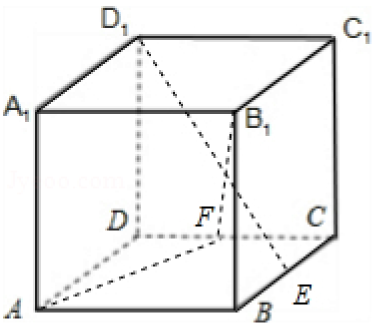
三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 $6\sin 2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos 2\alpha=0$，$\alpha\in[\frac{\pi}{2}，\pi]$，求 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$ 的值.

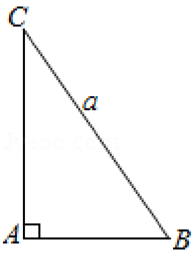
18．（12 分）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 BC 的中点，点 F 是棱 CD 上的动点.

(I) 试确定点 F 的位置，使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F；

(II) 当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，求二面角 C_1-EF-A 的大小（结果用反三角函数值表示）.



19．（12 分）如图，在 RtΔABC 中，已知 $BC=a$，若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点，问 $\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$ 的值最大？并求出这个最大值.



20．（12 分）直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B.

（Ⅰ）求实数 k 的取值范围；

（Ⅱ）是否存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

21．（12 分）某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失．现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用．单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率为 0.9 和 0.85．若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少．（总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值．）

22．（14 分）已知 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}, n=1,2,\ldots$.

(I) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（将 A 用 a 表示）；

(II) 设 $b_n=a_n-A, n=1,2,\ldots$，证明：$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$；

(III) 若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\ldots$ 都成立，求 a 的取值范围.

2004年湖北省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）与直线$2x-y+4=0$的平行的抛物线$y=x^2$的切线方程是$($　　$)$

A．$2x-y+3=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$2x-y+1=0$　　D．$2x-y-1=0$

【解答】解：由题意可设切线方程为$2x-y+m=0$

联立方程组$\begin{cases}2x-y+m=0\\ y=x^2\end{cases}$得$x^2-2x-m=0$

$\triangle=4+4m=0$解得$m=-1$，

$\therefore$切线方程为$2x-y-1=0$，

故选：D．

2.（5分）复数$\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{1+\sqrt{3}i}$的值是$($　　$)$

A．-2　　B．16　　C．$-\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

【解答】解：复数$\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}i}=-2$

故选：A．

3.（5分）已知$f(\dfrac{1-x}{1+x})=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，则$f(x)$的解析式为$($　　$)$

A．$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$　　B．$f(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$

C．$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$　　D．$f(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$

【解答】解：令$\dfrac{1-x}{1+x}=t$，

得$x=\dfrac{1-t}{1+t}$，

$\therefore f(t)=\dfrac{1-(\dfrac{1-t}{1+t})^2}{1+(\dfrac{1-t}{1+t})^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

$\therefore f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

故选：C.

4.（5 分）已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为非零的平面向量．甲：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，乙：$\vec{b}=\vec{c}$，则$($　　$)$

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【解答】解：命题甲：$a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow a\cdot(b-c)=0\Rightarrow a=0$（舍去）或$b=c$或$a\perp(b-c)$.

命题乙：$b=c$，因而乙$\Rightarrow$甲，但甲$\nRightarrow$乙．

故甲是乙的必要条件但不是充分条件．

故选：B.

5.（5 分）若$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则下列不等式

①$a+b<ab$；

②$|a|>|b|$；

③$a<b$；

④$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$中，正确的不等式有$($　　$)$

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【解答】解：$\because\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，$\therefore b<a<0$，$\therefore a+b<0<ab$，故①正确．

$\therefore -b>-a>0$，则$|b|>|a|$，故②错误．

③显然错误．

由于$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$，$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$，故④正确．

综上，①④正确，②③错误，

故选：C.

6.（5 分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在椭圆上．若$P$、$F_1$、$F_2$是一个直角三角形的三个顶点，则点$P$到$x$轴的距离为$($　　$)$

A. $\frac{9}{5}$　　B. 3　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{9}{4}$

【解答】解：设椭圆短轴的一个端点为M.

由于$a=4$，$b=3$，

$\therefore c=\sqrt{7}<b$

$\therefore \angle F_1MF_2<90^{\circ}$，

$\therefore$只能$\angle PF_1F_2=90^{\circ}$或$\angle PF_2F_1=90^{\circ}$.

令$x=\pm\sqrt{7}$得

$y^2=9(1-\frac{7}{16})=\frac{9^2}{16}$，

$\therefore |y|=\frac{9}{4}$.

即P到x轴的距离为$\frac{9}{4}$，

故选：D.

7.（5分）函数$f(x)=a^x+\log_a(x+1)$在$[0，1]$上的最大值与最小值的和为a，则a的值为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

【解答】解：$f(x)$是$[0，1]$上的增函数或减函数，

故$f(0)+f$（1）$=a$，即$1+a+\log_a 2=a \Leftrightarrow \log_a 2=-1$，

$\therefore 2=a^{-1} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

故选：B.

8.（5分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=a[2-(\frac{1}{2})^{n-1}]-b[2-(n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}](n=1,2,\ldots)$，其中$a$、$b$是非零常数，则存在数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$使得(　　)

A. $a_n=x_n+y_n$，其中$\{x_n\}$为等差数列，$\{y_n\}$为等比数列

B. $a_n=x_n+y_n$，其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都为等差数列

C. $a_n=x_n\cdot y_n$，其中$\{x_n\}$为等差数列，$\{y_n\}$都为等比数列

D. $a_n=x_n\cdot y_n$，其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都为等比数列

【解答】解：当$n=1$时，$a_1=S_1=a$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=a[2-(\frac{1}{2})^{n-1}]-b[2-(n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}]-a[2-(\frac{1}{2})^{n-2}]+b[2-n(\frac{1}{2})^{n-2}]$

$=a(\frac{1}{2})^{n-1}+b[(\frac{1}{2})^{n-1}-n(\frac{1}{2})^{n-1}]$

$=[a-(n-1)b](\frac{1}{2})^{n-1}$，

$\therefore a_n=[a-(n-1)b](\frac{1}{2})^{n-1}(n\in N^*)$

故选：C．

9．（5分）函数$f(x)=ax^3+x+1$有极值的充要条件是$(\quad)$

A．$a>0$　　B．$a\geqslant 0$　　C．$a<0$　　D．$a\leqslant 0$

【解答】解：当$a=0$时，函数$f(x)=ax^3+x+1=x+1$是单调增函数无极值，故排除B，D

当$a>0$时，函数$f(x)=ax^3+x+1$是单调增函数无极值，故排除A，

故选：C．

10．（5分）设集合$P=\{m\mid -1<m<0\}$，$Q=\{m\in R\mid mx^2+4mx-4<0$对任意实数$x$恒成立$\}$，则下列关系中成立的是$(\quad)$

A．$P\subsetneqq Q$　　B．$Q\subsetneqq P$　　C．$P=Q$　　D．$P\bigcap Q=Q$

【解答】解：$Q=\{m\in R\mid mx^2+4mx-4<0$对任意实数$x$恒成立$\}$，

对m分类：①$m=0$时，$-4<0$恒成立；

②$m<0$时，需$\triangle=(4m)^2-4\times m\times(-4)<0$，解得$-1<m<0$．

综合①②知$m\leqslant 0$，$\therefore Q=\{m\in R\mid -1<m\leqslant 0\}$．

$P=\{m\mid -1<m<0\}$，

故选：A．

11．（5分）如图是正方体的平面展开图．在这个正方体中，

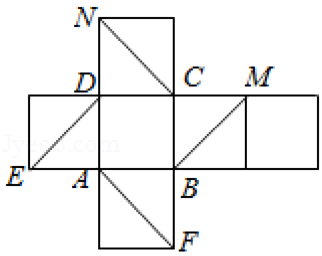
①BM与ED平行；

②CN与BE是异面直线；

③CN与BM成60°角；

④DM与BN垂直．

以上四个命题中，正确命题的序号是(　　)



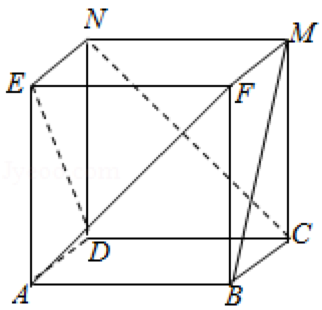
A．①②③　　　　B．②④　　　　C．③④　　　　D．②③④

【解答】解：由题意画出正方体的图形如图：

显然①②不正确；③CN 与 BM 成60°角，即$\angle ANC=60^{\circ}$

正确；④$DM\perp$平面BCN，所以④正确；

故选：C．



12．（5 分）设$y=f(t)$是某港口水的深度y（米)关于时间t（时)的函数，其中$0\leqslant t\leqslant 24$，下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间t与水深y的关系：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经观察，$y=f(t)$可以近似看成$y=K+A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，下面的函数中最能近似地表示表中数据对应关系的函数是(　　)

A．$y=12+3\sin\frac{\pi}{6}t$，$t\in[0,\ 24]$

B．$y=12+3\sin(\frac{\pi}{6}t+\pi)$，$t\in[0,\ 24]$

C．$y=12+3\sin\frac{\pi}{12}t$，$t\in[0,\ 24]$

D．$y=12+3\sin(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2})$，$t\in[0,\ 24]$

【解答】解：排除法：

$\because y=f(t)$ 可以近似看成 $y=K+A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，

$\therefore$ 由 $T=12$ 可排除 C 、 D ，

将 $(3,15)$ 代入

排除 B .

故选： A .

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）设随机变量 ξ 的概率分布为 $P\left(\xi=k\right)=\dfrac{a}{5^k}$,$a$为常数,$k=1,2,\ldots$,则$a=$__4__.

【解答】解：$\because$ 由题意知根据所有的概率和为$1\therefore \dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{5^2}+\dfrac{a}{5^3}+\ldots=1$ 把 a 提出 $a(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}+\ldots)=1$

$\because$ 括号中为无穷等比数列，根据无穷等比递缩数列的求和公式得到 $s=\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{1}{4}a=1$

$\therefore a=4$

故答案为：4

14．（4 分）将标号为 1，2，…，10 的 10 个球放入标号为 1，2，…，10 的 10 个盒子内，每个盒内放一个球，则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有__240__种．（以数字作答）

【解答】解：由分步计数原理知

从 10 个盒中挑 3 个与球标号不一致，共 C_{10}^3 种挑法，

每一种 3 个盒子与球标号全不一致的方法为 2 种，

$\therefore$ 共有 $2C_{10}^3=240$ 种．

故答案为：240．

15．（4 分）设 A 、 B 为两个集合．下列四个命题：

① A à $B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

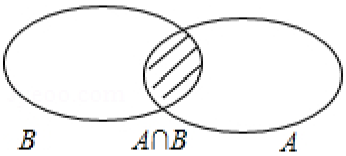
② A à $B\Leftrightarrow A\bigcap B=\varnothing$；

③ A à $B\Leftrightarrow A$ á B；

④ A à $B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$，使得 $x \notin B$．

其中真命题的序号是　④　．（把符合要求的命题序号都填上）

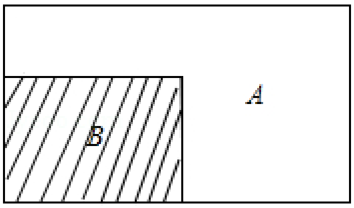
【解答】解：如下图所示：



A à $B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$，有 $x \notin$

结合图象可得①错误；②错误；④正确．

对③判断如下图所示．



A à B 与 A á B 不存在必然的关系，故③错误．

故答案为：④

16．（4 分）某日中午 12 时整，甲船自 A 处以 $16km/h$ 的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北 $18km$ 处以 $24km/h$ 的速度向正南行驶，则当日 12 时 30 分时两船之间距间对时间的变化率是　-1.6　km/h．

【解答】解：$\because$ 甲船自 A 处以 $16km/h$ 的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北 $18km$ 处以 $24km/h$ 的速度向正南行驶，当日 12 时 30 分时，甲船没有到达 A 处，故甲乙两船之间的距离函数是 $y=\sqrt{(18-24t)^2+(16t)^2}=\sqrt{832t^2-864t+324}(0<t<0.75)$

$\therefore y'=\dfrac{-48(18-24t)+32t}{2\sqrt{(18-24t)^2+(16t)^2}}=\dfrac{832\times 2t-864}{2\sqrt{832t^2-864t+324}}$

当日 12 时 30 分时，$t=\dfrac{1}{2}$，

此时两船之间距间对时间的变化率是 $y'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{-48(18-12)+16}{2\sqrt{(18-12)^2+(8)^2}}=-1.6$

故答案为：-1.6 km/h．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 $6\sin 2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos 2\alpha=0$，$\alpha\in[\dfrac{\pi}{2}$，$\pi]$，求 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})$ 的值．

【解答】解：$\because 6\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=0$，

$\therefore \frac{13}{2}\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha$，

$\therefore \tan 2\alpha=\frac{4}{13}$，

$\because \alpha\in[\frac{\pi}{2}，\pi]$，

$\therefore 2\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，

$\therefore \sin 2\alpha=-\frac{4}{\sqrt{4^2+13^2}}=-\frac{4}{\sqrt{185}}$， $\cos 2\alpha=-\frac{13}{\sqrt{185}}$，

$\therefore \sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{4}{\sqrt{185}}\times\frac{1}{2}+(-\frac{13}{\sqrt{185}})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

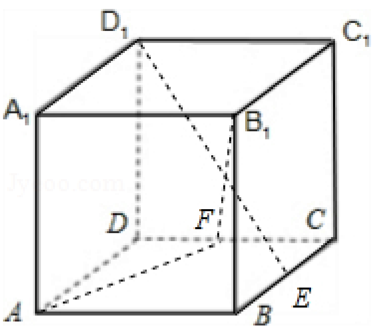
$=\frac{-2\sqrt{185}-\frac{13}{2}\sqrt{555}}{185}$

$=\frac{-4\sqrt{185}-13\sqrt{555}}{370}$.

18.（12 分）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 BC 的中点，点 F 是棱 CD 上的动点.

(I) 试确定点 F 的位置，使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F；

(II) 当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，求二面角 C_1-EF-A 的大小（结果用反三角函数值表示）.



【解答】解法一：(I) 连接 A_1B，则 A_1B 是 D_1E 在面 ABB_1A；内的射影

$\because AB_1\perp A_1B$， $\therefore D_1E\perp AB_1$，

于是 $D_1E\perp$ 平面 $AB_1F\Leftrightarrow D_1E\perp AF$.

连接 DE，则 DE 是 D_1E 在底面 $ABCD$ 内的射影.

$\therefore D_1E \perp AF \Leftrightarrow DE \perp AF$.

$\because ABCD$ 是正方形， E 是 BC 的中点.

$\therefore$ 当且仅当 F 是 CD 的中点时， $DE \perp AF$，

即当点 F 是 CD 的中点时， $D_1E \perp$ 平面 AB_1F .（6 分）

(II) 当 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F 时，由 (I) 知点 F 是 CD 的中点.

又已知点 E 是 BC 的中点，连接 EF，则 $EF // BD$. 连接 AC，

设 AC 与 EF 交于点 H，则 $CH \perp EF$，连接 C_1H，则 CH 是

C_1H 在底面 $ABCD$ 内的射影.

$C_1H \perp EF$，即 $\angle C_1HC$ 是二面角 $C_1 - EF - C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle C_1CH$ 中，$\because C_1C = 1$， $CH = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \tan\angle C_1HC = \frac{C_1C}{CH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}$.

$\therefore \angle C_1HC = \arctan 2\sqrt{2}$，从而 $\angle AHC_1 = \pi - \arctan 2\sqrt{2}$.

故二面角 $C_1 - EF - A$ 的大小为 $\pi - \arctan 2\sqrt{2}$.

解法二：以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系

（1）设 $DF = x$，则 $A(0，0，0)$， $B(1，0，0)$， $D(0，1，0)$，

$A_1(0，0，1)$， $B(1，0，1)$， $D_1(0，1，1)$， $E(1,\frac{1}{2},0)$， $F(x，1，0)$ $\therefore \overrightarrow{D_1E} = (1,-\frac{1}{2},-1), \overrightarrow{AB_1} = (1,0,1), \overrightarrow{AF} = (x,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{D_1E} \bullet \overrightarrow{AB_1} = 1 - 1 = 0$，即 $D_1E \perp AB_1$

于是 $D_1E \perp$ 平面 $AB_1F \Leftrightarrow D_1E \bigcup AF \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1E} \bullet \overrightarrow{AF} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0$

即 $x = \frac{1}{2}$. 故当点 F 是 CD 的中点时， $D_1E \perp$ 平面 AB_1F

（2）当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，F 是 CD 的中点，又 E 是 BC 的中点，连接 EF，则 $EF//BD$．

连接 AC，设 AC 与 EF 交于点 H，则 $AH\perp EF$．连接 C_1H，则 CH 是 C_1H 在底面 $ABCD$ 内的射影．

$\therefore C_1H\perp EF$，即 $\angle AHC_1$ 是二面角 C_1-EF-A 的平面角．

$\because C_1(1,1,1),H(\frac{3}{4},\frac{3}{4},0)$，

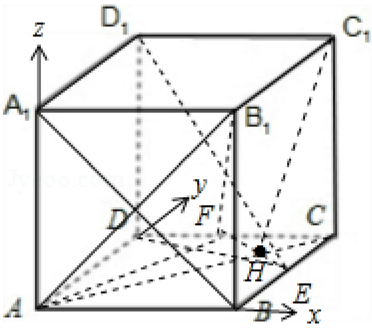
$\because \overrightarrow{HC_1}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1),\overrightarrow{HA}=(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4},0)$．

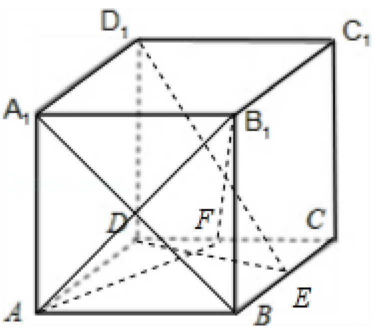
$\therefore \cos\angle AHC_1=\dfrac{\overrightarrow{HA}\bullet\overrightarrow{HC_1}}{|\overrightarrow{HA}|\bullet|\overrightarrow{HC_1}|}$，

$=\dfrac{-\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{9}{8}}\times\sqrt{\frac{9}{8}}}=-\dfrac{1}{3}$，

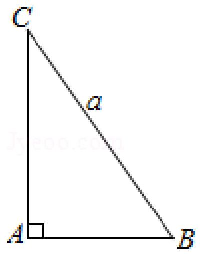
即 $\angle AHC_1=\arccos(-\frac{1}{3})=\pi-\arccos\frac{1}{3}$．

故二面角 C_1-EF-A 的大小为 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$．





19．（12 分）如图，在 RtΔABC 中，已知 $BC=a$，若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点，问 $\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$ 的值最大？并求出这个最大值．



【解答】解：如下图所示：

解法一：$\because$ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\therefore$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$．

$\because$ $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}$，

$\therefore$ $\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

$=-a^2-\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AP}$

$=-a^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{BC}$

$=-a^2+a^2\cos\theta$．

故当$\cos\theta=1$，即$\theta=0$($\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同）时，$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$最大．其最大值为0．

解法二：以直角顶点A为坐标原点，两直角边所在直线为坐标轴建立如图所示的平面直角坐标系．

设$|AB|=c\,|AC|=b$，则$A(0,0)$，$B(c,0)$，$C(0,b)$，

且$|PQ|=2a$，$|BC|=a$．

设点P的坐标为(x,y)，则$Q(-x,-y)$．

$\therefore$ $\overrightarrow{BP}=(x-c,y),\overrightarrow{CQ}=(-x,-y-b)$，

$\overrightarrow{BC}=(-c,b),\overrightarrow{PQ}=(-2x,-2y)$．

$\therefore$ $\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}=(x-c)(-x)+y(-y-b)$

$=-(x^2+y^2)+cx-by$．

$\because\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PQ}|\bullet|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{cx-by}{a^2}$．

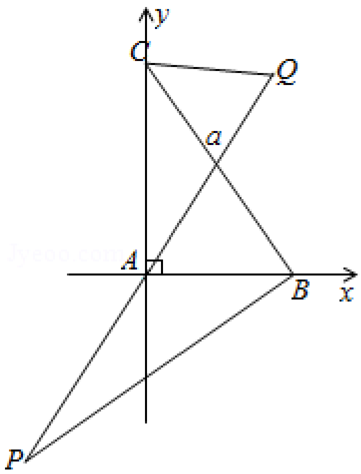
$\therefore cx-by=a^2\cos\theta$．

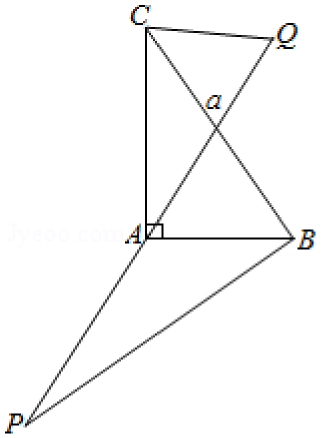
$\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = -a^2 + a^2\cos\theta$.

故当 $\cos\theta = 1$,

即 $\theta = 0(\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同）时，

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 最大，其最大值为 0.





20.（12 分）直线 $l: y = kx + 1$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A 、 B .

（Ⅰ）求实数 k 的取值范围;

（Ⅱ）是否存在实数 k ，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F ？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

【解答】解：（Ⅰ）将直线 l 的方程 $y = kx + 1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2 - y^2 = 1$ 后，整理得 $(k^2 - 2)x^2 + 2kx + 2 = 0$. ①

依题意，直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点，故

$$\begin{cases} k^2-2\neq 0 \\ \triangle=(2k)^2-8(k^2-2)>0 \\ -\dfrac{2k}{k^2-2}>0 \\ \dfrac{2}{k^2-2}>0. \end{cases}$$

解得 k 的取值范围是 $-2<k<-\sqrt{2}$.

（Ⅱ）设 A 、 B 两点的坐标分别为 $(x_1，\ y_1)$、$(x_2，\ y_2)$，则由①式得 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k}{2-k^2} \\ x_1\bullet x_2=\dfrac{2}{k^2-2}. \end{cases}$ ②

假设存在实数 k ，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(c,0)$.

则由 $FA\perp FB$ 得：$(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0$.

即 $(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$.

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0$. ③

把②式及 $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 代入③式化简得 $5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$.

解得 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}\notin\left(-2,-\sqrt{2}\right)$（舍去）

可知 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.

21.（12 分）某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失．现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用．单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率为 0.9 和 0.85．若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少．（总费用 $=$ 采取预防措施的费用 $+$ 发生突发事件损失的期望值．）

【解答】解：①不采取预防措施时，总费用即损失期望为 $400\times 0.3=120$（万元）；

②若单独采取措施甲，则预防措施费用为 45 万元，发生突发事件的概率为 $1-0.9=0.1$，损失期望值为 $400\times 0.1=40$（万元），所以总费用为 $45+40=85$（万元）

③若单独采取预防措施乙，则预防措施费用为 30 万元，发生突发事件的概率为 $1-0.85=0.15$，损失期望值为 $400\times 0.15=60$（万元），所以总费用为 $30+60=90$（万元）；

④若联合采取甲、乙两种预防措施，则预防措施费用为 $45+30=75$（万元），发生突发事件的概率为 $(1-0.9)(1-0.85)=0.015$，损失期望值为 $400\times 0.015=6$（万元），所以总费用为 $75+6=81$（万元）.

综合①、②、③、④，比较其总费用可知，应选择联合采取甲、乙两种预防措施，可使总费用最少．

22．（14 分）已知 $a>0$,数列$\{a_n\}$满足$a_1=a,a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n},n=1,2,\ldots$．

(I) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（将 A 用 a 表示）；

(II) 设 $b_n=a_n-A,n=1,2,\ldots$,证明:$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A\left(b_n+A\right)}$；

(III) 若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对$n=1,2,\ldots$都成立，求 a 的取值范围．

【解答】解：(I) 由

$\backslash mathop\,\lim\lim its_{n\to\infty}a_n$存在,且$A=\backslash mathop\,\lim\lim its_{n\to\infty}a_n(A>0)$,对$a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$两边取极限得$A=a+\dfrac{1}{A}$,解得$A=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$.又$A>0$，

$\therefore A=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$．

(II)由$a_n=b_n+A,a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$得$b_{n+1}+A=a+\dfrac{1}{b_n+A}$． $\therefore b_{n+1}=a-A+\dfrac{1}{b_n+A}=-\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{b_n+A}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$．

即$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A\left(b_n+A\right)}$对$n=1,2,$都成立

(III)令$|b_1|\leqslant\dfrac{1}{2}$,得$\left|a-\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$．

$\therefore |\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)|\leqslant\dfrac{1}{2}$．

$\therefore \sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$,解得$a\geqslant\dfrac{3}{2}$．

现证明当$a\geqslant\dfrac{3}{2}$时,$|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$对$n=1,2,$都成立．

(i) 当 $n=1$ 时结论成立（已验证）．

(ii) 假设当 $n=k\left(k\geqslant 1\right)$时结论成立,即$|b_k|\leqslant\dfrac{1}{2^k}$,那么$|b_{k+1}|=\dfrac{|b_k|}{\left|A\left(b_k+A\right)\right|}\leqslant\dfrac{1}{A|b_k+A|}\times\dfrac{1}{2^k}$

故只须证明$\dfrac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\dfrac{1}{2}$,即证$A|b_k+A|\geqslant 2$对$a\geqslant\dfrac{3}{2}$成立．

由于$A=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$，

而当$a\geqslant\dfrac{3}{2}$时,$\sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$， $\therefore A\geqslant 2$．

$\therefore |b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant 2-\dfrac{1}{2^k}\geqslant 1$,即$A|b_k+A|\geqslant 2$．

故当$a\geqslant \dfrac{3}{2}$时，$|b_{k+1}|\leqslant \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2^{k+1}}$.

即 $n=k+1$ 时结论成立．

根据 (i) 和 (ii) 可知结论对一切正整数都成立．

故$|b_n|\leqslant \dfrac{1}{2^n}$对$n=1,2,$都成立的$a$的取值范围为$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$．