# 2004年天津市高考理科数学真题及答案

**一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）**

1．（5分）$i$ 是虚数单位，$\dfrac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=(\quad)$

A．$1+i$　　B．$-1-i$　　C．$1+3i$　　D．$-1-3i$

2．（5分）若不等式 $\dfrac{2x-1}{x}\geqslant 3$ 的解集为$(\quad)$

A．$[-1，0)$　　B．$[-1，+\infty)$

C．$(-\infty，-1]$　　D．$(-\infty，-1]\bigcup(0,+\infty)$

3．（5分）若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,-2)$ 的夹角是 $180^{\circ}$，且 $|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\vec{b}=(\quad)$

A．$(-3,6)$　　B．$(3,-6)$　　C．$(6,-3)$　　D．$(-6,3)$

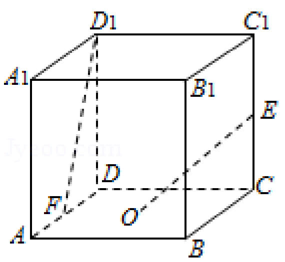
4．（5分）设 $P$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，该双曲线的一条渐近线方程是 $3x+4y=0$，$F_1$，$F_2$ 分别是双曲线的左、右焦点，若 $|PF_1|=10$，则 $|PF_2|$ 等于$(\quad)$

A．2　　B．18　　C．2或18　　D．16

5．（5分）若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$ 在区间 $[a，2a]$ 上的最大值是最小值的3倍，则 $a$ 等于$(\quad)$

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

6．（5分）如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$O$ 是底面 $ABCD$ 的中心，$E$、$F$ 分别是 $CC_1$、$AD$ 的中点，那么异面直线 $OE$ 和 $FD_1$ 所成的角的余弦值等于$(\quad)$




A．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

7．（5分）点 $P(2,-1)$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 $AB$ 的中点，则直线 $AB$ 的方程为$(\quad)$

A．$x+y-1=0$　　B．$2x+y-3=0$　　C．$x-y-3=0$　　D．$2x-y-5=0$

8.（5 分）已知数列$\{a_n\}$，那么“对任意的$n\in N^*$，点$P_n(n,a_n)$都在直线$y=2x+1$上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的(　　)

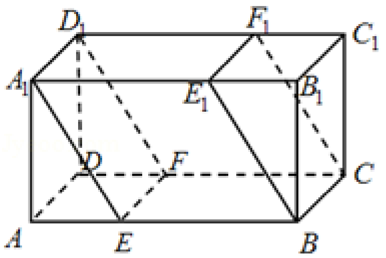
A．必要而不充分条件　　　　　　　　　　B．充分而不必要条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

9.（5 分）函数$y=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)$，$x\in[0$，$\pi])$为增函数的区间是(　　)

A．$[0$，$\frac{\pi}{3}]$　　　B．$[\frac{\pi}{12}$，$\frac{7}{12}\pi]$　　　C．$[\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{6}\pi]$　　　D．$[\frac{5}{6}\pi$，$\pi]$

10.（5 分）如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=6$，$AD=4$，$AA_1=3$，分别过$BC$、$A_1D_1$的两个平行截面将长方体分成三部分，其体积分别记为$V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$，$V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$．若$V_1:V_2:V_3=1:4:1$，则截面$A_1EFD_1$的面积为(　　)




A．$4\sqrt{10}$　　　B．$8\sqrt{3}$　　　C．$4\sqrt{13}$　　　D．16

11.（5 分）函数$y=3^{x^2-1}(-1\leqslant x<0)$的反函数是(　　)

A．$y=\sqrt{1+\log_3 x}(x\geqslant\frac{1}{3})$　　　　　　B．$y=-\sqrt{1+\log_3 x}(x\geqslant\frac{1}{3})$

C．$y=\sqrt{1+\log_3 x}(\frac{1}{3}<x\leqslant 1)$　　　　　　D．$y=-\sqrt{1+\log_3 x}(\frac{1}{3}<x\leqslant 1)$

12.（5 分）定义在$R$上的函数$f(x)$既是偶函数又是周期函数．若$f(x)$的最小正周期是$\pi$，且当$x\in[0$，$\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)=\sin x$，则$f(\frac{5\pi}{3})$的值为(　　)

A．$-\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

**二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）**

13.（4 分）某工厂生产$A$、$B$、$C$三种不同型号的产品，产品数量之比依次为$2:3:5$，现用分层抽样方法抽出一个容量为$n$的样本，样本中$A$种型号产品有 16 件．那么此样本的容量$n=$______．

14.（4 分）如果过两点$A(a,0)$和$B(0,a)$的直线与抛物线$y=x^2-2x-3$没有交点，那么实数$a$的取值范围

是_____.

15．（4 分）若 $(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2004}x^{2004}(x\in R)$，则 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\ldots+(a_0+a_{2004})=$_____.（用数字作答）

16．（4 分）从 1，3，5，7 中任取 2 个数字，从 0，2，4，6，8 中任取 2 个数字组成没有重复数字的四位数，其中能被 5 整除的四位数共有_____个.（用数字作答）

**三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）**

17．（12 分）已知 $\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18．（12 分）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，设随机变量 $\xi$ 表示所选 3 人中女生的人数.

（1）求 $\xi$ 的分布列和 $\xi$ 的数学期望；

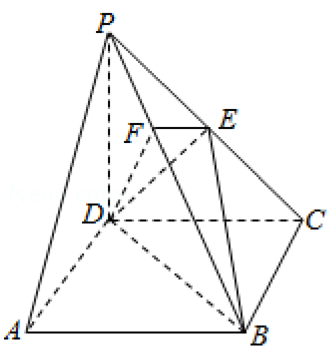
（2）求“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率.

19．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC$，$E$ 是 $PC$ 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 $PB$ 于点 $F$.

（1）证明 $PA//$ 平面 $EDB$；

（2）证明 $PB\perp$ 平面 $EFD$；

（3）求二面角 $C-PB-D$ 的大小.




20．（12 分）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm 1$ 处取得极值.

（Ⅰ）讨论 $f$（1）和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值；

（Ⅱ）过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求此切线方程.

21.（12 分）掷一个骰子，观察向上一面的点数，求下列事件的概率：

（1）点数为偶数；

（2）点数大于 2 且小于 5.

22.（14 分）椭圆的中心是原点 $O$，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c，0)(c>0)$ 的准线 $l$ 与 $x$ 轴相交于点 $A$，$|OF|=2|FA|$，过点 $A$ 的直线与椭圆相交于 $P$、$Q$ 两点.

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 $PQ$ 的方程；

（3）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 $P$ 且平行于准线 $l$ 的直线与椭圆相交于另一点 $M$，证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

# 2004年天津市高考数学试卷（理科）

## 参考答案与试题解析

### 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）$i$是虚数单位，$\dfrac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=(\quad)$

A．$1+i$　　B．$-1-i$　　C．$1+3i$　　D．$-1-3i$

【解答】解：$\dfrac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=\dfrac{-3+i}{-i}=i\ (-3+i)=-1-3i$，

故选：$D$．

2．（5分）若不等式$\dfrac{2x-1}{x}\geqslant 3$的解集为$(\quad)$

A．$[-1,\ 0)$　　B．$[-1,\ +\infty)$

C．$(-\infty,\ -1]$　　D．$(-\infty,\ -1]\bigcup(0,+\infty)$

【解答】解：$\dfrac{2x-1}{x}\geqslant 3\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x}-3\geqslant 0\Rightarrow\dfrac{x+1}{x}\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x<0$

故选：$A$．

3．（5分）若平面向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是$180^\circ$，且$|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则$\vec{b}=(\quad)$

A．$(-3,6)$　　B．$(3,-6)$　　C．$(6,-3)$　　D．$(-6,3)$

【解答】解$\because$向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是$180^\circ$，

$\therefore$向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}$反向，

令$\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda,-2\lambda)$（则$\lambda<0$），

又$\because|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，

$\therefore\sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2}=3\sqrt{5}$

解得$\lambda=-3$

故$\vec{b}=(-3,6)$

故选：$A$．

4．（5分）设$P$是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$上一点，该双曲线的一条渐近线方程是$3x+4y=0$，$F_1$，$F_2$分别是双曲线的左、右焦点，若$|PF_1|=10$，则$|PF_2|$等于$(\quad)$

A．2　　　　　B．18　　　　　C．2 或 18　　　　　D．16

【解答】解：整理准线方程得 $y=-\frac{3}{4}x$，

$\therefore \frac{3}{a}=\frac{3}{4}$，$a=4$，

$\therefore |PF_1|-|PF_2|=2a=8$ 或 $|PF_2|-|PF_1|=2a=8$

$\therefore |PF_2|=2$ 或 18，

故选：$C$．

5．（5 分）若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$ 在区间 $[a，\ 2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍，则 $a$ 等于 $($　　$)$

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　　C．$\frac{1}{4}$　　　　　D．$\frac{1}{2}$

【解答】解：$\because 0<a<1$，

$\therefore f(x)=\log_a x$ 是减函数．

$\therefore \log_a a=3\bullet\log_a 2a$．

$\therefore \log_a 2a=\frac{1}{3}$．

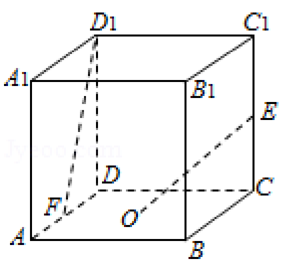
$\therefore 1+\log_a 2=\frac{1}{3}$．

$\therefore \log_a 2=-\frac{2}{3}$．

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

故选：$A$．

6．（5 分）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$O$ 是底面 $ABCD$ 的中心，$E$、$F$ 分别是 $CC_1$、$AD$ 的中点，那么异面直线 $OE$ 和 $FD_1$ 所成的角的余弦值等于 $($　　$)$




A．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　　　　B．$\frac{\sqrt{15}}{5}$　　　　　C．$\frac{4}{5}$　　　　　D．$\frac{2}{3}$

【解答】解：取 $BC$ 的中点 $G$．连接 $GC_1//FD_1$，再取 $GC$ 的中点 $H$，连接 $HE$、$OH$，则 $\angle OEH$ 为异面直

线所成的角.

在$\Delta OEH$中，$OE=\sqrt{3}$，$HE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$OH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

由余弦定理，可得$\cos\angle OEH=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

故选：$B$.

7.（5 分）点$P(2,-1)$为圆$(x-1)^2+y^2=25$的弦$AB$的中点，则直线$AB$的方程为(　　)

A．$x+y-1=0$　　B．$2x+y-3=0$　　C．$x-y-3=0$　　D．$2x-y-5=0$

【解答】解：$\because AB$是圆$(x-1)^2+y^2=25$的弦，圆心为$C(1,0)$

$\therefore$设$AB$的中点是$P(2,-1)$满足$AB\perp CP$

因此，$AB$的斜率$k=\dfrac{-1}{k_{CP}}=\dfrac{-1}{\dfrac{0+1}{1-2}}=1$

可得直线$AB$的方程是$y+1=x-2$，化简得$x-y-3=0$

故选：$C$.

8.（5 分）已知数列$\{a_n\}$，那么“对任意的$n\in N^*$，点$P_n(n,a_n)$都在直线$y=2x+1$上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的(　　)

A．必要而不充分条件　　B．充分而不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：$\because$点$P_n(n,a_n)$都在直线$y=2x+1$上

$\therefore a_n=2n+1$，

$\therefore$ “$\{a_n\}$为等差数列，

若“$\{a_n\}$为等差数列，可设$a_n=2n+2$，则点$P_n(n,a_n)$都不在直线$y=2x+1$上，

$\therefore$对任意的$n\in N*$，点$P_n(n,a_n)$都在直线$y=2x+1$上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的充分而不必要条件，

故选：$B$.

9.（5 分）函数$y=2\sin(\dfrac{\pi}{6}-2x)$，$x\in[0$，$\pi])$为增函数的区间是(　　)

A．$[0$，$\dfrac{\pi}{3}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi]$　　C．$[\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{6}\pi]$　　D．$[\dfrac{5}{6}\pi$，$\pi]$

【解答】解：由 $y=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 其增区间可由 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的减区间得到，

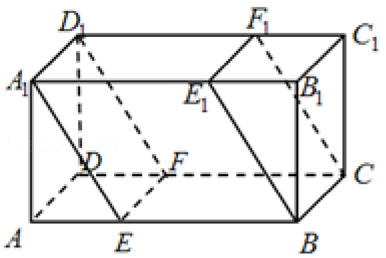
即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$， $k\in Z$

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5}{6}\pi$， $k\in Z$ .

令 $k=0$， $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant \frac{5}{6}\pi$，

故选： $C$ .

10.（5 分）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=6$， $AD=4$， $AA_1=3$，分别过 $BC$ 、 $A_1D_1$ 的两个平行截面将长方体分成三部分，其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$， $V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$ . 若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$，则截面 $A_1EFD_1$ 的面积为(　　)




A． $4\sqrt{10}$　　　　B． $8\sqrt{3}$　　　　C． $4\sqrt{13}$　　　　D． 16

【解答】解：由题意知，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $A_1D_1EF//$ 平面 $B_1C_1E_1F_1$，

$\therefore$ 截面是一个矩形，并且长方体的体积 $V=6\times4\times3=72$，

$\because V_1:V_2:V_3=1:4:1$， $\therefore V_1=V_{AEA_1-DFD_1}=\frac{1}{6}\times72=12$，

则 $12=\frac{1}{2}\times AE\times A_1A\times AD$，解得 $AE=2$，

在直角 $\Delta AEA_1$ 中， $EA_1=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

故截面的面积是 $EF\times EA_1=4\sqrt{13}$，

故选： $C$ .

11.（5 分）函数 $y=3^{x^2-1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是(　　)

A． $y=\sqrt{1+\log_3 x}(x\geqslant\frac{1}{3})$　　　　B． $y=-\sqrt{1+\log_3 x}(x\geqslant\frac{1}{3})$

C． $y=\sqrt{1+\log_3 x}(\frac{1}{3}<x\leqslant 1)$　　　　D． $y=-\sqrt{1+\log_3 x}(\frac{1}{3}<x\leqslant 1)$

【解答】解：函数 $y=3^{x^2-1}$，可得 $x^2-1=\log_3 y$

$x^2=1+\log_3 y$，$\because -1\leqslant x<0$，$\therefore x=-\sqrt{1+\log_3 y}$

所以函数 $y=3^{x^2-1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是：$y=-\sqrt{1+\log_3 x}(\frac{1}{3}<x\leqslant 1)$

故选：$D$.

12.（5 分）定义在 $R$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数．若 $f(x)$ 的最小正周期是 $\pi$，且当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f(\frac{5\pi}{3})$ 的值为(　　)

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：$\because f(x)$ 的最小正周期是 $\pi$

$\therefore f(\frac{5\pi}{3})=f(\frac{5\pi}{3}-2\pi)=f(-\frac{\pi}{3})$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数

$\therefore f(\frac{5\pi}{3})=f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：$D$.

**二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）**

13.（4 分）某工厂生产 $A$、$B$、$C$ 三种不同型号的产品，产品数量之比依次为 $2:3:5$，现用分层抽样方法抽出一个容量为 $n$ 的样本，样本中 $A$ 种型号产品有 16 件．那么此样本的容量 $n=$__80__.

【解答】解：$n\times\frac{2}{2+3+5}=16$

$\therefore n=80$

故答案是 80

14.（4 分）如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点，那么实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{13}{4})$__.

【解答】解：过 $A$、$B$ 两点的直线为：$x+y=a$ 与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 联立得：$x^2-x-a-3=0$.

因为直线与抛物线没有交点，则方程无解．

即 $\triangle=1+4(a+3)<0$，

解之得 $a<-\frac{13}{4}$.

故答案为：$(-\infty,-\frac{13}{4})$

15．（4分）若 $(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2004}x^{2004}(x\in R)$，则 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\ldots+(a_0+a_{2004})=$__2004__．（用数字作答）

【解答】解：令 $x=0$，得 $a_0=1$；

令 $x=1$，得 $1=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2004}$，

故 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)++(a_0+a_{2004})=2003a_0+a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2004}=2004$.

故答案为：2004

16．（4分）从1，3，5，7中任取2个数字，从0，2，4，6，8中任取2个数字组成没有重复数字的四位数，其中能被5整除的四位数共有__300__个．（用数字作答）

【解答】解：①四位数中包含5和0的情况：

$C_3^1 \bullet C_4^1 \bullet (A_3^3+A_2^1 \bullet A_2^2)=120$.

②四位数中包含5，不含0的情况：

$C_3^1 \bullet C_4^2 \bullet A_3^3=108$.

③四位数中包含0，不含5的情况：

$C_3^2 C_4^1 A_3^3=72$.

$\therefore$ 四位数总数为 $120+108+72=300$.

故答案为：300．

**三、解答题（共6小题，满分74分）**

17．（12分）已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值．

【解答】解：（Ⅰ）解：$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$，

由 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$，有 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$；

（Ⅱ）解法一：$\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}$

$=\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\tan\alpha-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{6}$.

解法二：由（1），$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$，得 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}\cos\alpha$

$\therefore \sin^2\alpha=\dfrac{1}{9}\cos^2\alpha 1-\cos^2\alpha=\dfrac{1}{9}\cos^2\alpha$，$\therefore \cos^2\alpha=\dfrac{9}{10}$

于是 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{4}{5}$，

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha=-\dfrac{3}{5}$

代入得 $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{-\dfrac{3}{5}-\dfrac{9}{10}}{1+\dfrac{4}{5}}=-\dfrac{5}{6}$.

18.（12 分）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，设随机变量 $\xi$ 表示所选 3 人中女生的人数.

（1）求 $\xi$ 的分布列和 $\xi$ 的数学期望；

（2）求“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率.

【解答】解：（1）由题意知本题是一个超几何分步，

随机变量 $\xi$ 表示所选 3 人中女生的人数，$\xi$ 可能取的值为 0，1，2.

$P(\xi=k)=\dfrac{C_2^k\bullet C_4^{3-k}}{C_6^3}, k=0,\ 1,\ 2$.

$\therefore \xi$ 的分布列为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{3}{5}$ | $\dfrac{1}{5}$ |

$\therefore \xi$ 的数学期望为 $E\xi=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$

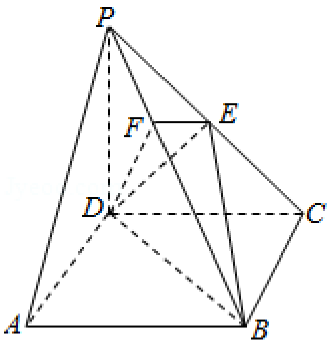
（2）由（1）知“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率为 $P(\xi\leqslant 1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\dfrac{4}{5}$

19.（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC$，$E$ 是 $PC$ 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 $PB$ 于点 $F$.

（1）证明 $PA//$ 平面 $EDB$；

（2）证明 $PB \perp$ 平面 $EFD$；

（3）求二面角 $C-PB-D$ 的大小.




【解答】解：方法一：

（1）证明：连接 $AC$，$AC$ 交 $BD$ 于 $O$，连接 $EO$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 点 $O$ 是 $AC$ 的中点

在 $\Delta PAC$ 中，$EO$ 是中位线，$\therefore PA//EO$

而 $EO \subset$ 平面 $EDB$ 且 $PA \not\subset$ 平面 $EDB$，

所以，$PA//$ 平面 $EDB$

（2）证明：

$\because PD \perp$ 底面 $ABCD$ 且 $DC \subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PD \perp DC$

$\because PD = DC$，可知 $\Delta PDC$ 是等腰直角三角形，而 $DE$ 是斜边 $PC$ 的中线，

$\therefore DE \perp PC$. ①

同样由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，得 $PD \perp BC$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，有 $DC \perp BC$，$\therefore BC \perp$ 平面 $PDC$.

而 $DE \subset$ 平面 $PDC$，$\therefore BC \perp DE$. ②

由①和②推得 $DE \perp$ 平面 $PBC$.

而 $PB \subset$ 平面 $PBC$，$\therefore DE \perp PB$

又 $EF \perp PB$ 且 $DE \bigcap EF = E$，所以 $PB \perp$ 平面 $EFD$.

（3）解：由（2）知，$PB \perp DF$，故 $\angle EFD$ 是二面角 $C-PB-D$ 的平面角.

由（2）知，$DE \perp EF$，$PD \perp DB$.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a$，

则 $PD=DC=a,\ BD=\sqrt{2}a PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{3}a$， $PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{2}a DE=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

在 RtΔPDB 中， $DF=\frac{PD\bullet BD}{PB}=\frac{a\bullet\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ .

在 RtΔEFD 中， $\sin EFD=\frac{DE}{DF}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\therefore \angle EFD=\frac{\pi}{3}$ .

所以，二面角 $C-PB-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ .

方法二：如图所示建立空间直角坐标系， $D$ 为坐标原点，设 $DC=a$ .

（1）证明：连接 $AC$， $AC$ 交 $BD$ 于 $G$，连接 $EG$ .

依题意得 $A(a,\ 0,\ 0),\ P(0,\ 0,\ a),\ E(0,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2})$ .

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形， $\therefore G$ 是此正方形的中心，故点 $G$ 的坐标为 $(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0)$ 且

$\overrightarrow{PA}=(a,\ 0,\ -a),\ \overrightarrow{EG}=(\frac{a}{2},\ 0,\ -\frac{a}{2})$ .

$\therefore \overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，这表明 $PA//EG$ .

而 $EG\subset$ 平面 $EDB$ 且 $PA\not\subset$ 平面 $EDB$， $\therefore PA//$ 平面 $EDB$ .

（2）证明；依题意得 $B(a，\ a，\ 0)$， $\overrightarrow{PB}=(a,\ a,\ -a)$ .

又 $\overrightarrow{DE}=(0,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2})$，故 $\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{DE}=0+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$ .

$\therefore PB\perp DE$ .

由已知 $EF\perp PB$，且 $EF\bigcap DE=E$，所以 $PB\perp$ 平面 $EFD$ .

（3）解：设点 $F$ 的坐标为 $(x_0，\ y_0，\ z_0)$， $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $(x_0，\ y_0，\ z_0-a)=\lambda(a，\ a，\ -a)$ .

从而 $x_0=\lambda a$， $y_0=\lambda a$， $z_0=(1-\lambda)a$ . 所以 $\overrightarrow{FE}=(-x_0,\ \frac{a}{2}-y_0,\ \frac{a}{2}-z_0)=(-\lambda a,(\frac{1}{2}-\lambda)a,\ (\lambda-\frac{1}{2})a)$ .

由条件 $EF\perp PB$ 知， $\overrightarrow{FE}\bullet\overrightarrow{PB}=0$，即 $-\lambda a^2+(\frac{1}{2}-\lambda)a^2-(\lambda-\frac{1}{2})a^2=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 点 $F$ 的坐标为 $(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3},\ \frac{2a}{3})$，且 $\overrightarrow{FE}=(-\frac{a}{3},\ \frac{a}{6},\ -\frac{a}{6})$， $\overrightarrow{FD}=(-\frac{a}{3},\ -\frac{a}{3},\ -\frac{2a}{3})$

$\therefore \overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{FD}=-\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}=0$

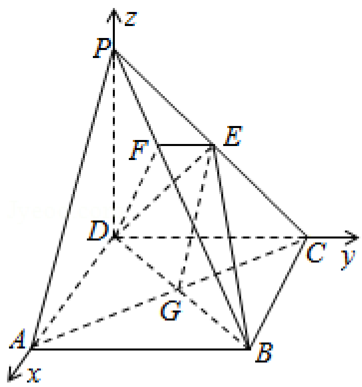
即 $PB \perp FD$，故 $\angle EFD$ 是二面角 $C-PB-D$ 的平面角.

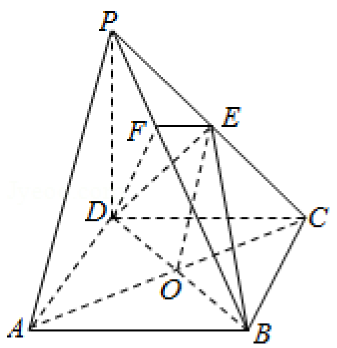
$\because \overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{FD}=\frac{a^{2}}{9}-\frac{a^{2}}{18}+\frac{a^{2}}{9}=\frac{a^{2}}{6}$，且 $|\overrightarrow{FE}|=\sqrt{\frac{a^{2}}{9}+\frac{a^{2}}{36}+\frac{a^{2}}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6} a$，$|\overrightarrow{FD}|=\sqrt{\frac{a^{2}}{9}+\frac{a^{2}}{9}+\frac{4 a^{2}}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3} a$，

$$\therefore \cos EFD=\frac{\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}||\overrightarrow{FD}|}=\frac{\frac{a^{2}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6} a \bullet \frac{\sqrt{6}}{3} a}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore \angle EFD=\frac{\pi}{3}$.

所以，二面角 $C-PB-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.




20.（12 分）已知函数 $f(x)=ax^{3}+bx^{2}-3x$ 在 $x=\pm 1$ 处取得极值.

（Ⅰ）讨论 $f$（1）和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值；

（Ⅱ）过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求此切线方程.

【解答】（Ⅰ）解：$f'(x)=3ax^{2}+2bx-3$，依

题意，$f'$（1）$=f'(-1)=0$，

即 $\begin{cases}3a+2b-3=0 \\ 3a-2b-3=0.\end{cases}$

解得 $a=1$， $b=0$ .

$\therefore f(x)=x^3-3x$， $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ .

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$， $x=1$ .

若 $x\in(-\infty$， $-1)\cup(1$， $+\infty)$，

则 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是增函数， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

若 $x\in(-1,1)$，

则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数.

所以， $f(-1)=2$ 是极大值； $f$ （1） $=-2$ 是极小值.

（II）解：曲线方程为 $y=x^3-3x$，点 $A(0,16)$ 不在曲线上.

设切点为 $M(x_0$， $y_0)$，

则点 $M$ 的坐标满足 $y_0=x_0^3-3x_0$ .

因 $f'(x_0)=3(x_0^2-1)$，

故切线的方程为 $y-y_0=3(x_0^2-1)(x-x_0)$

注意到点 $A(0,16)$ 在切线上，有 $16-(x_0^3-3x_0)=3(x_0^2-1)(0-x_0)$

化简得 $x_0^3=-8$，

解得 $x_0=-2$ .

所以，切点为 $M(-2,-2)$，切线方程为 $9x-y+16=0$ .

21.（12 分）掷一个骰子，观察向上一面的点数，求下列事件的概率：

（1）点数为偶数；

（2）点数大于 2 且小于 5.

【解答】解：掷一个骰子，向上一面的点数可能为 1，2，3，4，5，6，共 6 种．这些点数出现的可能性相等.

（1）点数为偶数有 3 种可能，即点数为 2，4，6，

$\therefore P$（点数为偶数）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$；（3 分）

（2）点数大于 2 且小于 5 有 2 种可能，即点数为 3，4，

$\therefore P$（点数大于 2 且小于 5）$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.（6 分）

22.（14 分）椭圆的中心是原点 $O$，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c，\ 0)(c>0)$ 的准线 $l$ 与 $x$ 轴相交于点 $A$，$|OF|=2|FA|$，过点 $A$ 的直线与椭圆相交于 $P$、$Q$ 两点.

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 $PQ$ 的方程；

（3）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 $P$ 且平行于准线 $l$ 的直线与椭圆相交于另一点 $M$，证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

【解答】（1）解：由题意，可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$.

由已知得 $\begin{cases}a^2-c^2=2\\ c=2(\frac{a^2}{c}-c).\end{cases}$

解得 $a=\sqrt{6},\ c=2$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（2）解：由（1）可得 $A(3,0)$.

设直线 $PQ$ 的方程为 $y=k(x-3)$. 由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$

得 $(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$

依题意 $\triangle=12(2-3k^2)>0$，得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设 $P(x_1，\ y_1)$，$Q(x_2，\ y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1}$，①

$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1}$. ②

由直线 $PQ$ 的方程得 $y_1=k(x_1-3)$，$y_2=k(x_2-3)$. 于是 $y_1y_2=k^2(x_1-3)(x_2-3)=k^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$. ③

$\because \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$. ④

由①②③④得 $5k^2=1$，从而 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\in(-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3})$ .

所以直线 $PQ$ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$

（3）证明：$\overrightarrow{AP}=(x_1-3,\ y_1),\ \overrightarrow{AQ}=(x_2-3,\ y_2)$ .

由已知得方程组 $\begin{cases} x_1-3=\lambda(x_2-3) \\ y_1=\lambda y_2 \\ \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1 \\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1. \end{cases}$

注意 $\lambda>1$，解得 $x_2=\frac{5\lambda-1}{2\lambda}$

因 $F(2,0)$，$M(x_1,\ -y_1)$，故 $\overrightarrow{FM}=(x_1-2,\ -y_1)=(\lambda(x_2-3)+1,\ -y_1)=(\frac{1-\lambda}{2},\ -y_1)=-\lambda(\frac{\lambda-1}{2\lambda},\ y_2)$ .

而 $\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,\ y_2)=(\frac{\lambda-1}{2\lambda},\ y_2)$，所以 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$ .