

绝密 ★ 启用前

2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第 I 卷1至2页，第 II 卷3至10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1.答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、科目涂写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。

2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上的无效。

3.本卷共10小题，每小题5分，共50分。

参考公式：

如果事件A, B互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2.$$

如果事件A, B相互独立，那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ 其中R表示球的半径.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $U = \{x \in N \mid 0 < x \leq 8\}$ ， $S = \{1, 2, 4, 5\}$ ， $T = \{3, 5, 7\}$ ，则 $S \cap (\complement_U T) =$

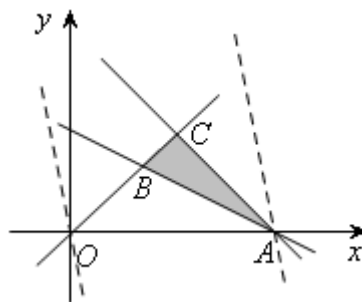
- (A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (C) $\{1, 2\}$ (D) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

解析：因为 $\complement_U T = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ，所以 $S \cap (\complement_U T) = \{1, 2, 4\}$ ，选A.

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = 5x + y$ 的最大值为

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

解析：如图，由图象可知目标函数 $z = 5x + y$ 过点 $A(1,0)$ 时 z 取得最大值， $z_{\max} = 5$ ，选D.



(3) 函数 $y = 1 + \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) 的反函数是

- (A) $y = (x-1)^2$ ($1 \leq x \leq 3$) (B) $y = (x-1)^2$ ($0 \leq x \leq 4$)
 (C) $y = x^2 - 1$ ($1 \leq x \leq 3$) (D) $y = x^2 - 1$ ($0 \leq x \leq 4$)

解析：当 $0 \leq x \leq 4$ 时， $1 + \sqrt{x} \in [1, 3]$ ，解 $y = 1 + \sqrt{x}$ 得 $f^{-1}(x) = (x-1)^2$ ，选A.

(4) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前5项和 $S_5 = 25$ ，且 $a_2 = 3$ ，则 $a_7 =$

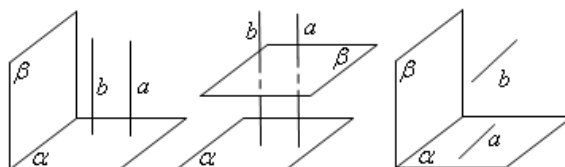
- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

解析： $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(a_2 + a_4)}{2} \Rightarrow a_4 = 7$ ，所以 $a_7 = a_2 + 5d = a_2 + 5 \cdot \frac{a_4 - a_2}{2} = 13$ ，选B.

(5) 设 a, b 是两条直线， α, β 是两个平面，则 $a \perp b$ 的一个充分条件是

- (A) $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ (B) $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$
 (C) $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ (D) $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

解析：选C，A、B、D的反例如图.



(6) 把函数 $y = \sin x$ ($x \in R$) 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，得到的图象所表示的函数是

- (A) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $x \in R$ (B) $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$, $x \in R$
 (C) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, $x \in R$ (D) $y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, $x \in R$

解析：选C,

$$y = \sin x \xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位}} y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的 } \frac{1}{2} \text{ 倍}} y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

(7) 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点相同，离心

率为 $\frac{1}{2}$ ，则此椭圆的方程为

(A) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ (B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (C) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$ (D) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

解析：抛物线的焦点为(2,0)，椭圆焦点在x轴上，排除A、C，由 $e = \frac{1}{2}$ 排除D，选B.

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$ ，则不等式 $f(x) \geq x^2$ 的解集是

(A) [-1,1] (B) [-2,2] (C) [-2,1] (D) [-1,2]

解析：依题意得 $\begin{cases} x \leq 0 \\ x+2 \geq x^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ -x+2 \geq x^2 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$ 或 $0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ，选A

.

(9) 设 $a = \sin \frac{5\pi}{7}$ ， $b = \cos \frac{2\pi}{7}$ ， $c = \tan \frac{2\pi}{7}$ ，则

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < c < a$ (D) $b < a < c$

解析： $a = \sin \frac{2\pi}{7}$ ，因为 $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $0 < \cos \frac{2\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7} < 1 < \tan \frac{2\pi}{7}$ ，选

D.

(10) 设 $a > 1$ ，若对于任意的 $x \in [a, 2a]$ ，都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = 3$ ，这时 a 的取值集合为

(A) $\{a \mid 1 < a \leq 2\}$ (B) $\{a \mid a \geq 2\}$ (C) $\{a \mid 2 \leq a \leq 3\}$ (D) $\{2, 3\}$

解析：易得 $y = \frac{a^3}{x}$ ，在 $[a, 2a]$ 上单调递减，所以 $y \in [\frac{a^2}{2}, a^2]$ ，故 $\begin{cases} \frac{a^2}{2} \geq a \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a \geq 2$ ，选

B.

第II卷

注意事项：

1. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
2. 用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上
3. 本卷共12小题，共100分。

二、填空题（本大题共6个小题，每小题4分，共24分.把答案填在题中横线上.）

(11) 一个单位共有职工200人，其中不超过45岁的有120人，超过45岁的有80人. 为了调查职工的健康状况，用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为25的样本，应抽取超过45岁的职工_____人.

解析：依题意知抽取超过45岁的职工为 $\frac{25}{200} \times 80 = 10$.

(12) $(x + \frac{2}{x})^5$ 的二项展开式中, x^3 的系数是_____ (用数字作答) .

解析: $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot (\frac{2}{x})^r = 2^r C_5^r x^{5-2r}$, $r=1$, 所以系数为10.

(13) 若一个球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则它的表面积为_____ .

解析: 由 $\frac{4\pi}{3} R^3 = 4\sqrt{3}\pi$ 得 $R = \sqrt{3}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$.

(14) 已知平面向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$. 若 $\vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$, 则 $|\vec{c}| =$ _____ .

解析: 因为 $\vec{c} = (2, 4) - 6(-1, 2) = (8, -8)$, 所以 $|\vec{c}| = 8\sqrt{2}$.

(15) 已知圆C的圆心与点 $P(-2, 1)$ 关于直线 $y = x + 1$ 对称. 直线 $3x + 4y - 11 = 0$ 与圆C相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 6$, 则圆C的方程为_____ .

解析: 圆心的坐标为 $(0, -1)$, 所以 $r^2 = 3^2 + \frac{(-4-11)^2}{5^2} = 18$, 圆的方程为

$$x^2 + (y+1)^2 = 18.$$

(16) 有4张分别标有数字1, 2, 3, 4的红色卡片和4张分别标有数字1, 2, 3, 4的蓝色卡片, 从这8张卡片中取出4张卡片排成一行. 如果取出的4张卡片所标数字之和等于10, 则不同的排法共有_____种 (用数字作答) .

解析: 数字之和为10的情况有4, 4, 1, 1、 4, 3, 2, 1、 3, 3, 2, 2.

所以共有 $2A_4^4 + 2^4 A_4^4 = 18A_4^4 = 432$ 种不同排法.

三、解答题 (本题共6道大题, 满分76分)

(17) (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + 1$ ($x \in R, \omega > 0$) 的最小值正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(I) 求 ω 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的最大值, 并且求使 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

(17) 本小题主要考查特殊角三角函数值、两角和的正弦、二倍角的正弦与余弦、函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质等基础知识, 考查基本运算能力. 满分12分.

(I) 解:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \sin 2\omega x + 1 \\
 &= \sin 2\omega x + \cos 2\omega x + 2 \\
 &= \sqrt{2} \left(\sin 2\omega x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\omega x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 2 \\
 &= \sqrt{2} \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{4} \right) + 2
 \end{aligned}$$

由题设, 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$.

(II) 由 (I) 知, $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$.

当 $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$ 时, $\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right)$ 取得最大值 1, 所以函数

$f(x)$ 的最大值是 $2 + \sqrt{2}$, 此时 x 的集合为 $\left\{ x \mid x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\}$.

(18) (本小题满分 12 分)

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 p , 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\frac{1}{16}$.

(I) 求乙投球的命中率 p ;

(II) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;

(III) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.

(18) 本小题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率的基础知识, 考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

(I) 解法一: 设“甲投球一次命中”为事件 A, “乙投球一次命中”为事件 B.

由题意得 $(1 - P(B))^2 = (1 - p)^2 = \frac{1}{16}$

解得 $p = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{5}{4}$ (舍去), 所以乙投球的命中率为 $\frac{3}{4}$.

解法二: 设“甲投球一次命中”为事件 A, “乙投球一次命中”为事件 B.

由题意得 $P(\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{16}$, 于是 $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$ 或 $P(\bar{B}) = -\frac{1}{4}$ (舍去), 故 $p = 1 - P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$.

所以乙投球的命中率为 $\frac{3}{4}$.

(II) 解法一: 由题设和 (I) 知 $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$.

故甲投球2次至少命中1次的概率为 $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{A}) = \frac{3}{4}$

解法二:

由题设和 (I) 知 $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

故甲投球2次至少命中1次的概率为 $C_2^1 P(A)P(\bar{A}) + P(A)P(A) = \frac{3}{4}$

(III) 由题设和 (I) 知, $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$

甲、乙两人各投球2次, 共命中2次有三种情况: 甲、乙两人各中一次; 甲中两次, 乙两次均不中; 甲两次均不中, 乙中2次。概率分别为

$$C_2^1 P(A)P(\bar{A}) \cdot C_2^1 P(B)P(\bar{B}) = \frac{3}{16},$$

$$P(A \cdot A)P(\bar{B} \cdot \bar{B}) = \frac{1}{64},$$

$$P(\bar{A} \cdot \bar{A})P(B \cdot B) = \frac{9}{64}$$

所以甲、乙两人各投两次, 共命中2次的概率为 $\frac{3}{16} + \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{11}{32}$.

(19) (本小题满分12分)

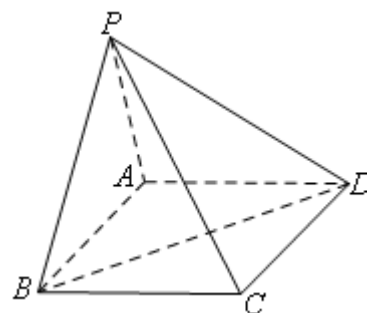
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知

$AB = 3, AD = 2, PA = 2, PD = 2\sqrt{2}, \angle PAB = 60^\circ$.

(I) 证明 $AD \perp$ 平面 PAB ;

(II) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;

(III) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



(19) 本小题主要考查直线和平面垂直, 异面直线所成的角、二面角等基础知识, 考查空间想象能力, 运算能力和推理论证能力. 满分12分.

(I) 证明: 在 $\triangle PAD$ 中, 由题设 $PA = 2, PD = 2\sqrt{2}$ 可得

$PA^2 + AD^2 = PD^2$ 于是 $AD \perp PA$. 在矩形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$. 又 $PA \cap AB = A$,

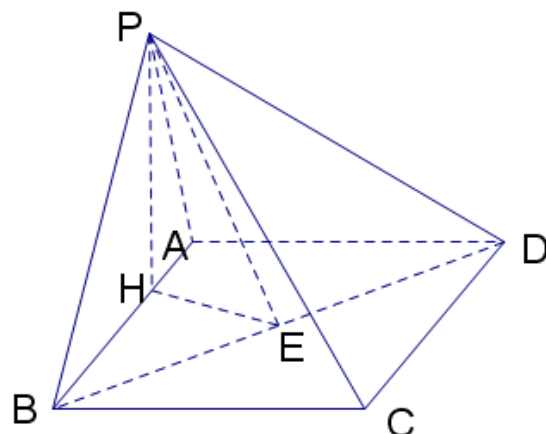
所以 $AD \perp$ 平面 PAB .

(II) 解: 由题设, $BC \parallel AD$, 所以 $\angle PCB$ (或其补角) 是异面直线 PC 与 AD 所成的角.

在 $\triangle PAB$ 中, 由余弦定理得

$$PB = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cdot \cos PAB} = \sqrt{7}$$

由 (I) 知 $AD \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp PB$, 因而 $BC \perp PB$, 于是 $\triangle PBC$ 是直角三



角形，故 $\tan PCB = \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(III) 解：过点 P 做 $PH \perp AB$ 于 H ，过点 H 做 $HE \perp BD$ 于 E ，连结 PE 因为 $AD \perp$ 平面 PAB ， $PH \subset$ 平面 PAB ，所以 $AD \perp PH$. 又 $AD \cap AB = A$ ，因而 $PH \perp$ 平面 $ABCD$ ，故 HE 为 PE 在平面 $ABCD$ 内的射影. 由三垂线定理可知， $BD \perp PE$ ，从而 $\angle PEH$ 是二面角 $P - BD - A$ 的平面角。

由题设可得，

$$\begin{aligned} PH &= PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}, AH = PA \cdot \cos 60^\circ = 1, \\ BH &= AB - AH = 2, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{13}, \\ HE &= \frac{AD}{BD} \cdot BH = \frac{4}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

于是再 $RT\Delta PHE$ 中， $\tan PEH = \frac{\sqrt{39}}{4}$

所以二面角 $P - BD - A$ 的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{39}}{4}$.

(20) (本小题满分12分)

在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$ ($n \geq 2, q \neq 0$) .

(I) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in N^*$)，证明 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(III) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项，求 q 的值，并证明：对任意的 $n \in N^*$ ， a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项。

(20) 本小题主要考查等差数列、等比数列的概念、等比数列的通项公式及前 n 项和公式，考查运算能力和推理论证能力及分类讨论的思想方法。满分12分。

(I) 证明：由题设 $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$ ($n \geq 2$)，得

$$a_{n+1} - a_n = q(a_n - a_{n-1}), \text{ 即 } b_n = qb_{n-1}, n \geq 2.$$

又 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ ， $q \neq 0$ ，所以 $\{b_n\}$ 是首项为1，公比为 q 的等比数列。

(II) 解法：由 (I)

$$a_2 - a_1 = 1,$$

$$a_3 - a_2 = q,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = q^2, \quad (n \geq 2).$$

将以上各式相加, 得 $a_n - a_1 = 1 + q + \dots + q^{n-2} \quad (n \geq 2)$.

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

上式对 $n = 1$ 显然成立.

(III) 解: 由 (II), 当 $q = 1$ 时, 显然 a_3 不是 a_6 与 a_9 的等差中项, 故 $q \neq 1$.

由 $a_3 - a_6 = a_9 - a_3$ 可得 $q^5 - q^2 = q^2 - q^8$, 由 $q \neq 0$ 得 $q^3 - 1 = 1 - q^6$, ①

整理得 $(q^3)^2 + q^3 - 2 = 0$, 解得 $q^3 = -2$ 或 $q^3 = 1$ (舍去). 于是 $q = -\sqrt[3]{2}$.

$$\text{另一方面, } a_n - a_{n+3} = \frac{q^{n+2} - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{q^{n-1}}{1 - q} (q^3 - 1),$$

$$a_{n+6} - a_n = \frac{q^{n+5} - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{q^{n-1}}{1 - q} (1 - q^6).$$

由①可得 $a_n - a_{n+3} = a_{n+6} - a_n, \quad n \in N^*$.

所以对任意的 $n \in N^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.

(21) (本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b \quad (x \in R)$, 其中 $a, b \in R$.

(I) 当 $a = -\frac{10}{3}$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处有极值, 求 a 的取值范围;

(III) 若对于任意的 $a \in [-2, 2]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

(21) 本小题主要考查利用导数研究函数的单调性、函数的最大值、解不等式等基础知识, 考查综合分析和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4x = x(4x^2 + 3ax + 4)$.

当 $a = -\frac{10}{3}$ 时, $f'(x) = x(4x^2 - 10x + 4) = 2x(2x - 1)(x - 2)$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(2, +\infty)$ 内是增函数, 在 $(-\infty, 0)$, $(\frac{1}{2}, 2)$ 内是减函数.

(II) 解: $f'(x) = x(4x^2 + 3ax + 4)$, 显然 $x = 0$ 不是方程 $4x^2 + 3ax + 4 = 0$ 的根.

为使 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处有极值, 必须 $4x^2 + 3ax + 4 \geq 0$ 成立, 即有 $\Delta = 9a^2 - 64 \leq 0$.

解些不等式, 得 $-\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$. 这时, $f(0) = b$ 是唯一极值.

因此满足条件的 a 的取值范围是 $[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}]$.

(III) 解: 由条件 $a \in [-2, 2]$, 可知 $\Delta = 9a^2 - 64 < 0$, 从而 $4x^2 + 3ax + 4 > 0$ 恒成立.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

因此函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 两者中的较大者.

为使对任意的 $a \in [-2, 2]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立, 当且仅当 $\begin{cases} f(1) \leq 1 \\ f(-1) \leq 1 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} b \leq -2 - a \\ b \leq -2 + a \end{cases}, \text{ 在 } a \in [-2, 2] \text{ 上恒成立.}$$

所以 $b \leq -4$, 因此满足条件的 b 的取值范围是 $(-\infty, -4]$.

(22) (本小题满分14分)

已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x - 2y = 0$.

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 若以 $k(k \neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N , 且线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.

(22) 本小题主要考查双曲线的标准方程和几何性质、直线方程、两条直线垂直、线段的

定比分点等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理运算能力。满分14分。

(I) 解：设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)。由题设得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}, \text{所以双曲线方程为} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

(II) 解：设直线 ① l 的方程为 $y = kx + m$ ($k \neq 0$)。点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 的

坐标满足方程组 ②
$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

将①式代入②式，得 $\frac{x^2}{4} - \frac{(kx+m)^2}{5} = 1$ ，整理得 $(5-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 20 = 0$ 。

此方程有两个一等实根，于是 $5-4k^2 \neq 0$ ，且 $\Delta = (-8km)^2 + 4(5-4k^2)(4m^2+20) > 0$ 。

整理得 $m^2 + 5 - 4k^2 > 0$ 。 ③

由根与系数的关系可知线段 MN 的中点坐标 (x_0, y_0) 满足

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4km}{5-4k^2}, \quad y_0 = kx_0 + m = \frac{5m}{5-4k^2}.$$

从而线段 MN 的垂直平分线方程为 $y - \frac{5m}{5-4k^2} = -\frac{1}{k}(x - \frac{4km}{5-4k^2})$ 。

此直线与 x 轴， y 轴的交点坐标分别为 $(\frac{9km}{5-4k^2}, 0)$, $(0, \frac{9m}{5-4k^2})$ 。由题设可得

$$\frac{1}{2} \left| \frac{9km}{5-4k^2} \right| \cdot \left| \frac{9m}{5-4k^2} \right| = \frac{81}{2}. \text{整理得} m^2 = \frac{(5-4k^2)^2}{|k|}, \quad k \neq 0.$$

将上式代入③式得 $\frac{(5-4k^2)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$ ，整理得 $(4k^2 - 5)(4k^2 - |k| - 5) > 0$, $k \neq 0$ 。

解得 $0 < |k| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $|k| > \frac{5}{4}$ 。

所以 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{5}{4}) \cup (-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$ 。