

1996 年湖北高考文科数学真题及答案

第 I 卷（选择题共 65 分）

注意事项：

1. 答案 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

一. 选择题：本大题共 15 小题；第 1—10 题每小题 4 分，第 11—15 题每小题 5 分，共 65 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

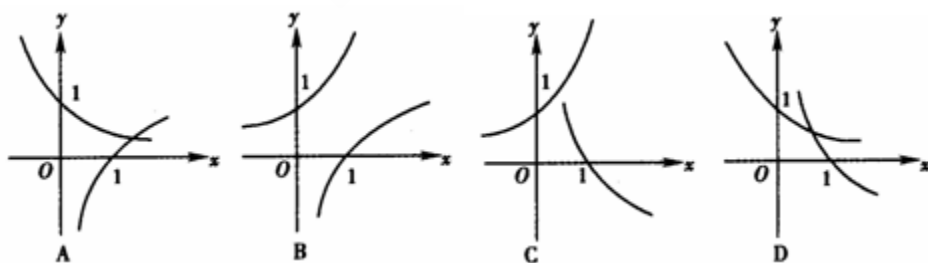
1. 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{3, 5\}$ 。则

- A. $I = A \cup B$ B. $I = \overline{A} \cup B$ C. $I = A \cup \overline{B}$ D. $I = \overline{A} \cup \overline{B}$

【答案】C

【解析】显然 C 正确。

2. 当 $a > 1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图像



【答案】A

【解析】当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^{-x}$ 是减函数，且过点 $(0, 1)$ ；而函数 $y = \log_a x$ 为增函数，且过点 $(1, 0)$ 。

3. 若 $\sin^2 x > \cos^2 x$ ，则 x 的取值范围是

A. $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{3}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{5}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x \mid k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \mid k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

【答案】D

【解析】 $\sin^2 x > \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ ，即 $(2k-1)\pi + \frac{\pi}{4} < x < (2k-1)\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ ，所以 x 的取值范围是 $\left\{x \mid k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 。

4. 复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 等于

A. $1 + \sqrt{3}i$

B. $-1 + \sqrt{3}i$

C. $1 - \sqrt{3}i$

D. $-1 - \sqrt{3}i$

【答案】B

【解析】 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} = \frac{2^4(1+i)^4}{2^5(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5} = \frac{(2i)^2}{2(-\omega)^5} = -1 + \sqrt{3}i$ 。

5. 6名同学排成一排，其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有

A. 720种

B. 360种

C. 240种

D. 120种

【答案】C

【解析】将甲、乙两人捆绑在一起，不同的排法有 $A_5^5 A_2^2 = 240$ 。

6. 已知 α 是第三象限角且 $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$ ，则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】由已知得 $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ ，所以 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

$$= \frac{1 - (-\frac{7}{25})}{-\frac{24}{25}} = -\frac{4}{3}.$$

7. 如果直线 l, m 与平面 α, β, γ 满足: $l = \beta \cap \gamma, l // \alpha, m \subset \alpha$ 和 $m \perp \gamma$, 那么必有

- A. $\alpha \perp \gamma$ 且 $l \perp m$ B. $\alpha \perp \gamma$ 且 $m // \beta$ C. $m // \beta$ 且 $l \perp m$ D. $\alpha // \beta$ 且 $\alpha \perp \gamma$

【答案】A

【解析】略.

8. 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的

- A. 最大值是 1, 最小值是 -1 B. 最大值是 1, 最小值是 $-\frac{1}{2}$
 C. 最大值是 2, 最小值是 -2 D. 最大值是 2, 最小值是 -1

【答案】D

【解析】因为 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$, 由已知 $-\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$. 故当 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 有最大值是 2; 当 $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 有最小值是 -1.

9. 中心在原点, 准线方程为 $x = \pm 4$, 离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆方程是

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】A

【解析】由题设可得 $\frac{a^2}{c} = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，解得 $a = 2, c = 1$ ，所以椭圆方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

10. 圆锥母线长为1，侧面展开图圆心角为 240° ，该圆锥的体积是

A. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{81}$ B. $\frac{8\pi}{81}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$ D. $\frac{10\pi}{81}$

【答案】C

【解析】设圆锥底面半径为 r ，则 $\frac{2\pi r}{1} = \frac{240^\circ}{360^\circ} \times 2\pi$ ，得 $r = \frac{2}{3}$ ，则圆锥高为

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

圆锥的体积是 $\frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$ 。

11. 椭圆 $25x^2 - 150x + 9y^2 + 18y + 9 = 0$ 的两个焦点坐标是

A. $(-3, 5), (-3, -3)$ B. $(3, 3), (3, -5)$
 C. $(1, 1), (-7, 1)$ D. $(7, -1), (-1, -1)$

【答案】B

【解析】椭圆的标准方程为 $\frac{(y+1)^2}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{3^2} = 1$ ，而 $\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ 的焦点为 $(0, \pm 4)$ ，所以

$\frac{(y+1)^2}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{3^2} = 1$ 的焦点坐标是 $(3, 3), (3, -5)$ 。

12. 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使得 $BD = a$ ，则三棱锥 $D-ABC$ 的

体积为

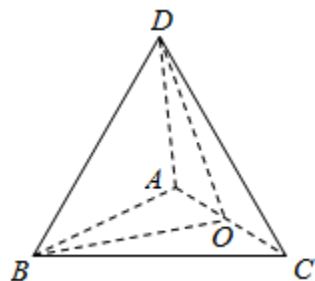
- A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【答案】D

【解析】取 AC 的中点 O ，连接 BO, DO ，如图所示.

$\triangle ABC, \triangle ADC$ 均为等腰直角三角形， $BO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ，

$\therefore \angle BOD = \frac{\pi}{2}$ ，则 $DO \perp$ 面 ABC ， DO 就是三棱锥 $D-ABC$



的高，所以 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$.

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为

- A. 130 B. 170 C. 210 D. 260

【答案】C

【解析】由已知得 $S_m = 30, S_{2m} = 100$ ，则 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列，所以

$$S_{3m} = 3(S_{2m} - S_m) = 210.$$

14. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < a < b)$ 的半焦距为 c ，直线 l 过 $(a, 0), (0, b)$ 两点. 已知原点

到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，则双曲线的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】直线 l 的方程为 $bx + ay - ab = 0$ ，原点到直线 l 的距离为 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，则

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{3}{16} c^2, \text{ 即 } \frac{a^2 (c^2 - a^2)^2}{c^2} = \frac{3}{16} c^2, \text{ 解得 } e = 2 \text{ 或 } e = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } 0 < a < b, \text{ 所以}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > \sqrt{2}, \text{ 所以 } e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 不合题意.}$$

15. $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则

$f(7.5)$ 等于

- A. 0.5 B. -0.5 C. 1.5 D. -1.5

【答案】B

【解析】 $f(7.5) = f(5.5+2) = -f(5.5) = -[-f(3.5)] = f(3.5) = -f(1.5) = -[-f(-0.5)] = -f(0.5) = -0.5.$

第 II 卷 (非选择题共 85 分)

注意事项:

1. 第 II 卷共 6 页, 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

二. 填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

16. 已知点 $(-2, 3)$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离是 5, 则 $p =$ _____.

【答案】4

【解析】由已知得 $\sqrt{\left(\frac{p}{2} + 2\right)^2 + 3^2} = 5$, 解得 $p = 4$.

17. 正六边形的中心和顶点共 7 个点, 以其中 3 个点为顶点的三角形共有 _____ 个. (用数字作答)

【答案】32

【解析】从 7 个点中取 3 个点有 C_7^3 种取法, 3 个点共线的有 3 种, 三角形共有 $C_7^3 - 3 = 32$ 个.

18. $\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3}\text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because \text{tg}(20^\circ + 40^\circ) = \frac{\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ}{1 - \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ} = \sqrt{3}$, $\therefore \text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ = \sqrt{3}(1 - \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ)$,

$$\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3}\text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ = \sqrt{3}.$$

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角, 则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$



【解析】 由于 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle CBF$ 即为异面直线 AD 与

BF 所成角, 设正方形边长为 a , 在 $\triangle CBF$ 中, $BF = \sqrt{2}a, BC = a, FC = \sqrt{FD^2 + CD^2} = \sqrt{AD^2 + FA^2 - 2AD \cdot FA \cos 60^\circ + CD^2} = \sqrt{2}a$, $\cos \angle CBF = \frac{BF^2 + BC^2 - FC^2}{2BF \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

三. 解答题: 本大题共 6 小题; 共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20. (本小题满分 11 分)

解不等式 $\log_a(x+1-a) > 1$.

【解】 本小题考查对数函数性质, 对数不等式的解法, 分类讨论的方法和运算能力, 满分 11 分.

(I) $a > 1$ 时, 原不等式等价于不等式组: $\begin{cases} x+1-a > 0, \\ x+1-a > a. \end{cases}$ ——2 分

解得 $x > 2a-1$. ——5 分

(II) 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式等价于不等式组: $\begin{cases} x+1-a > 0, \\ x+1-a < a. \end{cases}$ ——7 分

解得 $a-1 < x < 2a-1$. 10 分

综上, 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x > 2a - 1\}$;

当 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | a - 1 < x < 2a - 1\}$. ———11 分

21. (本小题满分 12 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_3 + S_6 = 2S_9$, 求数列的公比 q .

【解】 本小题主要考查等比数列的基础知识, 逻辑推理能力和运算能力. 满分 12 分.

若 $q = 1$, 则有 $S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1, S_9 = 9a_1$. 但 $a_1 \neq 0$,

即得 $S_3 + S_6 \neq 2S_9$, 与题设矛盾, 故 $q \neq 1$. ———2 分

又依题意 $S_3 + S_6 = 2S_9$ 可得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$.

整理得 $q^3(2q^6 - q^3 - 1) = 0$.

由 $q \neq 0$ 得方程 $2q^6 - q^3 - 1 = 0$. $(2q^3 + 1)(q^3 - 1) = 0$, ———9 分

$\because q \neq 1, q^3 \neq 1, \therefore 2q^3 + 1 = 0, \therefore q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. ———12 分

22. (本小题满分 11 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足: $A + C = 2B, \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$, 求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值.

解法一: 由题设条件知 $B = 60^\circ, A + C = 120^\circ$. ———2 分

$\because \frac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = -2\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -2\sqrt{2}$.

将上式化为 $\cos A + \cos C = -2\sqrt{2} \cos A \cos C$.

利用和差化积及积化和差公式, 上式可化为

$2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = -\sqrt{2} [\cos(A+C) + \cos(A-C)]$. ———6 分

将 $\cos \frac{A+C}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos(A+C) = -\frac{1}{2}$ 代入上式得

$$\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cos(A-C).$$

将 $\cos(A-C) = 2 \cos^2(\frac{A-C}{2}) - 1$ 代入上式并整理得

$$4\sqrt{2} \cos^2(\frac{A-C}{2}) + 2 \cos(\frac{A-C}{2}) - 3\sqrt{2} = 0 \quad \text{---9分}$$

$$(2 \cos \frac{A-C}{2} - \sqrt{2})(2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3) = 0,$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3 \neq 0, \therefore 2 \cos \frac{A-C}{2} - \sqrt{2} = 0.$$

从而得 $\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ---12分

解法二：由题设条件知 $B = 60^\circ$, $A + C = 120^\circ$.

设 $\alpha = \frac{A-C}{2}$, 则 $A-C = 2\alpha$, 可得 $A = 60^\circ + \alpha$, $C = 60^\circ - \alpha$, ---3分

$$\text{所以 } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\cos(60^\circ + \alpha)} + \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}}. \quad \text{---7分}$$

$$\text{依题设条件有 } \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{\cos B},$$

$$\because \cos B = \frac{1}{2}, \therefore \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{整理得 } 4\sqrt{2} \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 3\sqrt{2} = 0, \quad \text{---9分}$$

$$(2 \cos \alpha - \sqrt{2})(2\sqrt{2} \cos \alpha + 3) = 0,$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \alpha + 3 \neq 0, \therefore 2 \cos \alpha - \sqrt{2} = 0.$$

从而得 $\cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

——11分

23. (本小题满分12分)

【注意：本题的要求是，参照标号①的写法，在标号②、③、④、⑤的横线上填写适当步骤，完成（I）证明的全过程；并解答（II），如图2.】

如图1，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = \frac{AA_1}{3} = a$ ， E, F 分别是 BB_1, CC_1 上的点，

且 $BE = a, CF = 2a$.

(I) 求证：面 $AEF \perp$ 面 ACF ；

(II) 求三棱锥 A_1-AEF 的体积.

(I) 证明：① $\because BE = a, CF = 2a, BE \parallel CF$ ，延长 FE 与 CB 延

长线交于 D ，连结 AD .

$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DCF$,

$\therefore \frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF}$.

② _____.

$\therefore DB = AB$.

③ _____.

$\therefore DA \perp AC$.

④ _____.

$\therefore FA \perp AD$.

⑤ _____.

$\therefore AEF \perp$ 面 ACF .

(II) 解：

【解】本小题考查空间线面关系，正三棱柱的性质，逻辑思维能力，空间想象能力及运算能力. 满分12分.

(I) ② $\because BE : CF = 1 : 2, \therefore DC = 2DB, \therefore DB = BC$,

——1分

③ $\because \triangle ABD$ 是等腰三角形，且 $\angle ABD = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 30^\circ, \therefore \angle CAD = 90^\circ$,

——3分

④ $\because FC \perp$ 面 $ACD, \therefore CA$ 是 FA 在面 ACD 上的射影，且 $CA \perp AD$,

——5分

⑤ $\because FA \cap AC = A, DA \perp$ 面 $ACF, DA \subset$ 面 ADF ,

\therefore 面 $ADF \perp$ 面 ACF . 7分

(II) $\because V_{A_1-AEF} = V_{E-AA_1F}$,

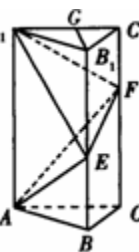


图1

图2

在面 $A_1B_1C_1$ 内作 $B_1G \perp A_1C_1$ ，垂足为 G ． $B_1G = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ．

面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 A_1C ， $\therefore B_1G \perp$ 面 A_1C ，

$\therefore E \in BB_1$ ，而 $BB_1 \parallel$ 面 A_1C ， \therefore 三棱柱 $E-AA_1F$ 的高为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ ． ——9 分

$$S_{\Delta A_1FA} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot AC = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}． \quad \text{——10 分}$$

$$\therefore V_{A_1-AEF} = V_{E-AA_1F} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}． \quad \text{——12 分}$$

24. (本小题满分 10 分)

某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？（粮食单产 = $\frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$ ，人均粮食占有量 = $\frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$ ）

【解】 本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力，指数函数和二项式定理的应用，近似计算的方法和能力．满分 10 分．

设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷，又设该地区现有人口为 P 人，粮食单产为 M 吨/公顷．

$$\text{依题意得不等式 } \frac{M \times (1 + 22\%) \times (10^4 - 10x)}{P \times (1 + 1\%)^{10}} \geq \frac{M \times 10^4}{P} \times (1 + 10\%)． \quad \text{——5 分}$$

$$\text{化简得 } x \leq 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right]． \quad \text{——7 分}$$

$$\therefore 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right] = 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1}{1.22} \times (1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + \dots) \right]$$

$$\approx 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1}{1.22} \times 1.1045 \right] \approx 4.1． \quad \text{—— 9 分}$$

$\therefore x \leq 4$ （公顷）．

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷． ——10 分

25. (本小题满分 12 分)

已知 l_1, l_2 是过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 的两条互相垂直的直线, 且 l_1, l_2 与双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 各有两个交点, 分别为 A_1, B_1 和 A_2, B_2 .

(I) 求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围;

(II) 若 A_1 恰是双曲线的一个顶点, 求 $|A_2B_2|$ 的值.

【解】 本小题主要考查直线与双曲线的性质, 解析几何的基本思想, 以及综合运用知识的能力. 满分 12 分.

(I) 依题设, l_1, l_2 的斜率都存在, 因为 l_1 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点, 故方程

$$\text{组} \begin{cases} y = k_1(x + \sqrt{2}) (k_1 \neq 0), \\ y^2 - x^2 = 1. \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{---1 分}$$

有两个不同的解.

$$\text{在方程组①中消去 } y, \text{ 整理得 } (k_1^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_1^2x + 2k_1^2 - 1 = 0. \quad \text{②}$$

若 $k_1^2 - 1 = 0$, 则方程组①只有一个解, 即 l_1 与双曲线只有一个交点, 与题设矛盾, 故

$k_1^2 - 1 \neq 0$, 即 $|k_1| \neq 1$, 方程②的判别式为

$$\Delta_1 = (2\sqrt{2}k_1^2)^2 - 4(k_1^2 - 1)(2k_1^2 - 1) = 4(3k_1^2 - 1).$$

设 l_2 的斜率为 k_2 , 因为 l_2 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y = k_2(x + \sqrt{2}) (k_2 \neq 0), \\ y^2 - x^2 = 1. \end{cases} \quad \text{③}$$

有两个不同的解. 在方程组③中消去 y , 整理得

$$(k_2^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_2^2x + 2k_2^2 - 1 = 0. \quad \text{④}$$

同理有 $k_2^2 - 1 \neq 0, \Delta_2 = 4(3k_2^2 - 1)$.

又因为 $l_1 \perp l_2$, 所以有 $l_1 \cdot l_2 = -1$. ---4 分

于是, l_1, l_2 与双曲线各有两个交点, 等价于
$$\begin{cases} 3k_1^2 - 1 > 0, \\ 3k_2^2 - 1 > 0, \\ k_1 \cdot k_2 = -1, \\ |k_1| \neq 1. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} < |k_1| < \sqrt{3}, \\ |k_1| \neq 1. \end{cases} \quad \text{---6分}$$

$$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3}). \quad \text{---7分}$$

(II) 双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 的顶点为 $(0, 1), (0, -1)$.

取 $A_1(0, 1)$ 时, 有 $k_1(0 + \sqrt{2}) = 1$,

解得 $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 从而 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\sqrt{2}$. ---8分

将 $k_2 = -\sqrt{2}$ 代入方程④得 $x^2 + 4\sqrt{2}x + 3 = 0$. ⑤

记 l_2 与双曲线的两交点为 $A_2(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2)$, 则

$$|A_2B_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 3(x_1 - x_2)^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2].$$

由⑤知 $x_1 + x_2 = -4\sqrt{2}, x_1x_2 = 3$.

$$\therefore |A_2B_2|^2 = 60, |A_2B_2| = 2\sqrt{15}. \quad \text{---11分}$$

当取 $A_1(0, -1)$ 时, 由双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 关于 x 轴的对称性, 知 $|A_2B_2| = 2\sqrt{15}$.

所以 l_1 过双曲线的一个顶点时, $|A_2B_2| = 2\sqrt{15}$. ---12分