2014年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷文科）

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,(x+1)(x-2)\le 0\}$，集合 B 为整数集，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-2,-1,0,1\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

【答案】D

【解析】

试题分析：$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$\therefore A\cap B=\{-1,0,1,2\}$，选D.

【考点定位】集合的基本运算.

2．在“世界读书日”前夕，为了了解某地5000名居民某天的阅读时间，从中抽取了200名居民的阅读时间进行统计分析。在这个问题中，5000名居民的阅读时间的全体是（　　）

A.总体　　B.个体

C.样本的容量　　D.从总体中抽取的一个样本

【答案】A

【解析】

试题分析：从5000份中抽取200份，样本的容量是200，抽取的200份是一个样本，每个居民学科网的阅读时间就是一个个体，5000名居民的阅读时间的全体是总体.所以选A.

【考点定位】统计基本概念.

3．为了得到函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点（　　）

A．向左平行移动 1 个单位长度　　B．向右平行移动 1 个单位长度

C．向左平行移动 π 个单位长度　　D．向右平行移动 π 个单位长度

【答案】A

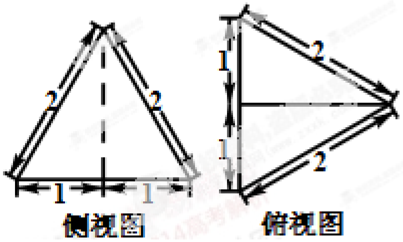
【解析】

试题分析：只需把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平移1个单位，便得函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象.选A.

【考点定位】三角函数图象的变换.

4.某三棱锥的侧视图、俯视图如图所示，则该三棱锥的体积是（　　）（锥体体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高）学科网

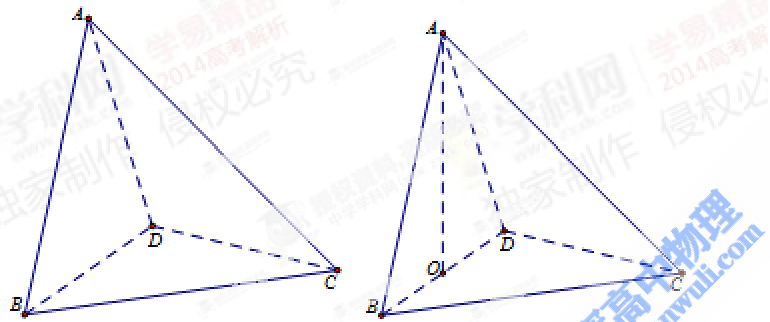
A、3　　B、2　　C、$\sqrt{3}$　　D、1



【答案】D

【解析】

试题分析：根据所给侧视图和俯视图，该三棱锥的直观图如下图所示.从俯视图可知，三棱锥的顶点 A 在底面内的投影 O 为边 BD 的中点，所以 AO 即为三棱锥的高，学科网其体积为$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times\sqrt{3}=1$.选 D.



【考点定位】三角函数图象的变换.

5．若$a>b>0$，$c<d<0$，则一定有（　　）

A．$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　B．$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$　　C．$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D．$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

【答案】B

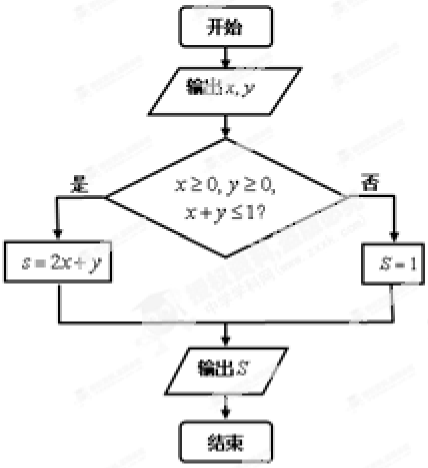
【解析】

试题分析：$\because c<d<0,\therefore -c>-d>0,-\frac{1}{d}>-\frac{1}{c}>0$，又$a>b>0,\therefore -\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}>0,\therefore \frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.选B

【考点定位】不等式的基本性质.

6．执行如图 1 所示的程序框图，如果输入的$x,y\in R$，则输出的S的最大值为（　　）

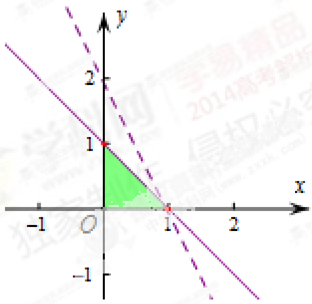
A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3



【答案】C

【解析】

试题分析：该程序执行以下运算：已知$\begin{cases}x\ge0\\y\ge0\\x+y\le1\end{cases}$，求$S=2x+y$的最大值.作出$\begin{cases}x\ge0\\y\ge0\\x+y\le1\end{cases}$表示的区域如图所示，由图可知，当$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$时，$S=2x+y$最大，最大值为$S=2+0=2$.选C.



【考点定位】程序框图与线性规划.

7.已知$b>0$，$\log_5 b=a$，$\lg b=c$，$5^d=10$，则下列等式一定成立的是（　　）

A、$d=ac$　　B、$a=cd$　　C、$c=ad$　　D、$d=a+c$

【答案】B

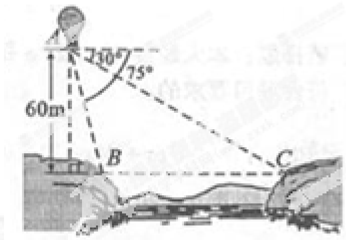
【解析】

试题分析：$\log_5 b=a,\lg b=c$ 相除得 $\dfrac{\log_5 b}{\lg b}=\dfrac{a}{c},\log_5 10=\dfrac{a}{c}$，又 $5^d=10,\therefore\log_5 10=d$，所以 $d=\dfrac{a}{c}\Rightarrow cd=a$.选B.

【考点定位】指数运算与对数运算.

8．如图，从气球A上测得正前方的河流的两岸B，C的俯角分别为75°，30°，此时气球的高是$60m$，则河流的宽度BC等于（　　）

A．$240(\sqrt{3}-1)m$　　B．$180(\sqrt{2}-1)m$　　C．$120(\sqrt{3}-1)m$　　D．$30(\sqrt{3}+1)m$



【答案】C.

【解析】

试题分析：$AC=120$，$AB=\dfrac{60}{\sin 75^\circ}$，$\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 45^\circ}$，

所以 $BC=\dfrac{AB\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{60\times\sqrt{2}}{\sin(30^\circ+45^\circ)}=120(\sqrt{3}-1)$.选 C

【考点定位】解三角形.

9.设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是（　　）学科网

A、$[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　B、$[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$　　C、$[\sqrt{10},4\sqrt{5}]$　　D、$[2\sqrt{5},4\sqrt{5}]$

【答案】B

【解析】

试题分析：易得 $A(0,0),B(1,3)$.设 $P(x,y)$，则消去 m 得：$x^2+y^2-x-3y=0$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，$PA\perp PB$，所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$，令 $|PA|=\sqrt{10}\sin\theta,|PB|=\sqrt{10}\cos\theta$，则

$|PA|+|PB|=\sqrt{10}\sin\theta+\sqrt{10}\cos\theta=2\sqrt{5}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$.因为 $|PA|\ge 0,|PB|\ge 0$，所以 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.所以

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$，$\sqrt{10}\le|PA|+|PB|\le 2\sqrt{5}$.选 B.

法二、因为两直线的斜率互为负倒数，所以 $PA\perp PB$，点 P 的轨迹是学科网以 AB 为直径的圆以下同法一.

【考点定位】1、直线与圆；2、三角代换.

10．已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A，B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$（其中 O 为坐标原点），则 ΔABO 与 ΔAFO 面积之和的最小值是（　　）

A．2　　B．3　　C．$\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　　D．$\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

试题分析：据题意得 $F(\frac{1}{4},0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1=y_1^2,x_2=y_2^2$，$y_1^2y_2^2+y_1y_2=2,y_1y_2=-2$ 或

$y_1y_2=1$，因为 A,B 位于 x 轴两侧所以．所以 $y_1y_2=-2$ 两面积之和为

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=\frac{1}{2}|y_1^2y_2-y_2^2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=|y_2-y_1|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+y_1\right|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+\frac{9}{8}y_1\right|$$

$$=\left|\frac{2}{y_1}\right|+\left|\frac{9}{8}y_1\right|\geq 3.$$

【考点定位】1、抛物线；2、三角形的面积；3、重要不等式.

第Ⅱ卷　（非选择题 共 100 分）

注意事项：

必须使用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷、草稿纸上无效。

第Ⅱ卷共 11 小题。

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率等于____________.

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

试题分析：$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4+1}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【考点定位】双曲线及其离心率.

12．复数 $\frac{2-2i}{1+i}=$______.

【答案】$-2i$.

【解析】

试题分析：$\frac{2-2i}{1+i}=\frac{2(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-2i$.

【考点定位】复数的基本运算.

13．设 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的函数，当 $x\in[-1,1)$ 时，$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leq x<0,\\ x, & 0\leq x<1,\end{cases}$，则 $f(\frac{3}{2})=$______.

【答案】1

【解析】

试题分析：$f(\frac{3}{2})=f(-\frac{1}{2})=-4\times\frac{1}{4}+2=1$.

【考点定位】周期函数及分段函数.

14．平面向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,2)$，$\vec{c}=m\vec{a}+\vec{b}$（$m\in R$），且$\vec{c}$与$\vec{a}$的夹角等于$\vec{c}$与$\vec{b}$的夹角，则$m=$___.

【答案】2.

【解析】

试题分析：由题意得：$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{5m+8}{\sqrt{5}}=\frac{8m+20}{2\sqrt{5}}\Rightarrow m=2$.

法二、设起点在原点时，向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的终点分别对应点 A、B、C，显然 OA，OB关于直线$y=x$对称，又因为$\vec{c}$与$\vec{a}$的夹角等于$\vec{c}$与$\vec{b}$的夹角，故点C必在直线$y=x$上，由此可得$m=2$.

【考点定位】向量的夹角及向量的坐标运算.

15．以A表示值域为R的函数组成的集合，B表示具有如下性质的函数$\varphi(x)$组成的集合：对于函数$\varphi(x)$，存在一个正数M，使得函数$\varphi(x)$的值域包含于区间$[-M,M]$。例如，当$\varphi_1(x)=x^3$，$\varphi_2(x)=\sin x$时，$\varphi_1(x)\in A$，$\varphi_2(x)\in B$.现有如下命题：

①设函数$f(x)$的定义域为D，则“$f(x)\in A$”的充要条件是“$\forall b\in R$，$\exists a\in D$，$f(a)=b$”；

②若学科网函数$f(x)\in B$，则$f(x)$有最大值和最小值；

③若函数$f(x)$，$g(x)$的定义域相同，且$f(x)\in A$，$g(x)\in B$，则$f(x)+g(x)\notin B$；

④若函数$f(x)=a\ln(x+2)+\frac{x}{x^2+1}$（$x>-2$，$a\in R$）有最大值，则$f(x)\in B$.

其中的真命题有______.（写出所有真命题的序号）

【答案】①③④

【解析】

试题分析：对①，若对任意的$b\in R$，都$\exists a\in D$，使得$f(a)=b$，则$f(x)$的值域必为R；反之，$f(x)$的值域为R，则对任意的$b\in R$，都$\exists a\in D$，使得$f(a)=b$.故正确.

对②，比如函数$f(x)=x(-1<x<1)$属于B，但是它既无最大学科网值也无最小值.故错误.

对③，因为$f(x)\in(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$有界，故$f(x)+g(x)\in(-\infty,+\infty)$，所以$f(x)+g(x)\notin B$.故正确.

对④，$-\frac{1}{2}\le\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$.当$a>0$或$a<0$时$a\ln x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$均无最大值.所以若$f(x)$有最大值，则$a=0$，此时$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，$f(x)\in B$.故正确.

【考点定位】1、新定义；2、函数的定义域值域.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 12 分）一个盒子里装有三张卡片，分别标记有数字1，2，3，这三张卡片除标记的数字

外完全相同。随机有放回地抽取3次，每次抽取1张，将抽取的卡片上的数字依次记为a，b，c.

（Ⅰ）求“抽取的卡片上的数字满足$a+b=c$”的概率；

（Ⅱ）求“抽取的卡片上的数字a，b，c不完全相同”的概率.

【答案】（1）$\frac{1}{9}$；（2）$\frac{8}{9}$.

【解析】

试题分析：共有 9 张卡片，有放回地取 3 次，则每次都有 9 种选择，将所有可能结果一一列举出来，共有 27 种不同的结果.(1) 满足$a+b=c$的结果包括$(1,1,2),(1,2,3),(2,1,3),$，共 3 种，故所求概率为$\frac{1}{9}$；（2）根据正难则反的原则，我们可以先考虑其对立事件，即a,b,c完全相同的结果，它包括$(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)$，共 3 种，故所求概率为$1-\frac{3}{27}=\frac{8}{9}$.

试题解析：（1）由题意得，(a,b,c)的所有可能为：

$(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3)$，

$(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3)$，

$(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)$，共 27 种.

设“抽取的卡片上的数字满足$a+b=c$”为事件 A，则事件 A 包括$(1,1,2),(1,2,3),(2,1,3),$，共 3 种，

所以$P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

因此“抽取的卡片学科网上的数字满足$a+b=c$”的概率为$\frac{1}{9}$ $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\sqrt{3}=1$.

（2）设“抽取的卡片上的数字a,b,c不完全相同”为事件 B，

则事件$\overline{B}$包括$(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)$，共 3 种，

所以$P(B)=1-\frac{3}{27}=\frac{8}{9}$.

因此“抽取的卡片上的数字a,b,c不完全相同”的概率为$\frac{8}{9}$.

【考点定位】古典概型及随机事件的概率.

17．（本小题满分12分）已知函数$f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$.

（1）求$f(x)$的单调递增区间；

（2）若α是第二象限角，$f(\frac{\alpha}{3})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$，求$\cos\alpha-\sin\alpha$的值.

【答案】（1） $-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi \le x \le \frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi(k\in Z)$；（2） $-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

试题分析：(1)将 $3x+\frac{\pi}{4}$ 看作一个整体，根据正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间便可得 $f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$ 的单调递增区间.(2)将 $\frac{\alpha}{3}$ 代入 $f(\frac{\alpha}{3})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$ 得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$.求三角函数值时，首先考虑统一角，故利用和角公式和倍角公式化为单角 α 的三角函数得：$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$.注意这里不能将 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 约了.接下来分 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 和 $\sin\alpha+\cos\alpha\ne 0$ 两种情况求值.

试题解析：（1） $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 3x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi(k\in Z)$；

（2）由题设得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$，

即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$，.

若 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}$，

若 $\sin\alpha+\cos\alpha\ne 0$，则 $1=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2\Rightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

综上得，$\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值为 $-\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

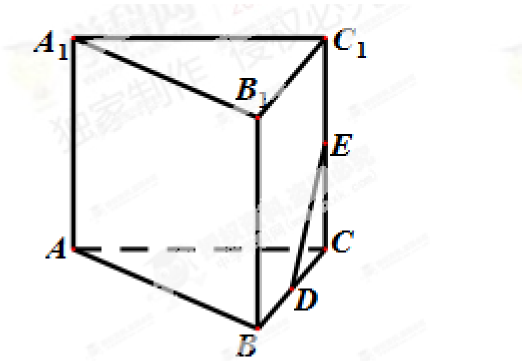
【考点定位】三角函数的性质、三角恒等变换及三角函数的求值.

18.（本小题满分 12 分）

在如图所示的多面体中，四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都为矩形。

（Ⅰ）若 $AC\perp BC$，证明：直线 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1；

（Ⅱ）设 D，E 分别是线段 BC，CC_1 的中点，在线段 AB 上是否存在一点 M，使直线 $DE//$ 平面 A_1MC？请证明你的结论。

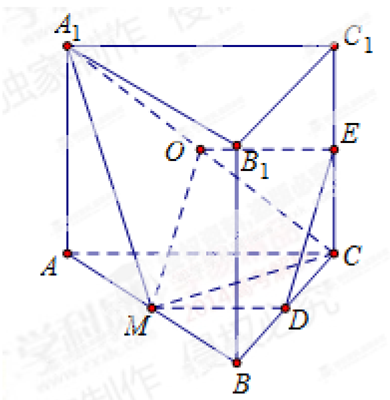


【答案】（1）证明详见解析；（2）存在，M 为线段 AB 的中点时，直线 DE // 平面 A_1MC .

【解析】

试题分析：（1）证直线垂直平面，就是证直线垂直平面内的两条相交直线.已经有 $AC \perp BC$ 了，那么再在平面内找一条直线与BC垂直．据题意易得，$AA_1 \perp$平面 ABC，所以 $AA_1 \perp BC$.由此得 $BC \perp$平面 ACC_1A_1 .

（2）首先连结 A_1C，取 A_1C 的中点 O．考虑到 D，E 分别是线段 BC，CC_1 的中点，故在线段 AB 上取中点 M，易得 DE // MO .从而得直线 DE // 平面 A_1MC .



试题解析：（Ⅰ）因为四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都是矩形，

所以 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AC$.

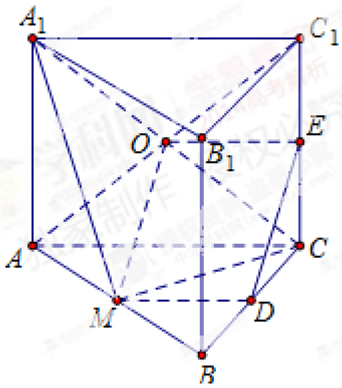
因为 AB，AC 为平面 ABC 内的两条相交直线，

所以 $AA_1 \perp$平面 ABC.

因为直线 $BC \subset$平面 ABC 内，所以 $AA_1 \perp BC$.

又由已知，$AC \perp BC, AA_1, AC$ 为平面 ACC_1A_1 内的两条相交直线，

所以，$BC \perp$平面 ACC_1A_1 .



（2）取线段 AB 的中点 M，连接 A_1M, MC, A_1C, AC_1，设 O 为 A_1C, AC_1 的交点.

由已知，O 为 AC_1 的中点.

连接 MD，OE，则 MD，OE 分别为 $\Delta ABC, \Delta ACC_1$ 的中位线.

所以，$MD \underset{=}{//} \frac{1}{2}AC, OE \underset{=}{//} \frac{1}{2}AC, \therefore MD \underset{=}{//} OE$，

连接 OM，从而四边形 MDEO 为平行四边形，则 $DE // MO$.

因为直线 $DE \not\subset$ 平面 A_1MC，$MO \subset$ 平面 A_1MC，

所以直线 $DE //$ 平面 A_1MC.

即线段 AB 上存在一点 M（线段 AB 的中点），使得直线 $DE //$ 平面 A_1MC.

【考点定位】空间直线与平面的位置关系.

19．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x) = 2^x$ 的图象上（$n \in N^*$）.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）若 $a_1 = 1$，学科网函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2 - \frac{1}{\ln 2}$，求数列 $\{a_n b_n^2\}$ 的前 n 项和 S_n.

【答案】（1）详见解析；（2）$T_n=\dfrac{(3n-1)4^{n+1}+4}{9}$.

【解析】

试题分析：据题设可得，$b_n=2^{a_n}$.（1）当 $n\ge 1$时，将 b_{n+1},b_n 相除，可得商为常数，从而证得其为等比数列.（2）首先可求出 $f(x)=2^x$ 在 (a_2,b_2) 处的切线为 $y-b_2=2^{a_2}\ln 2(x-a_2)$，令 $y=0$ 得 $-b_2=(2^{a_2}\ln 2)\times(x-a_2),x=a_2-\dfrac{1}{\ln 2},\therefore a_2=2$，由此可求出 $a_n=n$，$b_n=2^n$.所以 $a_nb_n^2=n\cdot 4^n$，这个数列用错位学科网相消法可得前 n 项和 T_n.

试题解析：（1）由已知，$b_n=2^{a_n}>0$..

当 $n\ge 1$时，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d$.

所以，数列是首项为 2^{a_1}，公比为 2^d 的等比数列.

（2）$f(x)=2^x$ 求导得 $f'(x)=2^x\ln 2$，所以 $f(x)=2^x$ 在 (a_2,b_2) 处的切线为 $y-b_2=2^{a_2}\ln 2(x-a_2)$，

令 $y=0$ 得 $-b_2=(2^{a_2}\ln 2)\times(x-a_2),x=a_2-\dfrac{1}{\ln 2},\therefore a_2=2$，

所以 $d=2-1=1,\therefore a_n=n$，$b_n=2^n$.所以 $a_nb_n^2=n\cdot 4^n$，

其前 n 项和：$T_n=1\cdot 4+2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\cdots+(n-1)\cdot 4^{n-1}+n\cdot 4^n$ ……………………………①

两边乘以4得：$4T_n=1\cdot 4^2+2\cdot 4^3+3\cdot 4^4+\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$ ……………………………②

①一②得：$T_n-4T_n=4+4^2+4^3+\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}-n\cdot 4^{n+1}$，所以 $T_n=\dfrac{(3n-1)4^{n+1}+4}{9}$.

【考点定位】等差数列与等比数列及其前前 n 项和，导数的几何意义.

20．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点为 $F(-2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设 O 为坐标原点，T 为直线 $x=-3$ 上任意一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P，Q.当四边形 OPTQ 是平行四边形时，求四边形 OPTQ 的面积.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$；（2）$2\sqrt{3}$

【解析】

试题分析：（1）由已知得：$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$c=2$，所以$a=\sqrt{6}$，再由$a^2=b^2+c^2$可得$b$，从而得椭圆的标准方程.）椭圆方程化为$x^2+3y^2=6$.设PQ的方程为$x=my-2$，代入椭圆方程得：$(m^2+3)y^2-4my-2=0$.面积$S_{OPTQ}=2S_{OPQ}=2\times\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|$，而$|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\sqrt{(\frac{4m}{m^2+3})^2-4\bullet\frac{-2}{m^2+3}}$，所以只要求出$m$的值即可得面积. 因为四边形OPTQ是平行四边形，所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QT}$，即$(x_1,y_1)=(-3-x_2,m-y_2)$.

再结合韦达定理即可得m的值.

试题解析：（1）由已知得：$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$c=2$，所以$a=\sqrt{6}$

又由$a^2=b^2+c^2$，解得$b=\sqrt{2}$，所以椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）椭圆方程化为$x^2+3y^2=6$.

设T点的坐标为$(-3,m)$，则直线TF的斜率$k_{TF}=\frac{m-0}{-3-(-2)}=-m$.

当$m\neq0$时，直线PQ的斜率$k_{PQ}=\frac{1}{m}$，直线PQ的方程是$x=my-2$

当$m=0$时，直线PQ的方程是$x=-2$，也符合$x=my-2$的形式.

将$x=my-2$代入椭圆方程得：$(m^2+3)y^2-4my-2=0$.

其判别式$\Delta=16m^2+8(m^2+3)>0$.

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+3},y_1y_2=\frac{-2}{m^2+3},x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\frac{-12}{m^2+3}$.

因为四边形OPTQ是平行四边形，所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QT}$，即$(x_1,y_1)=(-3-x_2,m-y_2)$.

所以$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-12}{m^2+3}=-3\\ y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+3}=m\end{cases}$，解得$m=\pm1$.

此时四边形OPTQ的面积

$$S_{OPTQ}=2S_{OPQ}=2\times\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=2\sqrt{(\frac{4m}{m^2+3})^2-4\bullet\frac{-2}{m^2+3}}=2\sqrt{3}.$$

【考点定位】1、直线及椭圆的方程；2、直线与圆锥曲线的位置关系；3、三角形的面积.

21．已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中 $a,b\in R$， $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数。

（I）设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值；

（II）若 $f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，证明：$e-2<a<1$.

【答案】（Ⅰ）当 $a\le\frac{1}{2}$ 时， $g(x)\ge g(0)=1-b$；当 $\frac{1}{2}<a\le\frac{e}{2}$ 时， $g(x)\ge 2a-2a\ln(2a)-b$；当 $a>\frac{e}{2}$ 时， $g(x)\ge e-2a-b$.（Ⅱ） a 的范围为 $(0,1)$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）易得 $g(x)=e^x-2ax-b, g'(x)=e^x-2a$，再对分 a 情况确定 $g(x)$ 的单调区间，根据 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性即可得 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值.（Ⅱ）设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点，注意到 $f(0)=0, f(1)=0$.联系到函数的学科网图象可知，导函数 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内存在零点 x_1， $g(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 内存在零点 x_2，即 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点. 由（Ⅰ）可知，当 $a\le\frac{1}{2}$ 及 $a\ge\frac{e}{2}$ 时， $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内都不可能有两个零点.所以 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$.此时， $g(x)$ 在 $[0,\ln 2a]$ 上单调递减，在 $[\ln 2a,1]$ 上单调递增，因此 $x_1\in(0,\ln(2a)], x_2\in(\ln(2a),1)$，且必有 $g(0)=1-b>0, g(1)=e-2a-b>0$. 由 $f(1)=e-a-b-1=0$ 得：$b=e-a-1$，代入这两个不等式即可得 a 的取值范围.

试题解析：（Ⅰ） $g(x)=e^x-2ax-b, g'(x)=e^x-2a$

①当 $a\le 0$ 时， $g'(x)=e^x-2a>0$，所以 $g(x)\ge g(0)=1-b$.

②当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=e^x-2a>0$ 得 $e^x>2a, x>\ln(2a)$.

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $\ln(2a)>0$；若 $a>\frac{e}{2}$，则 $\ln(2a)>1$.

所以当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时， $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $g(x)\ge g(0)=1-b$.

当 $\frac{1}{2}<a\le\frac{e}{2}$ 时， $g(x)$ 在 $[0,\ln 2a]$ 上单调递减，在 $[\ln 2a,1]$ 上单调递增，所以

$g(x) \ge g(\ln 2a) = 2a - 2a\ln 2a - b$.

当 $a > \frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $g(x) \ge g(1) = e - 2a - b$.

（II）设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点，则由 $f(0) = f(x_0) = 0$ 可知，

$f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上不可能单调递增，也不可能单调递减.

则 $g(x)$ 不可能恒为正，也不可能恒为负.

故 $g(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 内存在零点 x_1.

同理 $g(x)$ 在区间 $(x_0, 1)$ 内存学科网在零点 x_2.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

由（I）知，当 $a \le \frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

当 $a \ge \frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

所以 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$.

此时，$g(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减，在 $[\ln 2a, 1]$ 上单调递增，

因此 $x_1 \in (0, \ln(2a)], x_2 \in (\ln(2a), 1)$，必有

$g(0) = 1 - b > 0, g(1) = e - 2a - b > 0$.

由 $f(1) = e - a - b - 1 = 0$ 得：$a + b = e - 1 < 2$，有

$g(0) = 1 - b = a - e + 2 > 0, g(1) = e - 2a - b = 1 - a > 0$.

解得 $e - 2 < a < 1$.

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点时，$e - 2 < a < 1$.

【考点定位】导数的应用及函数的零点.考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化等数学思想，并考查思维的严谨性.