

2005 年重庆高考理科数学真题及答案

注意事项:

1. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后, 将试题卷和答题卡一并交回。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥, 那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立, 那么 $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P, 那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概

率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题给出的四个备选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 圆 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 关于原点 $(0, 0)$ 对称的圆的方程为 ()

A. $(x-2)^2 + y^2 = 5$ B. $x^2 + (y-2)^2 = 5$

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$ D. $x^2 + (y+2)^2 = 5$

2. $(\frac{1+i}{1-i})^{2005} =$ ()

A. i B. $-i$ C. 2^{2005} D. -2^{2005}

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得

$f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

4. 已知 $A(3, 1)$, $B(6, 1)$, $C(4, 3)$, D 为线段 BC 的中点, 则向量 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{DA} 的夹角为

()

A. $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5}$ B. $\arccos \frac{4}{5}$ C. $\arccos(-\frac{4}{5})$ D. $-\arccos(-\frac{4}{5})$

5. 若 x, y 是正数, 则 $(x + \frac{1}{2y})^2 + (y + \frac{1}{2x})^2$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. 4 D. $\frac{9}{2}$

6. 已知 α 、 β 均为锐角，若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta), q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ ，则 p 是 q 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β ，给定下列条件：

- ①存在平面 γ ，使得 α 、 β 都垂直于 γ ；
②存在平面 γ ，使得 α 、 β 都平行于 γ ；
③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等；
④存在异面直线 l, m ，使得 $l // \alpha, l // \beta, m // \alpha, m // \beta$ ，

其中，可以判定 α 与 β 平行的条件有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 若 $(2x - \frac{1}{x})^n$ 展开式中含 x^2 项的系数与含 x^4 项的系数之比为 -5 ，则 n 等于 ()

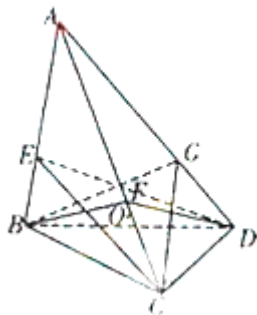
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

9. 若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上变化，则 $x^2 + 2y$ 的最大值为 ()

- A. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 4), \\ 2b & (b \geq 4) \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 2), \\ 2b & (b \geq 2) \end{cases}$

- C. $\frac{b^2}{4} + 4$ D. $2b$

10. 如图，在体积为 1 的三棱锥 A—BCD 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G，使 $AE : EB = AF : FC = AG : GD = 2 : 1$ ，记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点，则三棱锥 O—BCD 的体积等于 ()



A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{4}$

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填写在答题卡相应位置上。

11. 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

12. 曲线 $y = x^3$ 在点 (a, a^3) ($a \neq 0$) 处的切线与 x 轴、直线 $x = a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$, 则 $a =$ _____.

13. 已知 α 、 β 均为锐角，且 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n} - 3^{2n+1}}{2^{3n} + 3^{2n}} =$ _____.

15. 某轻轨列车有 4 节车厢，现有 6 位乘客准备乘坐，设每一位乘客进入每节车厢是等可能的，则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0, 1, 2, 3 的概率为_____.

16. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是_____（填写所有正确选项的序号）.

- ①菱形 ②有 3 条边相等的四边形 ③梯形
- ④平行四边形 ⑤有一组对角相等的四边形

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 13 分）

若函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{4 \sin(\frac{\pi}{2} + x)} - a \sin \frac{x}{2} \cos(\pi - \frac{x}{2})$ 的最大值为 2，试确定常数 a 的值.

18. （本小题满分 13 分）

在一次购物抽奖活动中，假设某 10 张券中有一等奖券 1 张，可获价值 50 元的奖品；有

二等奖券 3 张，每张可获价值 10 元的奖品；其余 6 张没有奖，某顾客从此 10 张券中任抽 2 张，求：

(I) 该顾客中奖的概率；

(II) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E\xi$.

19. (本小题满分 13 分)

已知 $a \in R$ ，讨论函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a + 1)$ 的极值点的个数.

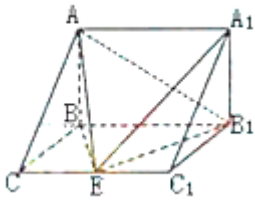
20. (本小题满分 13 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C ，E 为棱 CC_1 上异于 C、 C_1 的一点，

$EA \perp EB_1$ ，已知 $AB = \sqrt{2}$ ， $BB_1 = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$ ，求：

(I) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离；

(II) 二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的正切值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点，而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(I) 求双曲线 C_2 的方程；

(II) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点，且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 6$ (其中 O 为原点)，求 k 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n^2 + n})a_n + \frac{1}{2^n} (n \geq 1)$.

(I) 用数学归纳法证明： $a_n \geq 2 (n \geq 2)$ ；

(II) 已知不等式 $\ln(1+x) < x$ 对 $x > 0$ 成立, 证明: $a_n < e^2 (n \geq 1)$, 其中无理数 $e=2.71828\dots$.

参考答案

一、选择题: 每小题 5 分, 满分 50 分.

1. A 2. A 3. D 4. C 5. C 6. B 7. B 8. B 9. A 10. C

二、填空题: 每小题 4 分, 满分 24 分.

11. $\{x | 0 < x < 3\}$ 12. ± 1 13. 1 14. -3 15. $\frac{45}{128}$ 16. ②③⑤

三、解答题: 满分 76 分.

17. (本小题 13 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{2\cos^2 x}{4\cos x} + a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cos x + \frac{a}{2}\sin x \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}}\sin(x+\varphi), \text{ 其中角 } \varphi \text{ 满足 } \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{aligned}$$

由已知有 $\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} = 4$.

解之得, $a = \pm\sqrt{15}$.

18. (本小题 13 分)

解法一:

$$(I) \quad P = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{15}{45} = \frac{2}{3}, \text{ 即该顾客中奖的概率为 } \frac{2}{3}.$$

(II) ξ 的所有可能值为: 0, 10, 20, 50, 60 (元).

$$\text{且 } P(\xi = 0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}, P(\xi = 10) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{5},$$

$$P(\xi = 20) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}, P(\xi = 50) = \frac{C_1^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},$$

$$P(\xi = 60) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}.$$

ξ	0	10	20	50	60
-------	---	----	----	----	----

P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
---	---------------	---------------	----------------	----------------	----------------

故 ξ 有分布列:

从而期望 $E\xi = 0 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{2}{5} + 20 \times \frac{1}{15} + 50 \times \frac{2}{15} + 60 \times \frac{1}{15} = 16.$

解法二:

$$(I) \quad P = \frac{(C_4^1 C_6^1 + C_4^2)}{C_{10}^2} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3},$$

(II) ξ 的分布列求法同解法一

由于 10 张券总价值为 80 元, 即每张的平均奖品价值为 8 元, 从而抽 2 张的平均奖品价值 $E\xi = 2 \times 8 = 16$ (元).

19. (本小题 13 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(x) &= e^x(x^2 + ax + a + 1) + e^x(2x + a) \\ &= e^x[x^2 + (a + 2)x + (2a + 1)], \end{aligned}$$




$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x^2 + (a + 2)x + (2a + 1) = 0.$$

$$(1) \text{ 当 } \Delta = (a + 2)^2 - 4(2a + 1) = a^2 - 4a = a(a - 4) > 0.$$

即 $a < 0$ 或 $a > 4$ 时, 方程 $x^2 + (a + 2)x + (2a + 1) = 0$

有两个不同的实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$,

于是 $f'(x) = e^x(x - x_1)(x - x_2)$, 从而有下表:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$f(x_1)$ 为极大值		$f(x_2)$ 为极小值	

即此时 $f(x)$ 有两个极值点.

(2) 当 $\Delta = 0$ 即 $a = 0$ 或 $a = 4$ 时, 方程 $x^2 + (a + 2)x + (2a + 1) = 0$ 有两个相同的实根

$$x_1 = x_2$$

$$\text{于是 } f'(x) = e^x(x - x_1)^2$$

故当 $x < x_1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 无极值.

(3) 当 $\Delta < 0$, 即 $0 < a < 4$ 时, $x^2 + (a+2)x + (2a+1) > 0$,

$f'(x) = e^x[x^2 + (a+2)x + (2a+1)] > 0$, 故 $f(x)$ 为增函数, 此时 $f(x)$ 无极值. 因此当 $a > 4$ 或 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有 2 个极值点, 当 $0 \leq a \leq 4$ 时, $f(x)$ 无极值点.

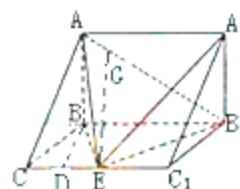
20. (本小题 13 分)

解法一:

(I) 因 $AB \perp$ 面 BB_1C_1C , 故 $AB \perp BE$.

又 $EB_1 \perp EA$, 且 EA 在面 BCC_1B_1 内的射影为 EB .

由三垂线定理的逆定理知 $EB_1 \perp BE$, 因此 BE 是异面直线 AB 与 EB_1 的公垂线,



答(20)图1

在平行四边形 BCC_1B_1 中, 设 $EB=x$, 则 $EB_1 = \sqrt{4-x^2}$,

作 $BD \perp CC_1$, 交 CC_1 于 D , 则 $BD=BC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\triangle BEB_1$ 中, 由面积关系得 $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $(x^2-1)(x^2-3) = 0$.

解之得 $x = \pm 1, x = \pm \sqrt{3}$ (负根舍去)

当 $x = \sqrt{3}$ 时, 在 $\triangle BCE$ 中, $CE^2 + 1^2 - 2CE \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3$,

解之得 $CE=2$, 故此时 E 与 C_1 重合, 由题意舍去 $x = \sqrt{3}$.

因此 $x=1$, 即异面直线 AB 与 EB_1 的距离为 1.

(II) 过 E 作 $EG \parallel B_1A_1$, 则 $GE \perp$ 面 BCC_1B_1 , 故 $GE \perp EB_1$ 且 GE 在圆 A_1B_1E 内,

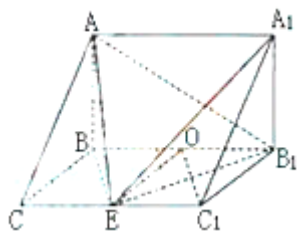
又已知 $AE \perp EB_1$

故 $\angle AEG$ 是二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角.

$$\tan AEG = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因 $EG \parallel B_1A_1 \parallel BA$, $\angle AEG = \angle BAE$, 故

解法二:



(I) 由 $AE \perp EB_1$, 得 $\vec{AE} \cdot \vec{EB_1} = 0$, 又由 $AB \perp$ 平面

而 BB_1C_1C 得 $AB \perp EB_1$ 从而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{故 } \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EB_1} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{EB_1} \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0 \end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{EB_1}$, 故线段 BE 是异面直线 AB 与 EB_1 的公垂线.

设 O 是 BB_1 的中点, 连接 EO 及 OC_1 , 则在 $Rt\triangle BEB_1$ 中, $EO = \frac{1}{2} BB_1 = OB_1 = 1$,

因为在 $\triangle OB_1C_1$ 中, $B_1C_1 = 1$, $\angle OB_1C_1 = \frac{\pi}{3}$, 故 $\triangle OB_1C_1$ 是正三角形, 所以 $OC_1 = OB_1 = 1$,

又因 $\angle OC_1E = \angle B_1C_1C - \angle B_1C_1O = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 故 $\triangle OC_1E$ 是正三角形,

所以 $C_1E = 1$, 故 $CE = 1$, 易见 $\triangle BCE$ 是正三角形, 从而 $BE = 1$, 即异面直线 AB 与 EB_1 的距离是 1.

(II) 由 (I) 可得 $\angle AEB$ 是二面角 $A-EB_1-B$ 的平面角, 在 $Rt\triangle ABE$ 中, 由 $AB = \sqrt{2}$,

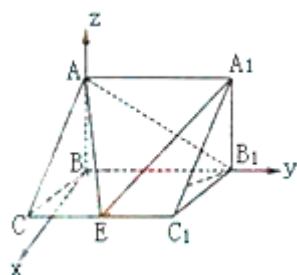
$BE = 1$, 得 $\tan AEB = \sqrt{2}$.

又由已知得平面 $A_1B_1E \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

故二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角 $\theta = \frac{\pi}{2} - \angle AEB$, 故

$$\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \angle AEB\right) = \cot AEB = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解法三:



(I) 以 B 为原点, $\overrightarrow{BB_1}$ 、 \overrightarrow{BA} 分别为 y 、 z 轴建立空间直角坐标系.

由于 $BC = 1$, $BB_1 = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$,

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中有

B (0, 0, 0), A (0, 0, $\sqrt{2}$), B₁ (0, 2, 0),

$C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), C_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$

设 $E(\frac{\sqrt{3}}{2}, a, 0)$, 由 $EA \perp EB_1$, 得 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0$, 即

$$0 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -a, \sqrt{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 2-a, 0)$$
$$= \frac{3}{4} + a(a-2) = a^2 - 2a + \frac{3}{4},$$

得 $(a - \frac{1}{2})(a - \frac{3}{2}) = 0$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{3}{2}$ (舍去), 故 $E(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{EB_1} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0, \text{ 即 } BE \perp EB_1.$$

又 $AB \perp$ 面 BCC_1B_1 , 故 $AB \perp BE$. 因此 BE 是异面直线 AB 、 EB_1 的公垂线,

则 $|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$, 故异面直线 AB 、 EB_1 的距离为 1.

(II) 由已知有 $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{EB_1}, \overrightarrow{B_1A_1} \perp \overrightarrow{EB_1}$, 故二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角 θ 的大小为向量 $\overrightarrow{B_1A_1}$ 与 \overrightarrow{EA} 的夹角.

$$\text{因 } \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA} = (0, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{EA} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}),$$

$$\text{故 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{B_1A_1}}{|\overrightarrow{EA}| |\overrightarrow{B_1A_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{即 } \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21. (本小题 12 分)

解: (I) 设双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则 $a^2 = 4 - 1 = 3$, 再由 $a^2 + b^2 = c^2$ 得 $b^2 = 1$.

故 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(II) 将 $y = kx + \sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8\sqrt{2}kx + 4 = 0$.

由直线 1 与椭圆 C1 恒有两个不同的交点得

$$\Delta_1 = (8\sqrt{2})^2 k^2 - 16(1 + 4k^2) = 16(4k^2 - 1) > 0,$$

$$\text{即 } k^2 > \frac{1}{4}. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{将 } y = kx + \sqrt{2} \text{ 代入 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \text{ 得 } (1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0$$

由直线 1 与双曲线 C2 恒有两个不同的交点 A, B 得

$$\begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0, \\ \Delta_2 = (-6\sqrt{2}k)^2 + 36(1 - 3k^2) = 36(1 - k^2) > 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{设 } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), \text{ 则 } x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2}, x_A \cdot x_B = \frac{-9}{1 - 3k^2}$$

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 6$ 得 $x_A x_B + y_A y_B < 6$, 而

$$\begin{aligned} x_A x_B + y_A y_B &= x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2}) \\ &= (k^2 + 1)x_A x_B + \sqrt{2}k(x_A + x_B) + 2 \\ &= (k^2 + 1) \cdot \frac{-9}{1 - 3k^2} + \sqrt{2}k \cdot \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2} + 2 \\ &= \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1} < 6, \text{ 即 } \frac{15k^2 - 13}{3k^2 - 1} > 0. \quad \text{解此不等式得}$$

$$k^2 > \frac{13}{15} \text{ 或 } k^2 < \frac{1}{3}. \quad \textcircled{3}$$

由①、②、③得

$$\frac{1}{4} < k^2 < \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{13}{15} < k^2 < 1.$$

$$\text{故 } k \text{ 的取值范围为 } (-1, -\sqrt{\frac{13}{15}}) \cup (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\sqrt{\frac{13}{15}}, 1)$$

22. (本小题 12 分)

(I) 证明: (1) 当 $n=2$ 时, $a_2 = 2 \geq 2$, 不等式成立.

(2) 假设当 $n = k (k \geq 2)$ 时不等式成立, 即 $a_k \geq 2(k \geq 2)$,

那么 $a_{k+1} = (1 + \frac{1}{k(k+1)})a_k + \frac{1}{2^k} \geq 2$. 这就是说, 当 $n = k + 1$ 时不等式成立.

根据 (1)、(2) 可知: $a_k \geq 2$ 对所有 $n \geq 2$ 成立.

(II) 证法一:

由递推公式及 (I) 的结论有 $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n^2+n})a_n + \frac{1}{2^n} \leq (1 + \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{2^n})a_n, (n \geq 1)$

两边取对数并利用已知不等式得 $\ln a_{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{2^n}) + \ln a_n$

$$\leq \ln a_n + \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{2^n}. \quad \text{故} \quad \ln a_{n+1} - \ln a_n \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 1).$$

上式从 1 到 $n-1$ 求和可得

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_1 &\leq \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{2^n} < 2. \end{aligned}$$

即 $\ln a_n < 2$, 故 $a_n < e^2 \quad (n \geq 1)$.

(II) 证法二:

由数学归纳法易证 $2^n > n(n-1)$ 对 $n \geq 2$ 成立, 故

$$a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n^2+n})a_n + \frac{1}{2^n} < (1 + \frac{1}{n(n-1)})a_n + \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2).$$

令 $b_n = a_n + 1 \quad (n \geq 2)$, 则 $b_{n+1} \leq (1 + \frac{1}{n(n-1)})b_n \quad (n \geq 2)$.

取对数并利用已知不等式得 $\ln b_{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n(n-1)}) + \ln b_n$

$$\leq \ln b_n + \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2).$$

上式从 2 到 n 求和得 $\ln b_{n+1} - \ln b_2 \leq \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} < 1.$$

因 $b_2 = a_2 + 1 = 3$. 故 $\ln b_{n+1} < 1 + \ln 3, b_{n+1} < e^{1+\ln 3} = 3e \quad (n \geq 2)$.

故 $a_{n+1} < 3e - 1 < e^2, n \geq 2$, 又显然 $a_1 < e^2, a_2 < e^2$, 故 $a_n < e^2$ 对一切 $n \geq 1$ 成立.