

## 2001 年辽宁高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 9 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 60 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。

2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2} (c' + c)l$$

其中  $c'$ 、 $c$  分别表示上、下底面周长， $l$  表示斜高或母线长

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3} (S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中  $S'$ 、 $S$  分别表示上、下底面积， $h$  表示高

一、选择题：本大题共 12 小题；第每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 若  $\sin \theta \cos \theta > 0$ ，则  $\theta$  在

(A) 第一、二象限 (B) 第一、三象限 (C) 第一、四象限 (D) 第二、四象限

(2) 过点  $A(1, -1)$ 、 $B(-1, 1)$  且圆心在直线  $x + y - 2 = 0$  上的圆的方程是

(A)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$  (B)  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

(C)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  (D)  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

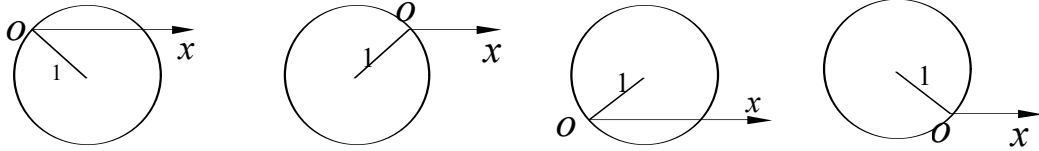
(3) 设  $\{a_n\}$  是递增等差数列，前三项的和为 12，前三项的积为 48，则它的首项是

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

(4) 若定义在区间  $(-1, 0)$  内的函数  $f(x) = \log_{2a}(x+1)$  满足  $f(x) > 0$ , 则  $a$  的取值范围是

- (A)  $(0, \frac{1}{2})$       (B)  $(0, \frac{1}{2}]$       (C)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$       (D)  $(0, +\infty)$

(5) 极坐标方程  $\rho = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$  的图形是



- (A)                      (B)                      (C)                      (D)

(6) 函数  $y = \cos x + 1 (-\pi \leq x \leq 0)$  的反函数是

- (A)  $y = -\arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$       (B)  $y = \pi - \arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$   
 (C)  $y = \arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$       (D)  $y = \pi + \arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$

(7) 若椭圆经过原点, 且焦点为  $F_1(1, 0), F_2(3, 0)$ , 则其离心率为

- (A)  $\frac{3}{4}$       (B)  $\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{1}{4}$

(8) 若  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ ,  $\sin \beta + \cos \beta = b$ , 则

- (A)  $a < b$       (B)  $a > b$       (C)  $ab < 1$       (D)  $ab > 2$

(9) 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 若  $AB = \sqrt{2}BB_1$ , 则  $AB_1$  与  $C_1B$  所成的角的大小为

- (A)  $60^\circ$       (B)  $90^\circ$       (C)  $105^\circ$       (D)  $75^\circ$

(10) 设  $f(x), g(x)$  都是单调函数, 有如下四个命题:

① 若  $f(x)$  单调递增,  $g(x)$  单调递增, 则  $f(x) - g(x)$  单调递增;

② 若  $f(x)$  单调递增,  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) - g(x)$  单调递增;

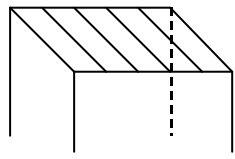
③ 若  $f(x)$  单调递减,  $g(x)$  单调递增, 则  $f(x) - g(x)$  单调递减;

④ 若  $f(x)$  单调递减,  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) - g(x)$  单调递减;

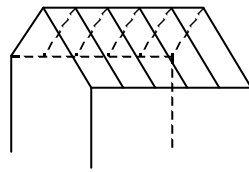
其中, 正确的命题是

- (A) ①③      (B) ①④      (C) ②③      (D) ②④

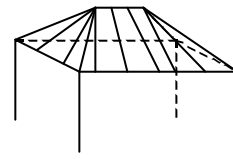
(11) 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ①单向倾斜; ②双向倾斜; ③四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为  $P_1, P_2, P_3$ .



①



②



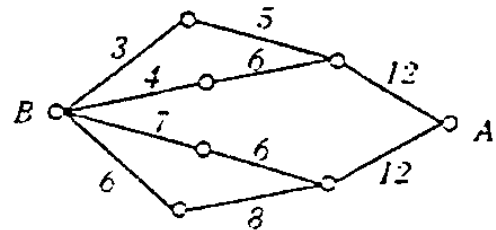
③

若屋顶斜面与水平面所成的角都是  $\alpha$ ，则

- (A)  $P_3 > P_2 > P_1$  (B)  $P_3 > P_2 = P_1$  (C)  $P_3 = P_2 > P_1$  (D)  $P_3 = P_2 = P_1$

(12) 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联。连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点  $A$  向结点  $B$  传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递。则单位时间内传递的最大信息量为

- (A) 26 (B) 24  
(C) 20 (D) 19



第 II 卷（非选择题 90 分）

注意事项：

- 第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二. 填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

(13) 若一个椭圆的轴截面是等边三角形，其面积为  $\sqrt{3}$ ，则这个椭圆的侧面积是\_\_\_\_\_

(14) 双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的两个焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ ，点  $P$  在双曲线上. 若  $PF_1 \perp PF_2$ ，则点  $P$  到  $x$  轴的距离为\_\_\_\_\_.

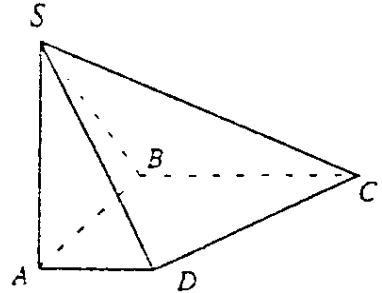
(15) 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列， $S_n$  是它的前  $n$  项和. 若  $\{S_n\}$  是等差数列，则  $q =$ \_\_\_\_\_.

(16) 圆周上有  $2n$  个等分点 ( $n > 1$ )，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题；共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

如图，在底面是直角梯形的四棱锥  $S-ABCD$  中，  
 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $SA \perp$  面  $ABCD$ ， $SA = AB = BC = 1$ ，  
 $AD = \frac{1}{2}$ 。



(I) 求四棱锥  $S-ABCD$  的体积；

(II) 求面  $SCD$  与面  $SBA$  所成的二面角的正切值。

(18) (本小题满分 12 分)

已知复数  $z_1 = i(1-i)^3$ 。

(I) 求  $\arg z_1$  及  $|z_1|$ ；

(II) 当复数  $z$  满足  $|z|=1$ ，求  $|z-z_1|$  的最大值。

(19) (本小题满分 12 分)

设抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，经过点  $F$  的直线交抛物线于  $A$ 、 $B$  两点。点  $C$  在抛物线的准线上，且  $BC \parallel x$  轴。证明直线  $AC$  经过原点  $O$ 。

(20) (本小题满分 12 分)

已知  $i, m, n$  是正整数，且  $1 < i \leq m < n$ 。

(I) 证明  $n^i P_m^i < m^i P_n^i$ ；

(II) 证明  $(1+m)^n > (1+n)^m$ 。

(21) (本小题满分 12 分)

从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业。根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少  $\frac{1}{5}$ 。本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加  $\frac{1}{4}$ 。

(I) 设  $n$  年内（本年度为第一年）总投入为  $a_n$  万元，旅游业总收入为  $b_n$  万元。写出  $a_n, b_n$  的表达式；

(II) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

(22) (本小题满分 14 分)

设  $f(x)$  是定义在  $R$  上的偶函数, 其图象关于直线  $x = 1$  对称, 对任意  $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ , 都有

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ , 且  $f(1) = a > 0$ .

(I) 求  $f(\frac{1}{2})$  及  $f(\frac{1}{4})$ ;

(II) 证明  $f(x)$  是周期函数;

(III) 记  $a_n = f(2n + \frac{1}{2n})$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n)$ .

#### 参考解答及评分标准

说明:

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生物解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定部分的给分, 但不得超过该部分正确解答得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

三. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一. 选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分, 满分 60 分.

- (1) B            (2) C            (3) B            (4) A            (5) C  
(6) A            (7) C            (8) A            (9) B            (10) C  
(11) D           (12) D

二. 填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

- (13)  $2\pi$             (14)  $\frac{16}{5}$             (15) 1            (16)  $2n(n-1)$

三. 解答题:

(17) 本小题考查线面关系和棱锥体积计算, 以及空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

解: (I) 直角梯形  $ABCD$  的面积是

$$M_{\text{底面}} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB = \frac{1+0.5}{2} \times 1 = \frac{3}{4}, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\therefore$  四棱锥  $S-ABCD$  的体积是

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times SA \times M_{\text{底面}} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

(II) 延长  $BA$ 、 $CD$  相交于点  $E$ , 连结  $SE$  则  $SE$  是所求二面角的棱.  $\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\because AD \parallel BC, BC = 2AD,$

$\therefore EA = AB = SA, \therefore SE \perp SB,$

$\because SA \perp$  面  $ABCD$ , 得  $SEB \perp$  面  $EBC$ ,  $EB$  是交线,

又  $BC \perp EB, \therefore BC \perp$  面  $SEB,$

故  $SB$  是  $CS$  在面  $SEB$  上的射影,

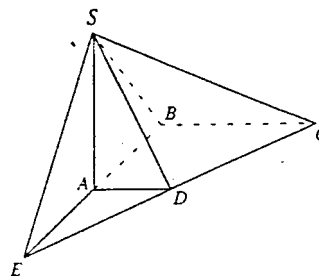
$\therefore CS \perp SE,$

所以  $\angle BSC$  是所求二面角的平面角.  $\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\because SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}, BC = 1, BC \perp SB,$

$$\therefore \tan \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即所求二面角的正切值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $\dots\dots 12 \text{ 分}$



(18) 本小题考查复数基本性质和基本运算, 以及分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

解: (I)  $z_1 = i(1-i)^3 = 2-2i,$

将  $z_1$  化为三角形式, 得

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$\therefore \arg z_1 = \frac{7\pi}{4}, \quad |z_1| = 2\sqrt{2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 设  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , 则

$$z - z_1 = (\cos \alpha - 2) + (\sin \alpha + 2) i,$$

$$\begin{aligned} |z - z_1|^2 &= (\cos \alpha - 2)^2 + (\sin \alpha + 2)^2 \\ &= 9 + 4\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

当  $\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1$  时,  $|z - z_1|^2$  取得最大值  $9 + 4\sqrt{2}$ .

从而得到  $|z - z_1|$  的最大值为  $2\sqrt{2} + 1$ . \dots\dots 12 分

(19) 本小题考查抛物线的概念和性质, 直线的方程和性质, 运算能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

证明一: 因为抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F \left( \frac{p}{2}, 0 \right)$ , 所以经过点  $F$  的直线的方程可设为

$$x = my + \frac{p}{2}; \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

代入抛物线方程得

$$y^2 - 2pmy - p^2 = 0,$$

若记  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1, y_2$  是该方程的两个根, 所以

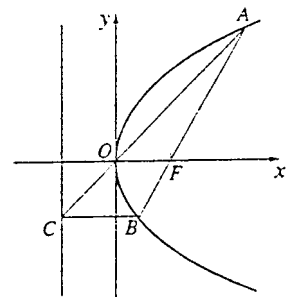
$$y_1 y_2 = -p^2. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为  $BC \parallel x$  轴, 且点  $c$  在准线  $x = -\frac{p}{2}$  上, 所以点  $c$  的坐标为  $\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$ , 故直线  $CO$  的斜率为

$$k = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1}.$$

即  $k$  也是直线  $OA$  的斜率, 所以直线  $AC$  经过原点  $O$ .

\dots\dots 12 分



证明二: 如图, 记  $x$  轴与抛物线准线  $l$  的交点为  $E$ , 过  $A$  作  $AD \perp l$ ,  $D$  是垂足. 则

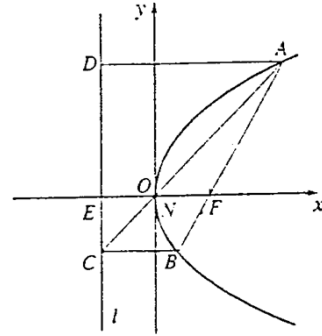
$AD \parallel FE \parallel BC$ . \dots\dots 2 分

连结  $AC$ , 与  $EF$  相交于点  $N$ , 则

$$\frac{|EN|}{|AD|} = \frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|AB|},$$

$$\frac{|NF|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|AB|},$$

……6 分



根据抛物线的几何性质,  $|AF| = |AD|$ ,

$$|BF| = |BC|, \quad \text{……8 分}$$

$$\therefore |EN| = \frac{|AD| \cdot |BF|}{|AB|} = \frac{|AF| \cdot |BC|}{|AB|} = |NF|,$$

即点  $N$  是  $EF$  的中点, 与抛物线的顶点  $O$  重合, 所以直线  $AC$  经过原点  $O$ . ……12 分

(20) 本小题考查排列、组合、二项式定理、不等式的基本知识和逻辑推理能力. 满分 12 分.

(I) 证明: 对于  $1 < i \leq m$  有

$$p_m^i = m \cdot \dots \cdot (m - i + 1),$$

$$\frac{p_m^i}{m^i} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-i+1}{m},$$

$$\text{同理 } \frac{p_n^i}{n^i} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-i+1}{n}, \quad \text{……4 分}$$

由于  $m < n$ , 对整数  $k = 1, 2, \dots, i-1$ , 有  $\frac{n-k}{n} > \frac{m-k}{m}$ ,

$$\text{所以 } \frac{p_n^i}{n^i} > \frac{p_m^i}{m^i}, \text{ 即 } m^i p_n^i > n^i p_m^i. \quad \text{……6 分}$$

(II) 证明由二项式定理有

$$(1+m)^n = \sum_{i=0}^n m^i C_n^i,$$

$$(1+n)^m = \sum_{i=0}^m n^i C_m^i, \quad \text{……8 分}$$

由 (I) 知  $m^i p_n^i > n^i p_m^i$  ( $1 < i \leq m < n$ ),

而  $C_m^i = \frac{P_m^i}{i!}$ ,  $C_n^i = \frac{P_n^i}{i!}$ , ……10分

所以,  $m^i C_n^i > n^i C_m^i$  ( $1 < i \leq m < n$ ).

因此,  $\sum_{i=2}^m m^i C_n^i > \sum_{i=2}^m n^i C_m^i$ .

又  $m^0 C_n^0 = n^0 C_m^0 = 1$ ,  $m C_n^1 = n C_m^1 = mn$ ,  $m^i C_n^i > 0$  ( $m < i \leq n$ ).

$\therefore \sum_{i=0}^n m^i C_n^i > \sum_{i=0}^m n^i C_m^i$ .

即  $(1+m)^n > (1+n)^m$ . ……12分

(21) 本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识; 考查综合运用数学知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

解: (I) 第 1 年投入为 800 万元, 第 2 年投入为  $800 \times (1 - \frac{1}{5})$  万元, …… , 第  $n$  年投入为  $800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1}$  万元.

所以,  $n$  年内的总投入为

$$\begin{aligned} a_n &= 800 + 800 \times (1 - \frac{1}{5}) + \dots + 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{k-1} \\ &= 4000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n]; \end{aligned}$$

……3分

第 1 年旅游业收入为 400 万元, 第 2 年旅游业收入为  $400 \times (1 + \frac{1}{4})$  万元, …… , 第  $n$  年旅游业收入为  $400 \times (1 + \frac{1}{4})^{n-1}$  万元.

所以,  $n$  年内的旅游业总收入为

$$\begin{aligned} b_n &= 400 + 400 \times (1 + \frac{1}{4}) + \dots + 400 \times (1 + \frac{1}{4})^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n 400 \times (\frac{5}{4})^{k-1} \\ &= 1600 \times [(\frac{4}{5})^n - 1]. \end{aligned}$$

……6分

(II) 设至少经过  $n$  年旅游业的总收入才能超过总投入, 由此

$$b_n - a_n > 0,$$

$$\text{即 } 1600 \times \left[ \left( \frac{5}{4} \right)^n - 1 \right] - 4000 \times \left[ 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right] > 0.$$

$$\text{化简得 } 5 \times \left( \frac{4}{5} \right)^n + 2 \times \left( \frac{4}{5} \right)^n - 7 > 0, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设 } x = \left( \frac{4}{5} \right)^n, \text{ 代入上式得}$$

$$5x^2 - 7x + 2 > 0,$$

解此不等式, 得

$$x < \frac{2}{5}, \quad x > 1 \text{ (舍去)}.$$

$$\text{即 } \left( \frac{4}{5} \right)^n < \frac{2}{5},$$

$$\text{由此得 } n \geq 5.$$

答: 至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入. \dots\dots 12 分

(22) 本小题主要考查函数的概念、图像, 函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识; 考查运算能力和逻辑思维能力. 满分 14 分.

(I) 解: 因为对  $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ , 都有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ , 所以

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

$$\therefore f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = \left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$f(1) = a > 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = a^{\frac{1}{4}}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 证明: 依题设  $y = f(x)$  关于直线  $x = 1$  对称,

$$\text{故 } f(x) = f(1 + 1 - x),$$

$$\text{即 } f(x) = f(2 - x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

又由  $f(x)$  是偶函数知  $f(-x) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\therefore f(-x) = f(2 - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

将上式中  $-x$  以  $x$  代换, 得

$$f(x) = f(x+2), x \in \mathbb{R}.$$

这表明  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的周期函数, 且 2 是它的一个周期.

……10 分

(III) 解: 由 (I) 知  $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n} + (n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left((n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^n, \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2n}\right) = a^{\frac{1}{2n}}.$$

$\therefore f(x)$  的一个周期是 2,

$$\therefore f\left(2n + \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right), \text{ 因此 } a_n = a^{\frac{1}{2n}},$$

……

12 分

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \ln a\right) = 0.$$

……14 分