

# 2007 年青海高考文科数学真题及答案

## 注意事项:

1. 本试题卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 4 页, 总分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上.
3. 选择题的每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试题卷上.
4. 非选择题必须使用 0.5 毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写, 字体工整, 笔迹清楚.
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答. 超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效; 在草稿纸、本试题卷上答题无效.
6. 考试结束, 将本试题卷和答题卡一并交回.

## 第 I 卷 (选择题)

本卷共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

### 参考公式:

如果事件  $A, B$  互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件  $A, B$  相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ , 那么

$n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中  $R$  表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

## 一、选择题

1.  $\cos 330^\circ = ( \quad )$

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合  $U = \{1,2,3,4\}$ ,  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{2,4\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) = ( \quad )$

- A.  $\{2\}$       B.  $\{3\}$       C.  $\{1,2,4\}$       D.  $\{1,4\}$

3. 函数  $y = |\sin x|$  的一个单调增区间是 ( )

- A.  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$       B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$       C.  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$       D.  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

4. 下列四个数中最大的是 ( )
- A.  $(\ln 2)^2$       B.  $\ln(\ln 2)$       C.  $\ln \sqrt{2}$       D.  $\ln 2$
5. 不等式  $\frac{x-2}{x+3} > 0$  的解集是 ( )
- A.  $(-3, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$       D.  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
6. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $D$  是  $AB$  边上一点, 若  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$ , 则  $\lambda =$  ( )
- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$
7. 已知三棱锥的侧棱长的底面边长的 2 倍, 则侧棱与底面所成角的余弦值等于 ( )
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知曲线  $y = \frac{x^2}{4}$  的一条切线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 则切点的横坐标为 ( )
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
9. 把函数  $y = e^x$  的图像按向量  $\mathbf{a} = (2, 3)$  平移, 得到  $y = f(x)$  的图像, 则  $f(x) =$  ( )
- A.  $e^x + 2$       B.  $e^x - 2$       C.  $e^{x-2}$       D.  $e^{x+2}$
10. 5 位同学报名参加两个课外活动小组, 每位同学限报其中的一个小组, 则不同的报名方法共有 ( )
- A. 10 种      B. 20 种      C. 25 种      D. 32 种
11. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍, 则椭圆的离心率等于 ( )
- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
12. 设  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$  的左、右焦点. 若点  $P$  在双曲线上, 且  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ , 则  $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| =$  ( )
- A.  $\sqrt{10}$       B.  $2\sqrt{10}$       C.  $\sqrt{5}$       D.  $2\sqrt{5}$

第 II 卷 (非选择题)

本卷共 10 题, 共 90 分

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 一个总体含有 100 个个体，以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为 5 的样本，则指定的某个个体被抽到的概率为\_\_\_\_\_.

14. 已知数列的通项  $a_n = -5n + 2$ ，则其前  $n$  项和  $S_n =$ \_\_\_\_\_.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

16.  $(1 + 2x^2)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q < 1$ ，前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $a_3 = 2$ ， $S_4 = 5S_2$ ，求  $\{a_n\}$  的通项公式.

18. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中，已知内角  $A = \frac{\pi}{3}$ ，边  $BC = 2\sqrt{3}$ . 设内角  $B = x$ ，周长为  $y$ .

(1) 求函数  $y = f(x)$  的解析式和定义域；

(2) 求  $y$  的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件  $A$ ：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率  $P(A) = 0.96$ .

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率  $p$ ；

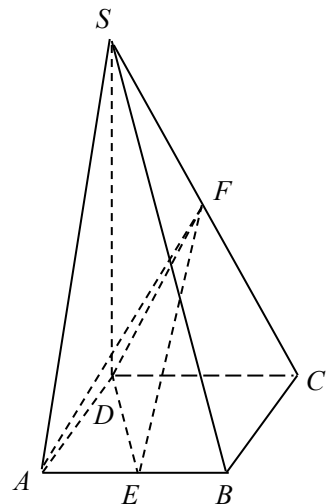
(2) 若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件，求事件  $B$ ：“取出的 2 件产品中至少有一件二等品”的概率  $P(B)$ .

20. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥  $S - ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形，侧棱  $SD \perp$  底面  $ABCD$ ， $E, F$  分别为  $AB, SC$  的中点.

(1) 证明  $EF \parallel$  平面  $SAD$ ；

(2) 设  $SD = 2DC$ ，求二面角  $A - EF - D$  的大小.



21. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，以  $O$  为圆心的圆与直线  $x - \sqrt{3}y = 4$  相切.

(1) 求圆  $O$  的方程;

(2) 圆  $O$  与  $x$  轴相交于  $A, B$  两点，圆内的动点  $P$  使  $|PA|, |PO|, |PB|$  成等比数列，求

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - bx^2 + (2-b)x + 1$

在  $x = x_1$  处取得极大值，在  $x = x_2$  处取得极小值，且  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ .

(1) 证明  $a > 0$ ;

(2) 若  $z = a + 2b$ , 求  $z$  的取值范围.

### 参考答案

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

#### 一、选择题

1. C    2. B    3. C    4. D    5. C    6. A  
7. A    8. A    9. C    10. D    11. D    12. B

#### 二、填空题

13.  $\frac{1}{20}$     14.  $\frac{-5n^2 - n}{2}$     15.  $2 + 4\sqrt{2}$

#### 三、解答题

17. 解: 由题设知  $a_1 \neq 0$ ,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 q^2 = 2, \\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 5 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}. \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

由②得  $1 - q^4 = 5(1 - q^2)$ ,  $(q^2 - 4)(q^2 - 1) = 0$ ,  $(q - 2)(q + 2)(q - 1)(q + 1) = 0$ ,

因为  $q < 1$ ，解得  $q = -1$  或  $q = -2$ 。

当  $q = -1$  时，代入①得  $a_1 = 2$ ，通项公式  $a_n = 2 \times (-1)^{n-1}$ ；

当  $q = -2$  时，代入①得  $a_1 = \frac{1}{2}$ ，通项公式  $a_n = \frac{1}{2} \times (-2)^{n-1}$ 。

18. 解：(1)  $\triangle ABC$  的内角和  $A+B+C = \pi$ ，由  $A = \frac{\pi}{3}$ ， $B > 0$ ， $C > 0$  得  $0 < B < \frac{2\pi}{3}$ 。

应用正弦定理，知

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 4 \sin x,$$

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4 \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right).$$

因为  $y = AB + BC + AC$ ，

$$\text{所以 } y = 4 \sin x + 4 \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) + 2\sqrt{3} \left( 0 < x < \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 因为 } y &= 4 \left( \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) + 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3} \left( \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

所以，当  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即  $x = \frac{\pi}{3}$  时， $y$  取得最大值  $6\sqrt{3}$ 。

19. (1) 记  $A_0$  表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”，

$A_1$  表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”。

则  $A_0$ ， $A_1$  互斥，且  $A = A_0 + A_1$ ，故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 + A_1) \\ &= P(A_0) + P(A_1) \\ &= (1-p)^2 + C_2^1 p(1-p) \\ &= 1-p^2 \end{aligned}$$

于是  $0.96 = 1-p^2$ 。

解得  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = -0.2$  (舍去).

(2) 记  $B_0$  表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”,

则  $B = \overline{B_0}$ .

若该批产品共 100 件, 由 (1) 知其中二等品有  $100 \times 0.2 = 20$  件, 故

$$P(B_0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495}.$$

$$P(B) = P(\overline{B_0}) = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{316}{495} = \frac{179}{495}$$

20. 解法一:

(1) 作  $FG \parallel DC$  交  $SD$  于点  $G$ , 则  $G$  为  $SD$  的中点.

连结  $AG$ ,  $FG \parallel \frac{1}{2}CD$ , 又  $CD \parallel AB$ ,

故  $FG \parallel AE$ ,  $AEFG$  为平行四边形.

$EF \parallel AG$ , 又  $AG \subset$  平面  $SAD$ ,  $EF \not\subset$  平面  $SAD$ .

所以  $EF \parallel$  平面  $SAD$ .

(2) 不妨设  $DC = 2$ , 则  $SD = 4$ ,  $DG = 2$ ,  $\triangle ADG$  为等腰直角三角形.

取  $AG$  中点  $H$ , 连结  $DH$ , 则  $DH \perp AG$ .

又  $AB \perp$  平面  $SAD$ , 所以  $AB \perp DH$ , 而  $AB \cap AG = A$ ,

所以  $DH \perp$  面  $AEF$ .

取  $EF$  中点  $M$ , 连结  $MH$ , 则  $HM \perp EF$ .

连结  $DM$ , 则  $DM \perp EF$ .

故  $\angle DMH$  为二面角  $A-EF-D$  的平面角

$$\tan \angle DMH = \frac{DH}{HM} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

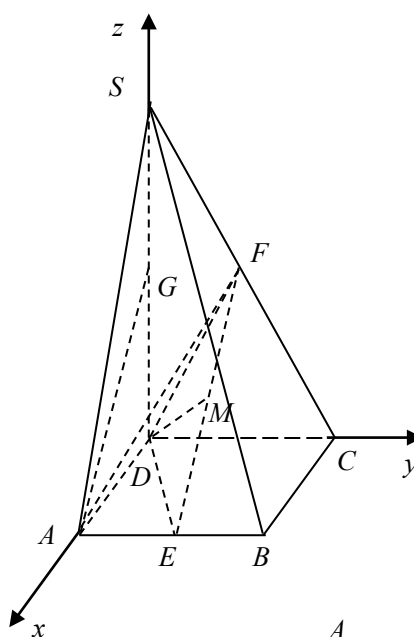
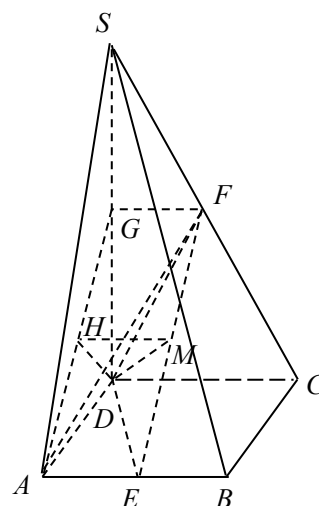
所以二面角  $A-EF-D$  的大小为  $\arctan \sqrt{2}$ .

解法二: (1) 如图, 建立空间直角坐标系  $D-xyz$ .

设  $A(a, 0, 0)$ ,  $S(0, 0, b)$ , 则  $B(a, a, 0)$ ,  $C(0, a, 0)$ ,

$$E\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-a, 0, \frac{b}{2}\right).$$



取  $SD$  的中点  $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$ , 则  $\overrightarrow{AG} = \left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$ .

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$ ,  $EF \parallel AG$ ,  $AG \subset$  平面  $SAD$ ,  $EF \not\subset$  平面  $SAD$ ,  
所以  $EF \parallel$  平面  $SAD$ .

(2) 不妨设  $A(1,0,0)$ , 则  $B(1,1,0)$ ,  $C(0,1,0)$ ,  $S(0,0,2)$ ,  $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ ,  $F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ .

$EF$  中点  $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{EF} = (-1,0,1)$ ,  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ,  $MD \perp EF$

又  $\overrightarrow{EA} = \left(0,-\frac{1}{2},0\right)$ ,  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ,  $EA \perp EF$ ,

所以向量  $\overrightarrow{MD}$  和  $\overrightarrow{EA}$  的夹角等于二面角  $A-EF-D$  的平面角.

$$\cos \langle \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{EA} \rangle = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{EA}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角  $A-EF-D$  的大小为  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

21. 解: (1) 依题设, 圆  $O$  的半径  $r$  等于原点  $O$  到直线  $x - \sqrt{3}y = 4$  的距离,

$$\text{即 } r = \frac{4}{\sqrt{1+3}} = 2.$$

得圆  $O$  的方程为  $x^2 + y^2 = 4$ .

(2) 不妨设  $A(x_1,0)$ ,  $B(x_2,0)$ ,  $x_1 < x_2$ . 由  $x^2 = 4$  即得

$$A(-2,0), B(2,0).$$

设  $P(x, y)$ , 由  $|PA|, |PO|, |PB|$  成等比数列, 得

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

$$\text{即 } x^2 - y^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (-2-x, -y) \cdot (2-x, -y) \\ &= x^2 - 4 + y^2 \\ &= 2(y^2 - 1). \end{aligned}$$

由于点  $P$  在圆  $O$  内, 故 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

由此得  $y^2 < 1$ .

所以  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围为  $[-2, 0)$ .

22. 解: 求函数  $f(x)$  的导数  $f'(x) = ax^2 - 2bx + 2 - b$ .

(I) 由函数  $f(x)$  在  $x = x_1$  处取得极大值, 在  $x = x_2$  处取得极小值, 知  $x_1, x_2$  是  $f'(x) = 0$  的两个根.

所以  $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

当  $x < x_1$  时,  $f(x)$  为增函数,  $f'(x) > 0$ , 由  $x - x_1 < 0, x - x_2 < 0$  得  $a > 0$ .

(II) 在题设下,  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$  等价于 
$$\begin{cases} f'(0) > 0 \\ f'(1) < 0 \\ f'(2) > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2 - b > 0 \\ a - 2b + 2 - b < 0 \\ 4a - 4b + 2 - b > 0 \end{cases}.$$

化简得 
$$\begin{cases} 2 - b > 0 \\ a - 3b + 2 < 0 \\ 4a - 5b + 2 > 0 \end{cases}.$$

此不等式组表示的区域为平面  $aOb$  上三条直线  $2 - b = 0, a - 3b + 2 = 0, 4a - 5b + 2 = 0$ .

所围成的  $\triangle ABC$  的内部, 其三个顶点分别为:  $A\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right), B(2, 2), C(4, 2)$ .

$z$  在这三点的值依次为  $\frac{16}{7}, 6, 8$ .

所以  $z$  的取值范围为  $\left(\frac{16}{7}, 8\right)$ .

