绝密★启用前

试卷类型：A

2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷数学

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1．答题前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-2\}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：由一元二次不等式的解法求出集合 N，即可根据交集的运算解出.

方法二：将集合 M 中的元素逐个代入不等式验证，即可解出.

【详解】方法一：因为 $N=\{x|x^2-x-6\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，而 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以 $M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

方法二：因为 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，将 $-2,-1,0,1,2$ 代入不等式 $x^2-x-6\geq 0$，只有 -2 使不等式成立，

所以 $M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

2. 已知 $z=\dfrac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

A. $-i$　　B. i　　C. 0　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算求出 z，再由共轭复数的概念得到 $\overline{z}$，从而解出.

【详解】因为 $z=\dfrac{1-i}{2+2i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{4}=-\dfrac{1}{2}i$，所以 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}i$，即 $z-\overline{z}=-i$.

故选：A.

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则（　　）

A. $\lambda+\mu=1$

B. $\lambda+\mu=-1$

C. $\lambda\mu=1$

D. $\lambda\mu=-1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的坐标运算求出 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$\vec{a}+\mu\vec{b}$，再根据向量垂直的坐标表示即可求出.

【详解】因为 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，所以 $\vec{a}+\lambda\vec{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$，$\vec{a}+\mu\vec{b}=(1+\mu,1-\mu)$，

由 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$ 可得，$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\mu\vec{b})=0$，

即 $(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$，整理得：$\lambda\mu=-1$.

故选：D.

4. 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2]$

B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$

D. $[2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用指数型复合函数单调性，判断列式计算作答.

【详解】函数 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增，而函数 $f\left(x\right)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，

则有函数 $y=x(x-a)=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，因此 $\frac{a}{2}\geq 1$，解得 $a\geq 2$，

所以 a 的取值范围是 $\left[2,+\infty\right)$.

故选：D

5. 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1),C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1,e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定的椭圆方程，结合离心率的意义列式计算作答.

【详解】由 $e_2=\sqrt{3}e_1$，得 $e_2^2=3e_1^2$，因此 $\frac{4-1}{4}=3\times\frac{a^2-1}{a^2}$，而 $a>1$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：A

6. 过点 $\left(0,-2\right)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】方法一：根据切线的性质求切线长，结合倍角公式运算求解；方法二：根据切线的性质求切线长，结合余弦定理运算求解；方法三：根据切线结合点到直线的距离公式可得 $k^2+8k+1=0$，利用韦达定理结合夹角公式运算求解.

【详解】方法一：因为 $x^2+y^2-4x-1=0$，即 $\left(x-2\right)^2+y^2=5$，可得圆心 $C\left(2,0\right)$，半径 $r=\sqrt{5}$，

过点 $P\left(0,-2\right)$ 作圆 C 的切线，切点为 A,B，

因为 $\left|PC\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2}=2\sqrt{2}$，则 $\left|PA\right|=\sqrt{\left|PC\right|^2-r^2}=\sqrt{3}$，

可得 $\sin\angle APC=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4},\cos\angle APC=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

则$\sin\angle APB=\sin 2\angle APC=2\sin\angle APC\cos\angle APC=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$\cos\angle APB=\cos 2\angle APC=\cos^2\angle APC-\sin^2\angle APC=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=-\frac{1}{4}<0$，

即$\angle APB$为钝角，

所以$\sin\alpha=\sin\left(\pi-\angle APB\right)=\sin\angle APB=\frac{\sqrt{15}}{4}$；

法二：圆$x^2+y^2-4x-1=0$的圆心$C\left(2,0\right)$，半径$r=\sqrt{5}$，

过点$P\left(0,-2\right)$作圆C的切线，切点为A,B，连接AB，

可得$\left|PC\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2}=2\sqrt{2}$，则$\left|PA\right|=\left|PB\right|=\sqrt{\left|PC\right|^2-r^2}=\sqrt{3}$，

因为$\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2-2\left|PA\right|\cdot\left|PB\right|\cos\angle APB=\left|CA\right|^2+\left|CB\right|^2-2\left|CA\right|\cdot\left|CB\right|\cos\angle ACB$

且$\angle ACB=\pi-\angle APB$，则$3+3-6\cos\angle APB=5+5-10\cos\left(\pi-\angle APB\right)$，

即$3-\cos\angle APB=5+5\cos\angle APB$，解得$\cos\angle APB=-\frac{1}{4}<0$，

即$\angle APB$为钝角，则$\cos\alpha=\cos\left(\pi-\angle APB\right)=-\cos\angle APB=\frac{1}{4}$，

且α为锐角，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$；

方法三：圆$x^2+y^2-4x-1=0$的圆心$C\left(2,0\right)$，半径$r=\sqrt{5}$，

若切线斜率不存在，则切线方程为$y=0$，则圆心到切点的距离$d=2>r$，不合题意；

若切线斜率存在，设切线方程为$y=kx-2$，即$kx-y-2=0$，

则$\frac{\left|2k-2\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，整理得$k^2+8k+1=0$，且$\Delta=64-4=60>0$

设两切线斜率分别为k_1,k_2，则$k_1+k_2=-8,k_1k_2=1$，

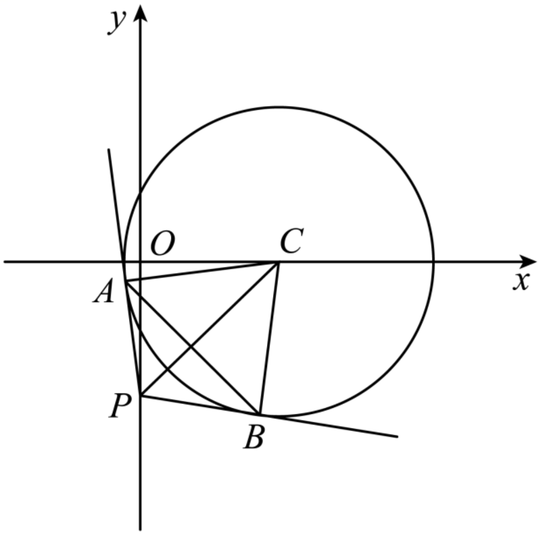
可得$\left|k_1-k_2\right|=\sqrt{\left(k_1+k_2\right)^2-4k_1k_2}=2\sqrt{15}$，

所以$\tan\alpha=\frac{\left|k_1-k_2\right|}{1+k_1k_2}=\sqrt{15}$，即$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}$，可得$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{15}}$，

则$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{15}=1$，

且$\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\alpha>0$，解得$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

故选：B.



7. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列；乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义，再结合数列前n项和与第n项的关系推理判断作答.，

【详解】方法1，甲：$\{a_n\}$为等差数列，设其首项为a_1，公差为d，

则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2},\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，

因此$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，则甲是乙的充分条件；

反之，乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，即$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$为常数，设为$t$，

即$\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$，则$S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$，有$S_{n-1}=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1),n\geq 2$，

两式相减得：$a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn$，即$a_{n+1}-a_n=2t$，对$n=1$也成立，

因此$\{a_n\}$为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件，C 正确.

方法 2，甲：$\{a_n\}$为等差数列，设数列$\{a_n\}$的首项a_1，公差为d，即$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$，

则$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$，因此$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，即甲是乙的充分条件；

反之，乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，即$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = D, \frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)D$，

即$S_n = nS_1 + n(n-1)D$，$S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)D$，

当$n \geq 2$时，上两式相减得：$S_n - S_{n-1} = S_1 + 2(n-1)D$，当$n = 1$时，上式成立，

于是$a_n = a_1 + 2(n-1)D$，又$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nD - [a_1 + 2(n-1)D] = 2D$为常数，

因此$\{a_n\}$为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件.

故选：C

8. 已知$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}, \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{6}$，则$\cos(2\alpha + 2\beta) =$（　　）.

A. $\frac{7}{9}$　　　　B. $\frac{1}{9}$　　　　C. $-\frac{1}{9}$　　　　D. $-\frac{7}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用和角、差角的正弦公式求出$\sin(\alpha + \beta)$，再利用二倍角的余弦公式计算作答.

【详解】因为$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{3}$，而$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{6}$，因此$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}$，

则$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{2}{3}$，

所以$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2(\alpha + \beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

故选：B

【点睛】方法点睛：三角函数求值的类型及方法

（1）“给角求值”：一般所给出的角都是非特殊角，从表面来看较难，但非特殊角与特殊角总有一定关系．解题时，要利用观察得到的关系，结合三角函数公式转化为特殊角的三角函数.

（2）“给值求值”：给出某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，解题关键在于“变角”，使其角相同或具有某种关系.

（3）“给值求角”：实质上也转化为“给值求值”，关键也是变角，把所求角用含已知角的式子表示，由所得的函数值结合该函数的单调区间求得角，有时要压缩角的取值范围.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A. x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意结合平均数、中位数、标准差以及极差的概念逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：设 x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 m，$x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 n，

则 $n-m=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}-\dfrac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}=\dfrac{2\left(x_1+x_6\right)-\left(x_5+x_2+x_3+x_4\right)}{12}$，

因为没有确定 $2\left(x_1+x_6\right),x_5+x_2+x_3+x_4$ 的大小关系，所以无法判断 m,n 的大小，

例如：$1,2,3,4,5,6$，可得 $m=n=3.5$；

例如 $1,1,1,1,1,7$，可得 $m=1,n=2$；

例如 $1,2,2,2,2,2$，可得 $m=2,n=\dfrac{11}{6}$；故 A 错误；

对于选项 B：不妨设 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6$，

可知 x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数均为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}$，故 B 正确；

对于选项 C：因为 x_1 是最小值，x_6 是最大值，

则 x_2,x_3,x_4,x_5 的波动性不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的波动性，即 x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差，

例如：$2,4,6,8,10,12$，则平均数 $n=\dfrac{1}{6}\left(2+4+6+8+10+12\right)=7$，

标准差 $s_1=\sqrt{\frac{1}{6}\left[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(12-7)^2\right]}=\frac{\sqrt{105}}{3}$，

$4,6,8,10$，则平均数 $m=\frac{1}{4}(4+6+8+10)=7$，

标准差 $s_2=\sqrt{\frac{1}{4}\left[(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2\right]}=\sqrt{5}$，

显然 $\frac{\sqrt{105}}{3}>5$，即 $s_1>s_2$；故 C 错误；

对于选项 D：不妨设 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6$，

则 $x_6-x_1\ge x_5-x_2$，当且仅当 $x_1=x_2,x_5=x_6$ 时，等号成立，故 D 正确；

故选：BD.

10. 噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0\left(p_0>0\right)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	$60\sim90$
混合动力汽车	10	$50\sim60$
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 $10\mathrm{m}$ 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）.

A. $p_1\ge p_2$

B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$

D. $p_1\le 100p_2$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意可知 $L_{p_1}\in[60,90],L_{p_2}\in[50,60],L_{p_3}=40$，结合对数运算逐项分析判断.

【详解】由题意可知：$L_{p_1}\in[60,90],L_{p_2}\in[50,60],L_{p_3}=40$，

对于选项 A：可得 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_0}-20\times\lg\frac{p_2}{p_0}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$，

因为$L_{p_1} \ge L_{p_2}$，则$L_{p_1} - L_{p_2} = 20\times\lg\frac{p_1}{p_2} \ge 0$，即$\lg\frac{p_1}{p_2} \ge 0$，

所以$\frac{p_1}{p_2} \ge 1$且$p_1, p_2 > 0$，可得$p_1 \ge p_2$，故A正确；

对于选项B：可得$L_{p_2} - L_{p_3} = 20\times\lg\frac{p_2}{p_0} - 20\times\lg\frac{p_3}{p_0} = 20\times\lg\frac{p_2}{p_3}$，

因为$L_{p_2} - L_{p_3} = L_{p_2} - 40 \ge 10$，则$20\times\lg\frac{p_2}{p_3} \ge 10$，即$\lg\frac{p_2}{p_3} \ge \frac{1}{2}$，

所以$\frac{p_2}{p_3} \ge \sqrt{\mathrm{e}}$且$p_2, p_3 > 0$，可得$p_2 \ge \sqrt{\mathrm{e}}p_3$，

当且仅当$L_{p_2} = 50$时，等号成立，故B错误；

对于选项C：因为$L_{p_3} = 20\times\lg\frac{p_3}{p_0} = 40$，即$\lg\frac{p_3}{p_0} = 2$，

可得$\frac{p_3}{p_0} = 100$，即$p_3 = 100p_0$，故C正确；

对于选项D：由选项A可知：$L_{p_1} - L_{p_2} = 20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$，

且$L_{p_1} - L_{p_2} \le 90 - 50 = 40$，则$20\times\lg\frac{p_1}{p_2} \le 40$，

即$\lg\frac{p_1}{p_2} \le 2$，可得$\frac{p_1}{p_2} \le 100$，且$p_1, p_2 > 0$，所以$p_1 \le 100p_2$，故D正确；

故选：ACD.

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$，则（　　）.

A. $f(0) = 0$　　　　B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$是偶函数　　　　D. $x = 0$为$f(x)$的极小值点

【答案】ABC

【解析】

【分析】方法一：利用赋值法，结合函数奇遇性的判断方法可判断选项ABC，举反例$f(x) = 0$即可排除选项D.

方法二：选项 ABC 的判断与方法一同，对于 D，可构造特殊函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$ 进行判断即可.

【详解】方法一：

因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

对于 A，令 $x=y=0$，$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$，故 A 正确.

对于 B，令 $x=y=1$，$f(1)=1f(1)+1f(1)$，则 $f(1)=0$，故 B 正确.

对于 C，令 $x=y=-1$，$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$，则 $f(-1)=0$，

令 $y=-1,f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于 D，不妨令 $f(x)=0$，显然符合题设条件，此时 $f(x)$ 无极值，故 D 错误.

方法二：

因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

对于 A，令 $x=y=0$，$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$，故 A 正确.

对于 B，令 $x=y=1$，$f(1)=1f(1)+1f(1)$，则 $f(1)=0$，故 B 正确.

对于 C，令 $x=y=-1$，$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$，则 $f(-1)=0$，

令 $y=-1,f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于 D，当 $x^2y^2\neq 0$ 时，对 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ 两边同时除以 x^2y^2，得到 $\dfrac{f(xy)}{x^2y^2}=\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{f(y)}{y^2}$，

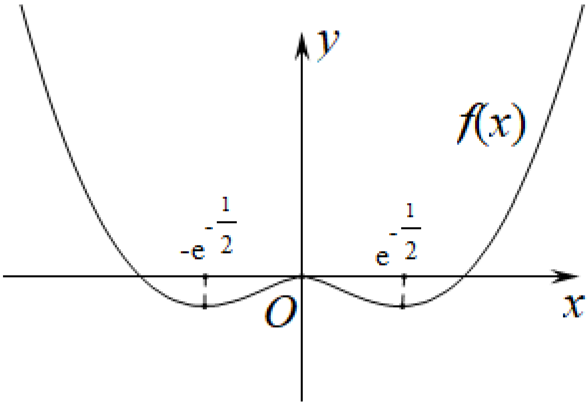
故可以设 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\ln|x|(x\neq 0)$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2\ln x$，则 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$，

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-e^{-\frac{1}{2}},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，



显然，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，故 D 错误.

故选：ABC.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A. 直径为 $0.99\mathrm{m}$ 的球体

B. 所有棱长均为 $1.4\mathrm{m}$ 的四面体

C. 底面直径为 $0.01\mathrm{m}$，高为 $1.8\mathrm{m}$ 的圆柱体

D. 底面直径为 $1.2\mathrm{m}$，高为 $0.01\mathrm{m}$ 的圆柱体

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意结合正方体的性质逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：因为 $0.99\mathrm{m}<1\mathrm{m}$，即球体的直径小于正方体的棱长，

所以能够被整体放入正方体内，故 A 正确；

对于选项 B：因为正方体的面对角线长为 $\sqrt{2}\mathrm{m}$，且 $\sqrt{2}>1.4$，

所以能够被整体放入正方体内，故 B 正确；

对于选项 C：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}\mathrm{m}$，且 $\sqrt{3}<1.8$，

所以不能够被整体放入正方体内，故 C 正确；

对于选项 D：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}\mathrm{m}$，且 $\sqrt{3}>1.2$，

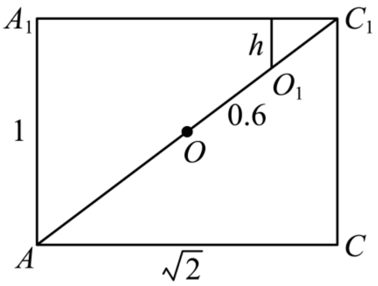
设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O，以 AC_1 为轴对称放置圆柱，设圆柱的底面圆心 O_1 到正方体的表面的最近的距离为 $h\mathrm{m}$，

如图，结合对称性可知：$OC_1=\frac{1}{2}C_1A=\frac{\sqrt{3}}{2},C_1O_1=OC_1-OO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-0.6$，

则 $\frac{h}{AA_1}=\frac{C_1O_1}{C_1A}$，即 $\frac{h}{1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0.6}{\sqrt{3}}$，解得 $h=\frac{1}{2}-\frac{0.6}{\sqrt{3}}>0.34>0.01$，

所以能够被整体放入正方体内，故 D 正确；

故选：ABD.



【点睛】关键点睛：对于 C、D：以正方体的体对角线为圆柱的轴，结合正方体以及圆柱的性质分析判断.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有________种（用数字作答）.

【答案】64

【解析】

【分析】分类讨论选修 2 门或 3 门课，对选修 3 门，再讨论具体选修课的分配，结合组合数运算求解.

【详解】（1）当从 8 门课中选修 2 门，则不同的选课方案共有 $C_4^1C_4^1=16$ 种；

（2）当从 8 门课中选修 3 门，

①若体育类选修课 1 门，则不同的选课方案共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_4^2=24$ 种；

②若体育类选修课 2 门，则不同的选课方案共有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_4^1=24$ 种；

综上所述：不同的选课方案共有 $16+24+24=64$ 种.

故答案为：64.

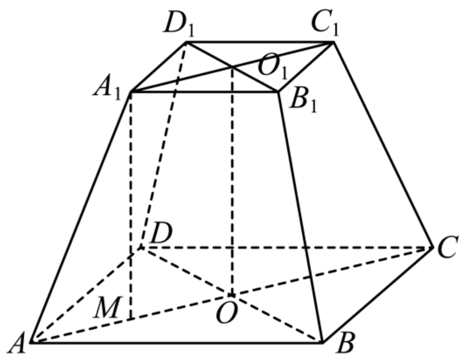
14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, A_1B_1=1, AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为________.

【答案】$\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ##$\frac{7}{6}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】结合图像，依次求得 A_1O_1, AO, A_1M，从而利用棱台的体积公式即可得解.

【详解】如图，过 A_1 作 $A_1M\perp AC$，垂足为 M，易知 A_1M 为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高，



因为 $AB=2, A_1B_1=1, AA_1=\sqrt{2}$，

则 $A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}A_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}AB=\sqrt{2}$，

故 $AM=\frac{1}{2}\left(AC-A_1C_1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $A_1M=\sqrt{A_1A^2-AM^2}=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以所求体积为 $V=\frac{1}{3}\times(4+1+\sqrt{4\times1})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

故答案为：$\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $\left[0,2\pi\right]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是________.

【答案】$[2,3)$

【解析】

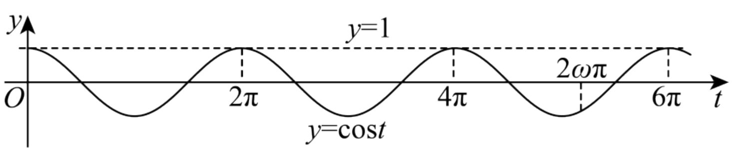
【分析】令 $f(x)=0$，得 $\cos\omega x=1$ 有 3 个根，从而结合余弦函数的图像性质即可得解.

【详解】因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant 2\omega\pi$，

令 $f(x)=\cos\omega x-1=0$，则 $\cos\omega x=1$ 有 3 个根，

令 $t=\omega x$，则 $\cos t=1$ 有 3 个根，其中 $t\in[0,2\omega\pi]$，

结合余弦函数 $y=\cos t$ 的图像性质可得 $4\pi\le 2\omega\pi<6\pi$，故 $2\le\omega<3$，



故答案为：$[2,3)$.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B},\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为________.

【答案】$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】方法一：利用双曲线的定义与向量数积的几何意义得到$|AF_2|,|BF_2|,|BF_1|,|AF_1|$关于$a,m$的表达式，从而利用勾股定理求得$a=m$，进而利用余弦定理得到$a,c$的齐次方程，从而得解.

方法二：依题意设出各点坐标，从而由向量坐标运算求得$x_0=\frac{5}{3}c, y_0=-\frac{2}{3}t$，$t^2=4c^2$，将点A代入双曲线$C$得到关于$a,b,c$的齐次方程，从而得解；

【详解】方法一：

依题意，设$|AF_2|=2m$，则$|BF_2|=3m=|BF_1|,|AF_1|=2a+2m$，

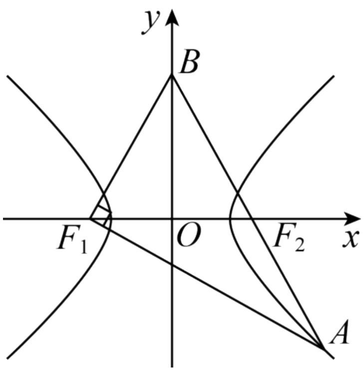
在$\text{Rt}\triangle ABF_1$中，$9m^2+(2a+2m)^2=25m^2$，则$(a+3m)(a-m)=0$，故$a=m$或$a=-3m$（舍去），

所以$|AF_1|=4a,|AF_2|=2a$，$|BF_2|=|BF_1|=3a$，则$|AB|=5a$，

故$\cos\angle F_1AF_2=\frac{|AF_1|}{|AB|}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，

所以在$\triangle AF_1F_2$中，$\cos\angle F_1AF_2=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{2\times 4a\times 2a}=\frac{4}{5}$，整理得$5c^2=9a^2$，

故$e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



方法二:

依题意，得$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，令$A(x_0,y_0),B(0,t)$，

因为$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，所以$(x_0-c,y_0)=-\frac{2}{3}(-c,t)$，则$x_0=\frac{5}{3}c, y_0=-\frac{2}{3}t$，

又$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\left(\frac{8}{3}c,-\frac{2}{3}t\right)(c,t)=\frac{8}{3}c^2-\frac{2}{3}t^2=0$，则$t^2=4c^2$，

又点A在C上，则$\dfrac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\dfrac{\frac{4}{9}t^2}{b^2}=1$，整理得$\dfrac{25c^2}{9a^2}-\dfrac{4t^2}{9b^2}=1$，则$\dfrac{25c^2}{9a^2}-\dfrac{16c^2}{9b^2}=1$，

所以$25c^2b^2-16c^2a^2=9a^2b^2$，即$25c^2\left(c^2-a^2\right)-16a^2c^2=9a^2\left(c^2-a^2\right)$，

整理得$25c^4-50c^2+9a^4=0$，则$\left(5c^2-9a^2\right)\left(5c^2-a^2\right)=0$，解得$5c^2=9a^2$或$5c^2=a^2$，

又$e>1$，所以$e=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$或$e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$（舍去），故$e=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】关键点睛：双曲线过焦点的三角形的解决关键是充分利用双曲线的定义，结合勾股定理与余弦定理得到关于a,b,c的齐次方程，从而得解.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C,2\sin\left(A-C\right)=\sin B$.

（1）求$\sin A$；

（2）设$AB=5$，求AB边上的高.

【答案】（1）$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

（2）6

【解析】

【分析】（1）根据角的关系及两角和差正弦公式，化简即可得解；

（2）利用同角之间的三角函数基本关系及两角和的正弦公式求$\sin B$,再由正弦定理求出b，根据等面积法求解即可.

【小问1详解】

$\because A+B=3C$，

$\therefore \pi-C=3C$，即$C=\dfrac{\pi}{4}$，

又$2\sin(A-C)=\sin B=\sin(A+C)$，

$\therefore 2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A\cos C=3\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A=3\cos A$，

即 $\tan A=3$，所以 $0<A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin A=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$\cos A=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

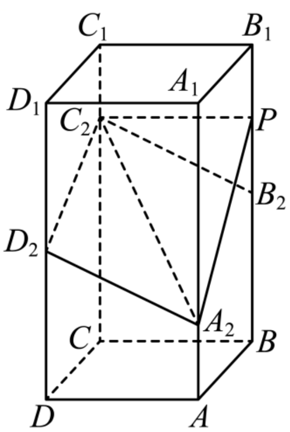
由 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由正弦定理，$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$，

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，

$\therefore h=b\cdot\sin A=2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

18. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AA_1=4$. 点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别在棱 AA_1,BB_1,CC_1, DD_1 上，$AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$.



（1）证明：$B_2C_2 /\!/ A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 B_2P.

【答案】（1）证明见解析；

（2）1

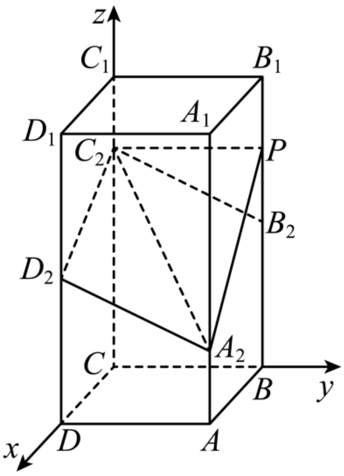
【解析】

【分析】（1）建立空间直角坐标系，利用向量坐标相等证明；

（2）设 $P(0,2,\lambda)(0\le\lambda\le4)$，利用向量法求二面角，建立方程求出 λ 即可得解.

【小问 1 详解】

以 C 为坐标原点，CD,CB,CC_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图，



则 $C(0,0,0),C_2(0,0,3),B_2(0,2,2),D_2(2,0,2),A_2(2,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1),\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2}/\!/\overrightarrow{A_2D_2}$，

又 B_2C_2，A_2D_2 不在同一条直线上，

$\therefore B_2C_2/\!/A_2D_2$.

【小问 2 详解】

设 $P(0,2,\lambda)(0\le\lambda\le4)$，

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2),\overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-\lambda),\overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$，

设平面 PA_2C_2 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC_2}=-2y+(3-\lambda)z=0\end{cases}$，

令 $z=2$，得 $y=3-\lambda,x=\lambda-1$，

$\therefore \vec{n}=(\lambda-1,3-\lambda,2)$，

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量 $\overrightarrow{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2a-2b+2c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{D_2C_2}=-2a+c=0\end{cases}$，

令 $a=1$，得$b=1,c=2$，

$\therefore \vec{m}=(1,1,2)$，

$\therefore \left|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{4+(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2}}=|\cos150^\circ|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

化简可得，$\lambda^2-4\lambda+3=0$，

解得$\lambda=1$或$\lambda=3$，

$\therefore P(0,2,1)$或$P(0,2,3)$，

$\therefore B_2P=1$.

19. 已知函数$f(x)=a\left(e^x+a\right)-x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）证明：当$a>0$时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先求导，再分类讨论$a\le0$与$a>0$两种情况，结合导数与函数单调性的关系即可得解；

（2）方法一：结合（1）中结论，将问题转化为$a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$的恒成立问题，构造函数$g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$，利用导数证得$g(a)>0$即可.

方法二：构造函数$h(x)=e^x-x-1$，证得$e^x\ge x+1$，从而得到$f(x)\ge x+\ln a+1+a^2-x$，进而将问题转化为$a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$的恒成立问题，由此得证.

【小问1详解】

因为$f(x)=a\left(e^x+a\right)-x$，定义域为R，所以$f'(x)=ae^x-1$，

当$a\le0$时，由于$e^x>0$，则$ae^x\le0$，故$f'(x)=ae^x-1<0$恒成立，

所以$f(x)$在R上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=ae^{x}-1=0$，解得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增；

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

方法一：

由（1）得，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a\left(e^{-\ln a}+a\right)+\ln a=1+a^{2}+\ln a$，

要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $1+a^{2}+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $a^{2}-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立，

令 $g(a)=a^{2}-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$，则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^{2}-1}{a}$，

令 $g'(a)<0$，则 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，则 $g(a)>0$ 恒成立，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立，证毕.

方法二：

令 $h(x)=e^{x}-x-1$，则 $h'(x)=e^{x}-1$，

由于 $y=e^{x}$ 在 R 上单调递增，所以 $h'(x)=e^{x}-1$ 在 R 上单调递增，

又 $h'(0)=e^{0}-1=0$，

所以当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\ge h(0)=0$，则 $e^{x}\ge x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

因为 $f(x)=a\left(e^{x}+a\right)-x=ae^{x}+a^{2}-x=e^{x+\ln a}+a^{2}-x\ge x+\ln a+1+a^{2}-x$，

当且仅当 $x+\ln a=0$，即 $x=-\ln a$ 时，等号成立，

所以要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $x+\ln a+1+a^2-x>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$，

令 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$，则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令 $g'(a)<0$，则 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，则 $g(a)>0$ 恒成立，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立，证毕.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n,T_n 分别为数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和.

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3,S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

【答案】（1）$a_n=3n$

（2）$d=\frac{51}{50}$

【解析】

【分析】（1）根据等差数列的通项公式建立方程求解即可;

（2）由 $\{b_n\}$ 为等差数列得出 $a_1=d$ 或 $a_1=2d$，再由等差数列的性质可得 $a_{50}-b_{50}=1$，分类讨论即可得解.

【小问 1 详解】

$\because 3a_2=3a_1+a_3$，$\therefore 3d=a_1+2d$，解得 $a_1=d$，

$\therefore S_3=3a_2=3(a_1+d)=6d$，

又 $T_3=b_1+b_2+b_3=\frac{2}{d}+\frac{6}{2d}+\frac{12}{3d}=\frac{9}{d}$，

$\therefore S_3+T_3=6d+\frac{9}{d}=21$，

即 $2d^2-7d+3=0$，解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$（舍去），

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 3n$.

【小问 2 详解】

$\because \{b_n\}$ 为等差数列，

$\therefore 2b_2 = b_1 + b_3$，即 $\frac{12}{a_2} = \frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3}$，

$\therefore 6(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}) = \frac{6d}{a_2a_3} = \frac{1}{a_1}$，即 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$，解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$，

$\because d > 1$，$\therefore a_n > 0$，

又 $S_{99} - T_{99} = 99$，由等差数列性质知，$99a_{50} - 99b_{50} = 99$，即 $a_{50} - b_{50} = 1$，

$\therefore a_{50} - \frac{2550}{a_{50}} = 1$，即 $a_{50}^2 - a_{50} - 2550 = 0$，解得 $a_{50} = 51$ 或 $a_{50} = -50$（舍去）

当 $a_1 = 2d$ 时，$a_{50} = a_1 + 49d = 51d = 51$，解得 $d = 1$，与 $d > 1$ 矛盾，无解；

当 $a_1 = d$ 时，$a_{50} = a_1 + 49d = 50d = 51$，解得 $d = \frac{51}{50}$.

综上，$d = \frac{51}{50}$.

21. 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \cdots, n$，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

【答案】（1）0.6

（2）$\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$

（3）$E(Y) = \frac{5}{18}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据全概率公式即可求出；

（2）设$P\left(A_i\right)=p_i$，由题意可得$p_{i+1}=0.4p_i+0.2$，根据数列知识，构造等比数列即可解出；

（3）先求出两点分布的期望，再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出.

【小问 1 详解】

记“第 i 次投篮的人是甲”为事件A_i，“第 i 次投篮的人是乙”为事件B_i，

所以，$P\left(B_2\right)=P\left(A_1B_2\right)+P\left(B_1B_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(B_2\mid A_1\right)+P\left(B_1\right)P\left(B_2\mid B_1\right)$

$=0.5\times\left(1-0.6\right)+0.5\times0.8=0.6$.

【小问 2 详解】

设$P\left(A_i\right)=p_i$，依题可知，$P\left(B_i\right)=1-p_i$，则

$P\left(A_{i+1}\right)=P\left(A_iA_{i+1}\right)+P\left(B_iA_{i+1}\right)=P\left(A_i\right)P\left(A_{i+1}\mid A_i\right)+P\left(B_i\right)P\left(A_{i+1}\mid B_i\right)$，

即$p_{i+1}=0.6p_i+\left(1-0.8\right)\times\left(1-p_i\right)=0.4p_i+0.2$，

构造等比数列$\left\{p_i+\lambda\right\}$，

设$p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}\left(p_i+\lambda\right)$，解得$\lambda=-\frac{1}{3}$，则$p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_i-\frac{1}{3}\right)$，

又$p_1=\frac{1}{2},p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以$\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$是首项为$\frac{1}{6}$，公比为$\frac{2}{5}$的等比数列，

即$p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1},p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

【小问 3 详解】

因为$p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$，$i=1,2,\cdots,n$，

所以当$n\in\mathrm{N}^*$时，$E\left(Y\right)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$，

故$E(Y)=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$.

【点睛】本题第一问直接考查全概率公式的应用，后两问的解题关键是根据题意找到递推式，然后根据数列的基本知识求解.

22. 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W .

（1）求 W 的方程；

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

【答案】（1） $y=x^2+\frac{1}{4}$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）设 $P(x,y)$ ，根据题意列出方程 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y^2$ ，化简即可；

（2）法一：设矩形的三个顶点 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right),B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right),C\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$ ，且 $a<b<c$ ，分别令 $k_{AB}=a+b=m<0$ ， $k_{BC}=b+c=n>0$ ，且 $mn=-1$ ，利用放缩法得 $\frac{1}{2}C\geq\left(n+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$ ，设函数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1+x^2\right)$ ，利用导数求出其最小值，则得 C 的最小值，再排除边界值即可.

法二：设直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4}$ ，将其与抛物线方程联立，再利用弦长公式和放缩法得 $|AB|+|AD|\geq\sqrt{\frac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$ ，利用换元法和求导即可求出周长最值，再排除边界值即可.

法三：利用平移坐标系法，再设点，利用三角换元再对角度分类讨论，结合基本不等式即可证明.

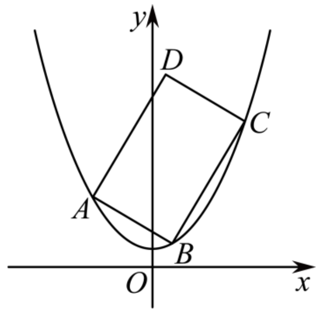
【小问 1 详解】

设 $P(x,y)$,则 $|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$ ，两边同平方化简得 $y=x^2+\frac{1}{4}$ ，

故 $W:y=x^2+\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

法一：设矩形的三个顶点 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right),B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right),C\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$ 在 W 上,且 $a<b<c$ ，易知矩形四条边所在直线的斜率均存在，且不为 0，



则 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1, a+b<b+c$,令 $k_{AB}=\dfrac{b^2+\frac{1}{4}-\left(a^2+\frac{1}{4}\right)}{b-a}=a+b=m<0$，

同理令 $k_{BC}=b+c=n>0$，且 $mn=-1$，则 $m=-\dfrac{1}{n}$，

设矩形周长为 C ,由对称性不妨设 $|m|\geq|n|$， $k_{BC}-k_{AB}=c-a=n-m=n+\dfrac{1}{n}$，

则 $\dfrac{1}{2}C=|AB|+|BC|=(b-a)\sqrt{1+m^2}+(c-b)\sqrt{1+n^2}\geq(c-a)\sqrt{1+n^2}=\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$. $n>0$，易知 $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}>0$

则令 $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+x^2\right), x>0, f'(x)=2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时， $f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$， $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，

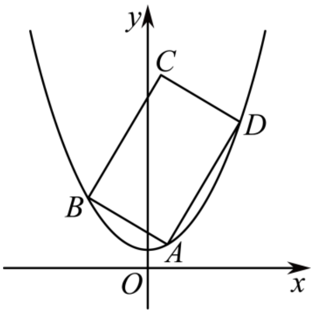
则 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$，

故 $\dfrac{1}{2}C\geq\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,即 $C\geq3\sqrt{3}$.

当 $C=3\sqrt{3}$ 时, $n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, m=-\sqrt{2}$,且 $(b-a)\sqrt{1+m^2}=(b-a)\sqrt{1+n^2}$，即 $m=n$ 时等号成立，矛盾，故 $C>3\sqrt{3}$，

得证.

法二：不妨设 A,B,D 在 W 上，且 $BA\perp DA$，



依题意可设 $A\left(a,a^2+\dfrac{1}{4}\right)$，易知直线 BA，DA 的斜率均存在且不为 0，

则设 BA，DA 的斜率分别为 k 和 $-\dfrac{1}{k}$，由对称性，不妨设 $|k|\le 1$，

直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4}$，

则联立 $\begin{cases} y=x^2+\dfrac{1}{4} \\ y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4} \end{cases}$ 得 $x^2-kx+ka-a^2=0$，

$\Delta=k^2-4\left(ka-a^2\right)=\left(k-2a\right)^2>0$，则 $k\ne 2a$

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|$，

同理 $|AD|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$，

$\therefore |AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$

$\ge\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)\ge\sqrt{1+k^2}\left|k+\dfrac{1}{k}\right|=\sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$

令 $k^2=m$，则 $m\in(0,1]$，设 $f(m)=\dfrac{(m+1)^3}{m}=m^2+3m+\dfrac{1}{m}+3$，

则 $f'(m)=2m+3-\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，令 $f'(m)=0$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$，

当 $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f'(m)<0$，此时 $f(m)$ 单调递减，

当 $m\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(m)>0$，此时 $f(m)$ 单调递增，

则 $f(m)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$,

$\therefore |AB|+|AD|\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

但 $\sqrt{1+k^2}|k-2a|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geq\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\right)$，此处取等条件为 $k=1$，与最终取等时 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不一致，故 $\left|AB\right|+\left|AD\right|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

法三：为了计算方便,我们将抛物线向下移动 $\frac{1}{4}$ 个单位得抛物线 $W^{'}:y=x^2$,

矩形 $ABCD$ 变换为矩形 $A'B'C'D'$,则问题等价于矩形 $A'B'C'D'$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

设 $B^{'}\left(t_0,t_0^2\right),A^{'}\left(t_1,t_1^2\right),C^{'}\left(t_2,t_2^2\right)$, 根据对称性不妨设 $t_0\geq0$.

则 $k_{A^{'}B^{'}}=t_1+t_0,k_{B^{'}C^{'}}=t_2+t_0$, 由于 $A'B'\perp B'C'$, 则 $\left(t_1+t_0\right)\left(t_2+t_0\right)=-1$.

由于 $\left|A^{'}B^{'}\right|=\sqrt{1+\left(t_1+t_0\right)^2}\left|t_1-t_0\right|,\left|B^{'}C^{'}\right|=\sqrt{1+\left(t_2+t_0\right)^2}\left|t_2-t_0\right|$, 且 t_0 介于 t_1,t_2 之间,

则 $\left|A^{'}B^{'}\right|+\left|B^{'}C^{'}\right|=\sqrt{1+\left(t_1+t_0\right)^2}\left|t_1-t_0\right|+\sqrt{1+\left(t_2+t_0\right)^2}\left|t_2-t_0\right|$. 令 $t_2+t_0=\tan\theta$,

$t_1+t_0=-\cot\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $t_2=\tan\theta-t_0,t_1=-\cot\theta-t_0$,从而

$$\left|A^{'}B^{'}\right|+\left|B^{'}C^{'}\right|=\sqrt{1+\cot^2\theta}\left(2t_0+\cot\theta\right)+\sqrt{1+\tan^2\theta}\left(\tan\theta-2t_0\right)$$

故 $\left|A^{'}B^{'}\right|+\left|B^{'}C^{'}\right|=2t_0\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2t_0(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

①当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,

$$\left|A^{'}B^{'}\right|+\left|B^{'}C^{'}\right|\geq\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\geq2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}=2\sqrt{\frac{2}{\sin2\theta}}\geq2\sqrt{2}$$

②当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,由于 $t_1<t_0<t_2$,从而 $-\cot\theta-t_0<t_0<\tan\theta-t_0$,

从而 $-\frac{\cot\theta}{2}<t_0<\frac{\tan\theta}{2}$ 又 $t_0\geq0$,

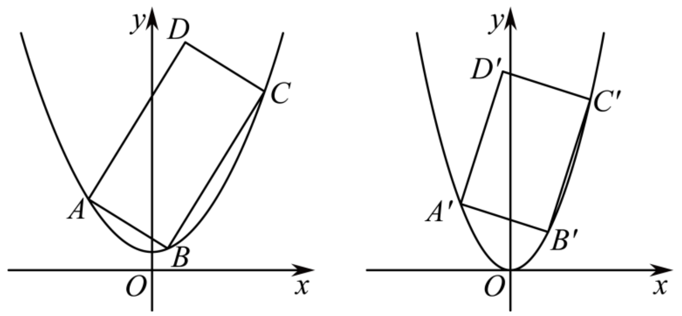
故 $0\leq t_0<\frac{\tan\theta}{2}$,由此 $\left|A^{'}B^{'}\right|+\left|B^{'}C^{'}\right|=\frac{2t_0(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$$
> \frac{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^3\theta}+\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}
$$

$$
=\sqrt{\frac{2}{\sin^2\theta\sin^2\theta\cdot 2\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{2}{\left(1-\cos^2\theta\right)\left(1-\cos^2\theta\right)\cdot 2\cos^2\theta}}
$$

$$
\geq\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(1-\cos^2\theta\right)+2\cos^2\theta}{3}\right)^3}}\geq\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},
$$

当且仅当$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立，故$\left|A'B'\right|+\left|B'C'\right|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故矩形周长大于$3\sqrt{2}$.



.

【点睛】关键点睛：本题的第二个的关键是通过放缩得$\frac{1}{2}C=|AB|+|BC|\geq\left(n+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$，同时为了简便运算，对右边的式子平方后再设新函数求导，最后再排除边界值即可.