2004年四川高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（A）

一、选择题：

(1) 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in R,y\in R\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in R,y\in R\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)函数 $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是（　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

(3)设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2=-6,\ a_8=6$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则（　）

A. $S_4<S_5$　　B. $S_4=S_5$　　C. $S_6<S_5$　　D. $S_6=S_5$

(4)圆 $x^2+y^2-4x=0$ 在点 $P(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程是（　）

A. $x+\sqrt{3}y-2=0$　　B. $x+\sqrt{3}y-4=0$　　C. $x-\sqrt{3}y+4=0$　　D. $x-\sqrt{3}y+2=0$

(5)函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ 的定义域是（　）

A. $[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$　　B. $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$　　C. $[-2,-1)\cup(1,2]$　　D. $(-2,-1)\cup(1,2)$

(6)设复数 z 的幅角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$，虚部为 $\sqrt{3}$，则 $z^2=$（　）

A. $-2-2\sqrt{3}i$　　B. $-2\sqrt{3}-2i$　　C. $2+2\sqrt{3}i$　　D. $2\sqrt{3}+2i$

(7)设双曲线的焦点在 x 轴上，两条渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，则双曲线的离心率 $e=$（　）

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

(8)不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为（　）

A. $(0,2)$　　B. $(-2,0)\cup(2,4)$　　C. $(-4,0)$　　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

(9)正三棱柱的底面边长为2，侧面均为直角三角形，则此三棱柱的体积为（　）

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

(10)在 ΔABC 中，$AB=3,BC=\sqrt{13},AC=4$，则边 AC 上的高为（　）

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

(11)设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & x<1\\ 4-\sqrt{x-1} & x\geq 1\end{cases}$，则使得 $f(x)\geq 1$ 的自变量 x 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty,-2]\cup[0,10]$　　B. $(-\infty,-2]\cup[0,1]$　　C. $(-\infty,-2]\cup[1,10]$　　D. $[-2,0]\cup[1,10]$

(12)4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分配方案共有（　）

A. 12　种　　B. 24　种　　C　36　种　　D. 48　种

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

(13)用平面 α 截半径为 R 的球，如果球心到截面的距离为 $\frac{R}{2}$，那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为__________.

(14)函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的最小值为__________.

(15)已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3^x-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$___

(16)设 P 为曲线 $y^2=4(x-1)$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为__________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.　解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(17)（本小题满分 12 分）已知 α 为锐角，且 $tg\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值.

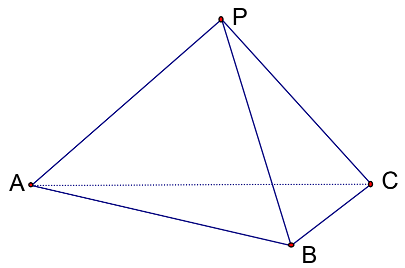
(18)（本小题满分 12 分）解方程 $4^x+|1-2^x|=11$.

⒆（本小题满分 12 分）某村计划建造一个室内面积为 800m^2的矩形蔬菜温室．在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留1m宽的通道，沿前侧内墙保留 3m 宽的空地．当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？

⒇（本小题满分 12 分）三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，侧面 PAC 与底面 ABC 垂直，$PA=PB=PC=3$.

(1)求证 $AB\perp BC$;

(II)如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$，求 AC 与侧面 PAC 所成角的大小．



(21) (本小题满分 12 分)设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ $(c>0)$，且椭圆上存在点 P，使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直．

(I)求实数 m 的取值范围．

(II)设 l 是相应于焦点 F_2 的准线，直线 PF_2 与 l 相交于点 Q. 若 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，求直线 PF_2 的方程.

(22)（本小题满分 14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足：$S_n=2a_n+(-1)^n, n\geqslant 1$.

(1)写出求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1, a_2, a_3；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3)证明：对任意的整数 $m>4$，有 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$.

2004 年高考试题全国卷 3

参考答案

一、选择题：

1.B	2.C	3.B	4.D	5.A	6.A
7.C	8.D	9.C	10.B	11.C	12.C

二、填空题：

13、3:16　　14、1　　.　15、-3　　16、$\sqrt{5}$

三、解答题：

17.解：$\because tg\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha$ 为锐角　$\therefore \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha(2\cos^2\alpha-1)}{2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

18.解：当 $x\leqslant 0$ 时，有：$4^x+1-2^x=11$

化简得：$(2^x)^2-2^x-10=0$

解之得：$2^x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$ 或 $2^x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}$（舍去）.

又∵$x\leqslant 0$ 得 $2^x\leqslant 1$，故 $2^x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$ 不可能舍去.

当 $x<0$ 时，有：$4^x-1+2^x=11$

化简得：$(2^x)^2+2^x-12=0$

解之得：$2^x=3$ 或 $2^x=-4$（舍去）

∴$2^x=3$　$x=\log_2 3$

综上可得原方程的解为 $x=\log_2 3$.

19. 解：设温室的长为 xm，则宽为 $\dfrac{800}{x}m$，由已知得蔬菜的种植面积 S 为：

$$S=(x-2)(\frac{800}{x}-4)=800-4x-\frac{1600}{x}+8$$

$$=808-4(x+\frac{400}{x})\leq 648$$（当且仅当 $x=\dfrac{400}{x}$ 即 $x=20$ 时，取“＝”）.

故：当温室的长为 $20m$，宽为 $40m$ 时，蔬菜的种植面积最大，最大面积为 $648m^2$.

20. ⑴证明：取 AC 中点 O，连结 PO、BO.

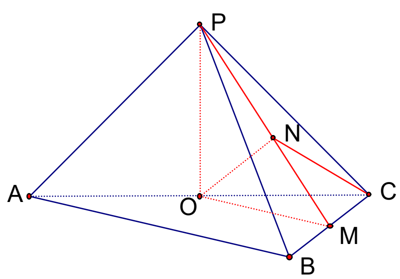
∵$PA=PC$　∴$PO\perp AC$

又∵侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC

∴$PO\perp$ 底面 ABC

又 $PA=PB=PC$　∴$AO=BO=CO$

∴$\triangle ABC$ 为直角三角形　∴$AB\perp BC$



⑵解：取 BC 的中点为 M，连结 OM, PM，所以有 $OM=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，$AO=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

$$\therefore PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{3}$$

由⑴有 $PO\perp$ 平面 ABC, $OM\perp BC$，由三垂线定理得 $PM\perp BC$

∴平面 POM⊥平面 PBC，又∵ $PO=OM=\sqrt{3}$.

∴△POM 是等腰直角三角形，取 PM 的中点 N，连结 ON, NC

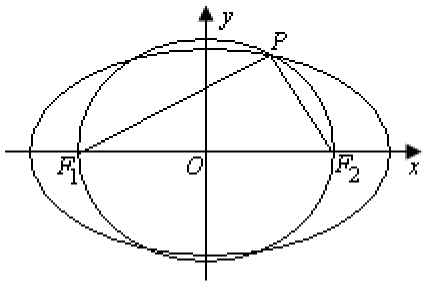
则 ON⊥PM, 又∵平面 POM⊥平面 PBC, 且交线是 PM, ∴ON⊥平面 PBC

∴∠ONC 即为 AC 与平面 PBC 所成的角.

$$ON=\frac{1}{2}PM=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},OC=\sqrt{6}$$

$$\therefore \sin\angle ONC=\frac{ON}{OC}=\frac{1}{2}\quad \therefore \angle ONC=\frac{\pi}{6}.$$

故 AC 与平面 PBC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.



21. 解：⑴∵直线 PF_1⊥直线 PF_2

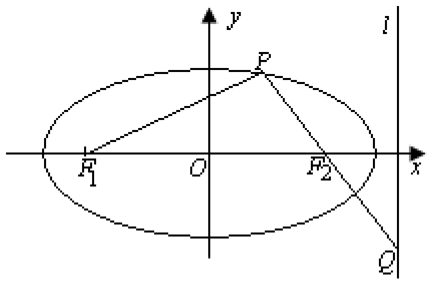
∴以 O 为圆心以 c 为半径的圆：$x^2+y^2=c^2$ 与椭圆：

$\frac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 有交点. 即 $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ \frac{x^2}{m+1}+y^2=1 \end{cases}$ 有解

又∵ $c^2=a^2-b^2=m+1-1=m>0$

$$\therefore 0\le x^2=\frac{m^2-1}{m}<a^2=m+1 \quad \therefore m\ge 1$$

⑵设 $P(x, y)$，直线 PF_2 方程为：$y=k(x-c)$



∵直线 l 的方程为：$x=\frac{a^2}{c}=\frac{m+1}{\sqrt{m}}$

∴点 Q 的坐标为（$\frac{m+1}{\sqrt{m}},\frac{k}{\sqrt{m}}$）

∵ $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$ ∴点 P 分有向线段 $\overline{QF_2}$ 所成比为 $3-\sqrt{3}$

∵ $F_2(\sqrt{m}, 0)$, Q（$\frac{m+1}{\sqrt{m}},\frac{k}{\sqrt{m}}$） ∴ $P(\frac{(4-\sqrt{3})m+1}{(4-\sqrt{3})\sqrt{m}},\frac{k}{(4-\sqrt{3})\sqrt{m}})$

∵点 P 在椭圆上 $\therefore \frac{(\frac{(4-\sqrt{3})m+1}{(4-\sqrt{3})\sqrt{m}})^2}{m+1}+(\frac{k}{(4-\sqrt{3})\sqrt{m}})^2=1$

$\therefore k=\pm\sqrt{\dfrac{(11-6\sqrt{3})m-1}{m+1}}$

直线 PF_2 的方程为：$y=\pm\sqrt{\dfrac{(11-6\sqrt{3})m-1}{m+1}}$（$x-\sqrt{m}$）.

22. 解：⑴当 $n=1$ 时，有：$S_1=a_1=2a_1+(-1)\Rightarrow a_1=1$；

当 $n=2$ 时，有：$S_2=a_1+a_2=2a_2+(-1)^2\Rightarrow a_2=0$；

当 $n=3$ 时，有：$S_3=a_1+a_2+a_3=2a_3+(-1)^3\Rightarrow a_3=2$；

综上可知 $a_1=1, a_2=0, a_3=2$；

⑵由已知得：$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n+(-1)^n-2a_{n-1}-(-1)^{n-1}$

化简得：$a_n=2a_{n-1}+2(-1)^{n-1}$

上式可化为：$a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n=2[a_{n-1}+\dfrac{2}{3}(-1)^{n-1}]$

故数列{$a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n$}是以 $a_1+\dfrac{2}{3}(-1)^1$ 为首项，公比为 2 的等比数列.

故 $a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n=\dfrac{1}{3}2^{n-1}$ $\qquad\therefore a_n=\dfrac{1}{3}\bullet 2^{n-1}-\dfrac{2}{3}(-1)^n=\dfrac{2}{3}[2^{n-2}-(-1)^n]$

数列{a_n}的通项公式为：$a_n=\dfrac{2}{3}[2^{n-2}-(-1)^n]$.

⑶由已知得：$\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_m}=\dfrac{3}{2}[\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{m-2}-(-1)^m}]$

$$=\frac{3}{2}[\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{63}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}-(-1)^m}]$$

$$=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\cdots]$$

$$<\frac{1}{2}[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{4}{3}+\frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{2^{m-5}})}{1-\frac{1}{2}}]=\frac{1}{2}[\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\bullet\frac{1}{2^{m-5}}]$$

$$=\frac{13}{15}-\frac{1}{5}\bullet(\frac{1}{2})^{m-5}<\frac{13}{15}=\frac{104}{120}<\frac{105}{120}=\frac{7}{8}.$$

故 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_m}<\dfrac{7}{8}$（$m>4$）.