2003 年北京高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1．（5 分）设集合 $A=\{x\mid x^{2}-1>0\}$，$B=\{x\mid \log_{2}x>0\}$，则 $A\bigcap B$ 等于(　　)

A．$\{x\mid x>1\}$　　B．$\{x\mid x>0\}$　　C．$\{x\mid x<-1\}$　　D．$\{x\mid x>1$ 或 $x<-1\}$

2．（5 分）设 $y_{1}=4^{0.9}$，$y_{2}=8^{0.48}$，$y_{3}=(\frac{1}{2})^{-1.5}$，则(　　)

A．$y_{3}>y_{1}>y_{2}$　　B．$y_{2}>y_{1}>y_{3}$　　C．$y_{1}>y_{2}>y_{3}$　　D．$y_{1}>y_{3}>y_{2}$

3．（5 分）“$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$”的(　　)

A．必要非充分条件　　B．充分非必要条件

C．充分必要条件　　D．既非充分又非必要条件

4．（5 分）已知 α，β 是平面，m，n 是直线，下列命题中不正确的是(　　)

A．若 $m//\alpha$，$\alpha\bigcap\beta=n$，则 $m//n$　　B．若 $m//n$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C．若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D．若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

5．（5 分）极坐标方程 $\rho^{2}\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线是(　　)

A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．双曲线

6．（5 分）若 $z\in C$，且 $|z+2-2i|=1$，则 $|z-2-2i|$ 的最小值是(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．（5 分）如果圆台的母线与底面成 60° 角，那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为(　　)

A．2π　　B．$\frac{3}{2}\pi$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D．$\frac{1}{2}\pi$

8．（5 分）从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种在不同土质的三块土地上，其中黄瓜必须种植．不同的种植方法共有(　　)

A．24 种　　B．18 种　　C．12 种　　D．6 种

9．（5 分）若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\dfrac{3^{-n}+2^{-n}+(-1)^n(3^{-n}-2^{-n})}{2}$， $n=1$，2，…，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ 等于(　　)

A． $\dfrac{11}{24}$　　B． $\dfrac{17}{24}$　　C． $\dfrac{19}{24}$　　D． $\dfrac{25}{24}$

10．（5 分）某班试用电子投票系统选举班干部候选人．全班 k 名同学都有选举权和被选举权，他们的编号分别为 1，2，…，k，规定：同意按“1”，不同意（含弃权）按“0”，令 $a_{ij}=\begin{cases}1,\text{第}i\text{号同学同意第}j\text{号同学当选}.\\0,\text{第}i\text{号同学不同意第}j\text{号同学当选}.\end{cases}$ 其中 $i=1$，2，…，k，且 $j=1$，2，…，k，则同时同意第 1，2 号同学当选的人数为(　　)

A． $a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2k}$

B． $a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{k1}+a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{k2}$

C． $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\ldots+a_{k1}a_{k2}$

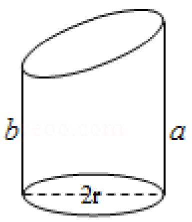
D． $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\ldots+a_{1k}a_{2k}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上.

11．（4 分）函数 $f(x)=lg(1+x^2)$，$g(x)=\begin{cases}x+2 & x<-1\\0 & |x|\leqslant 1\\-x+2 & x>1.\end{cases}$，$h(x)=\tan 2x$ 中，______是偶函数．

12．（4 分）已知双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，则以双曲线左顶点为顶点，右焦点为焦点的抛物线方程为______．

13．（4 分）如图，已知底面半径为 r 的圆柱被一个平面所截，剩下部分母线长的最大值为 a，最小值为 b，那么圆柱被截后剩下部分的体积是______．



14．（4 分）将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆形，要使正方形与圆的面积之和最小，正方形的周长应为______．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 84 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（13 分）已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

16．（13 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=2$， $a_1+a_2+a_3=12$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

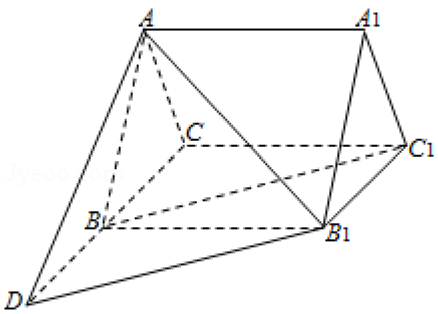
（2）令 $b_n=a_nx^n(x\in R)$，求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17．（15 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 3 的正三角形，侧棱 AA_1 垂直于底面 ABC， $AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， D 是 CB 延长线上一点，且 $BD=BC$.

（1）求证：直线 $BC_1//$ 平面 AB_1D；

（2）求二面角 B_1-AD-B 的大小；

（3）求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积.



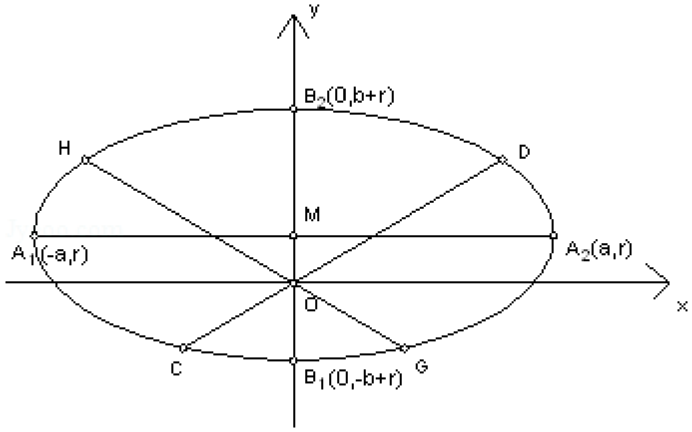
18．（15 分）如图，已知椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行，短轴 B_1B_2 在 y 轴上，中心 $M(0$，$r)(b>r>0$

（Ⅰ）写出椭圆方程并求出焦点坐标和离心率；

（Ⅱ）设直线 $y=k_1x$ 与椭圆交于 $C(x_1$， $y_1)$， $D(x_2$， $y_2)(y_2>0)$，直线 $y=k_2x$ 与椭圆次于 $G(x_3$， $y_3)$， $H(x_4$， $y_4)(y_4>0)$. 求证： $\frac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{k_1x_3x_4}{x_3+x_4}$；

（Ⅲ）对于（Ⅱ）中的在 C， D， G， H，设 CH 交 x 轴于 P 点， GD 交 x 轴于 Q 点，求证： $|OP|=|OQ|$

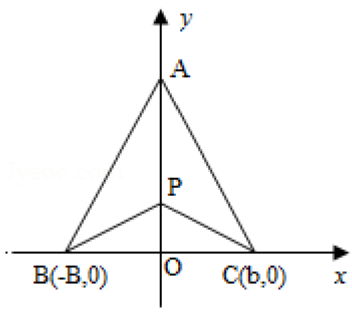
（证明过程不考虑 CH 或 GD 垂直于 x 轴的情形）



19．（14 分）有三个新兴城镇分别位于 A 、 B 、 C 三点处，且 $AB=AC=a$ ， $BC=2b$ ，今计划合建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处（建立坐标系如图）.

（Ⅰ）若希望点 P 到三镇距离的平方和最小，则 P 应位于何处？

（Ⅱ）若希望点 P 到三镇的最远距离为最小，则 P 应位于何处？



20．（14 分）设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1，1]$ 上的函数，且满足条件，① $f(-1)=f$ （1） $=0$ ，②对任意的 u 、 $v\in[-1，1]$ ，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$

（Ⅰ）证明：对任意 $x\in[-1，1]$ ，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$

（Ⅱ）证明：对任意的 u ， $v\in[-1，1]$ 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$

（Ⅲ）在区间 $[-1，1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$ 且使得 $\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|\ uv\in[0,\dfrac{1}{2}]\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|\ uv\in[\dfrac{1}{2},1]\end{cases}$ ；若存在请举一例，若不存在，请说明理由.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1.（5 分）设集合 $A=\{x\,|\,x^2-1>0\}$， $B=\{x\,|\,\log_2 x>0\,|\}$，则 $A\bigcap B$ 等于(　　)

A. $\{x\,|\,x>1\}$　　B. $\{x\,|\,x>0\}$　　C. $\{x\,|\,x<-1\}$　　D. $\{x\,|\,x>1$ 或 $x<-1\}$

【解答】解：根据题意：集合 $A=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>1\}$，集合 $B=\{x\,|\,x>1\}$

$\therefore A\bigcap B=\{x\,|\,x>1\}$.

故选：A.

2.（5 分）设 $y_1=4^{0.9}$， $y_2=8^{0.48}$， $y_3=(\dfrac{1}{2})^{-1.5}$，则(　　)

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_2>y_1>y_3$　　C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

【解答】解： $y_1=4^{0.9}=2^{2\times0.9}=2^{1.8}$， $y_2=8^{0.48}=2^{3\times0.48}=2^{1.44}$， $y_3=(\dfrac{1}{2})^{-1.5}=2^{1.5}$.

因为函数 $y=2^x$ 在定义域上为单调递增函数，所以 $y_1>y_3>y_2$.

故选：D.

3.（5 分）“$\cos2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\in Z$”的(　　)

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

【解答】解：由 $\cos2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $2\alpha=2k\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}$，即 $\alpha=k\pi\pm\dfrac{5\pi}{12},k\in Z$，

所以 $\alpha=k\pi\pm\dfrac{5\pi}{12},k\in Z$，是“$\alpha=2k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\in Z$”的必要不充分条件.

故“$\cos2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\in Z$”的必要不充分条件.

故选：A.

4.（5 分）已知 α， β 是平面， m， n 是直线，下列命题中不正确的是(　　)

A. 若 $m//\alpha$， $\alpha\bigcap\beta=n$，则 $m//n$　　B. 若 $m//n$， $m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha$， $m\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$， $m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

【解答】解：对于 A，若 $m//\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha\bigcap\beta=n$，则 $m//n$

但条件中缺少“$m\subset\beta$”，故不一定有 $m//n$ 成立，故 A 不正确；

对于 B，根据两条平行线与同一个平面所成角相等，可得

若 $m//n$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$，故 B 正确；

对于 C，根据垂直于同一条直线的两个平面互相平行，可得

若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$，故 C 正确；

对于 D，若直线与平面垂直，则直线与平面内所有直线都垂直

故若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故 D 正确

因此，不正确的命题只有 A

故选：A.

5.（5 分）极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线是(　　)

A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．双曲线

【解答】解：极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 可化为：$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\rho\cos\theta=1$，

$\therefore x^2-y^2-2x=1$，即 $(x-1)^2-y^2=2$，它表示中心在 $(1,0)$ 的双曲线.

$\therefore$ 极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线是双曲线.

故选：D.

6.（5 分）若 $z\in C$，且 $|z+2-2i|=1$，则 $|z-2-2i|$ 的最小值是(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【解答】解：由题意知，$|Z+2-2i|=1$ 表示：复平面上的点到 $(-2,2)$ 的距离为 1 的圆，

即以 $(-2,2)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，

$|Z-2-2i|$ 表示：圆上的点到 $(2,2)$ 的距离的最小值，

即圆心 $(-2,2)$ 到 $(2,2)$ 的距离减去半径 1，

则 $|2-(-2)|-1=3$

故选：B.

7.（5 分）如果圆台的母线与底面成 60° 角，那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为(

)

A. 2π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\frac{1}{2}\pi$

【解答】解：$\because$圆台的母线与底面成60°角，

$\therefore$设上底圆半径为r，下底面圆半径为R，母线为l，可得$l=2(R-r)$

因此，圆台的侧面积为$S_{侧}=\pi\left(r+R\right)l=2\pi\left(R^2-r^2\right)$

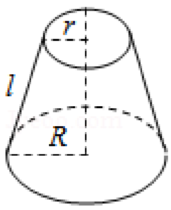
又$\because$圆台的高$h=\sqrt{3}(R-r)$

$\therefore$圆台的轴截面面积为$S_{轴}=\frac{1}{2}\left(2r+2R\right)h=\sqrt{3}\left(R^2-r^2\right)$

由此可得圆台的侧面积与轴截面面积的比为

$2\pi(R^2-r^2):\sqrt{3}(R^2-r^2)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

故选：C.



8.（5分）从黄瓜、白菜、油菜、扁豆4种蔬菜品种中选出3种，分别种在不同土质的三块土地上，其中黄瓜必须种植．不同的种植方法共有(　　)

A. 24种　　B. 18种　　C. 12种　　D. 6种

【解答】解：$\because$黄瓜必选，故再选2种蔬菜的方法数是C_3^2种，

在不同土质的三块土地上种植的方法是A_3^3，

$\therefore$种法共有$C_3^2\bullet A_3^3=18$种，

故选：B.

9.（5分）若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{3^{-n}+2^{-n}+(-1)^n(3^{-n}-2^{-n})}{2}$，$n=1$，2，…，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$等于(　　)

A. $\frac{11}{24}$　　B. $\frac{17}{24}$　　C. $\frac{19}{24}$　　D. $\frac{25}{24}$

【解答】解：$a_n=\begin{cases}\dfrac{3^{-n}+2^{-n}-\left(3^{-n}-2^{-n}\right)}{2}\left(n为奇数\right)\\ \dfrac{3^{-n}+2^{-n}+3^{-n}-2^{-n}}{2}\left(n为偶数\right)\end{cases}$

即 $a_n=\begin{cases}2^{-n} & \left(n为奇数\right)\\ 3^{-n} & (n为偶数).\end{cases}$

$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_n=(2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+)+(3^{-2}+3^{-4}+3^{-6}+)$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\dfrac{2^{-1}}{1-2^{-2}}+\dfrac{3^{-2}}{1-3^{-2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{19}{24}$.，

故选：C.

10．（5 分）某班试用电子投票系统选举班干部候选人．全班 k 名同学都有选举权和被选举权，他们的编号分别为 1，2，…，k，规定：同意按“1”，不同意（含弃权）按“0”，令 $a_{ij}=\begin{cases}1,第i号同学同意第j号同学当选.\\ 0,第i号同学不同意第j号同学当选.\end{cases}$ 其中 $i=1$，2，…，k，且 $j=1$，2，…，k，则同时同意第 1，2 号同学当选的人数为(　　)

A．$a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2k}$

B．$a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{k1}+a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{k2}$

C．$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\ldots+a_{k1}a_{k2}$

D．$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\ldots+a_{1k}a_{2k}$

【解答】解：第 1，2，…，k 名学生是否同意第 1 号同学当选依次由 a_{11}，a_{21}，a_{31}，…，a_{k1} 来确定 ($a_{ij}=1$ 表示同意，$a_{ij}=0$ 表示不同意或弃权)，是否同意第 2 号同学当选依次由 a_{12}，a_{22}，…，a_{k2} 确定，

而是否同时同意 1，2 号同学当选依次由 $a_{11}a_{12}$，$a_{21}a_{22}$，…，$a_{k1}a_{k2}$ 确定，

故同时同意 1，2 号同学当选的人数为 $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\ldots+a_{k1}a_{k2}$，

故选：C.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上.

11．（4 分）函数 $f(x)=lg(1+x^{2})$， $g(x)=\begin{cases}x+2 & x<-1\\ 0 & |x|\leqslant 1\\ -x+2 & x>1\end{cases}$， $h(x)=\tan 2x$ 中，__ $f(x)$、$g(x)$__ 是偶函数．

【解答】解：$\because f(-x)=lg[1+(-x)^{2}]=lg(1+x^{2})=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为偶函数．

又$\because 1^{\circ}$ 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时， $-1\leqslant -x\leqslant 1$，

$\therefore g(-x)=0$．

又 $g(x)=0$， $\therefore g(-x)=g(x)$．

2° 当 $x<-1$ 时， $-x>1$，

$\therefore g(-x)=-(-x)+2=x+2$．

又$\because g(x)=x+2$， $\therefore g(-x)=g(x)$．

3° 当 $x>1$ 时， $-x<-1$，

$\therefore g(-x)=(-x)+2=-x+2$．

又$\because g(x)=-x+2$， $\therefore g(-x)=g(x)$．

综上，对任意 $x\in R$ 都有 $g(-x)=g(x)$．

$\therefore g(x)$ 为偶函数．

$h(-x)=\tan(-2x)=-\tan 2x=-h(x)$，

$\therefore h(x)$ 为奇函数．

12．（4 分）已知双曲线方程为 $\dfrac{x^{2}}{16}-\dfrac{y^{2}}{9}=1$，则以双曲线左顶点为顶点，右焦点为焦点的抛物线方程为__ $y^{2}=36(x+4)$ __．

【解答】解：根据双曲线方程可知 $a=4$， $b=3$

$\therefore c=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=5$，

$\therefore$ 左顶点坐标为 $(-4,0)$，右焦点坐标为 $(5,0)$，

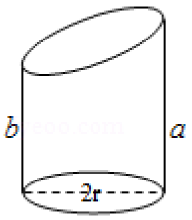
$\because$ 抛物线顶点为双曲线的左顶点，焦点为右焦点，

$\therefore p=18$，焦点在顶点的右侧，在 x 轴上

$\therefore$抛物线方程 $y^2=36(x+4)$.

故答案为： $y^2=36(x+4)$.

13．（4 分）如图，已知底面半径为 r 的圆柱被一个平面所截，剩下部分母线长的最大值为 a，最小值为 b，那么圆柱被截后剩下部分的体积是__ $\dfrac{1}{2}\pi r^2(a+b)$ __.



【解答】解：取两个相同的几何体，倒立一个，对应合缝，恰好形成一个圆柱体.

所求几何体的体积： $\dfrac{1}{2}\times\pi r^2\times(a+b)=\dfrac{1}{2}\pi r^2(a+b)$

故答案为： $\dfrac{1}{2}\pi r^2(a+b)$

14．（4 分）将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆形，要使正方形与圆的面积之和最小，正方形的周长应为__ $\dfrac{4}{\pi+4}$ __.

【解答】解析：设正方形周长为 x，则圆的周长为 $1-x$，半径 $r=\dfrac{1-x}{2\pi}$.

$\therefore S_{正}=(\dfrac{x}{4})^2=\dfrac{x^2}{16}$， $S_{圆}=\pi\cdot\dfrac{(1-x)^2}{4\pi^2}$.

$\therefore S_{正}+S_{圆}=\dfrac{(\pi+4)x^2-8x+4}{16\pi}(0<x<1)$.

$\therefore$当 $x=\dfrac{4}{\pi+4}$ 时有最小值.

答案： $\dfrac{4}{\pi+4}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 84 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（13 分）已知函数 $f(x)=\cos^4x-2\sin x\cos x-\sin^4x$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【解答】解：（Ⅰ）由题意知， $f(x)=\cos^4x-2\sin x\cos x-\sin^4x$

$=(cos^2x+sin^2x)(cos^2x-sin^2x)-\sin 2x$

$=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）$\because 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 取最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$ 时，$f(x)$ 取最小值为 -1

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最大值为 1，最小值为 $-\sqrt{2}$

16.（13 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=2$，$a_1+a_2+a_3=12$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）令 $b_n=a_nx^n(x\in R)$，求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

【解答】解:（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=12$.

又 $a_1=2$，得 $d=2$.

$\therefore a_n=2n$.

（2）当 $x=0$ 时，$b_n=0$，$S_n=0$，

当 $x\neq 0$ 时，令 $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$，

则由 $b_n=a_nx^n=2nx^n$，得

$S_n=2x+4x^2++(2n-2)x^{n-1}+2nx^n$，①

$xS_n=2x^2+4x^3++(2n-2)x^n+2nx^{n+1}$. ②

当 $x\neq 1$ 时，①式减去②式，得

$(1-x)S_n=2(x+x^2++x^n)-2nx^{n+1}$

$=\dfrac{2x(1-x^n)}{1-x}-2nx^{n+1}$.

$\therefore S_n=\dfrac{2x(1-x^n)}{(1-x)^2}-\dfrac{2nx^{n+1}}{1-x}$.

当 $x=1$ 时，$S_n=2+4++2n=n(n+1)$．

综上可得，当 $x=1$ 时，$S_n=n(n+1)$；

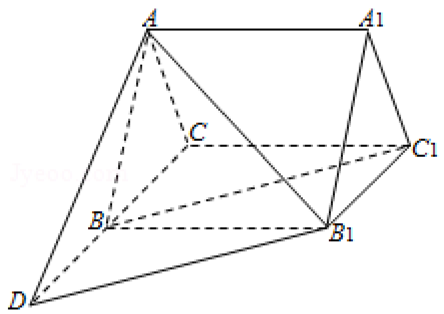
当 $x\neq 1$ 时，$S_n=\frac{2x(1-x^n)}{(1-x)^2}-\frac{2nx^{n+1}}{1-x}$．

17．（15 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 3 的正三角形，侧棱 AA_1 垂直于底面 ABC，$AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，D 是 CB 延长线上一点，且 $BD=BC$．

（1）求证：直线 $BC_1//$ 平面 AB_1D；

（2）求二面角 B_1-AD-B 的大小；

（3）求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积．



【解答】解：（1）$\because CB//C_1B_1$，且 $BD=BC=B_1C_1$，

$\therefore$ 四边形 BDB_1C_1 是平行四边形，可得 $BC_1//DB_1$．

又 $B_1D\subset$ 平面 AB_1D，$BC_1\not\subset$ 平面 AB_1D，

$\therefore$ 直线 $BC_1//$ 平面 AB_1D

（2）过 B 作 $BE\perp AD$ 于 E，连接 EB_1

$\because BB_1\perp$ 平面 ABD，$\therefore BE$ 是 B_1E 在平面 ABD 内的射影

结合 $BE\perp AD$，可得 $B_1E\perp AD$，

$\therefore \angle B_1EB$ 是二面角 B_1-AD-B 的平面角．

$\because BD=BC=AB$，

$\therefore E$ 是 AD 的中点，得 BE 是三角形 ACD 的中位线，所以 $BE=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$．

在 $Rt\triangle BB_1E$ 中，$\tan\angle B_1EB=\dfrac{B_1B}{BE}=\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle B_1EB=60^\circ$，即二面角 B_1-AD-B 的大小为 60°

（3）过 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，

$\because BB_1\perp$ 平面 ABC，$BB_1\subset$ 平面 BB_1C_1C

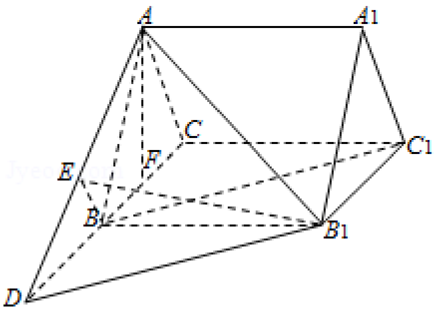
$\therefore$ 平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC

$\because AF\perp BC$，平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$

$\therefore AF\perp$ 平面 BB_1C_1C，即 AF 为点 A 到平面 BB_1C_1C 的距离.

$\because$ 正三角形 ABC 中，$AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 三棱锥 C_1-ABB_1 的体积 $V_{C1-ABB1}=V_{A-C1BB1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{27}{8}$.



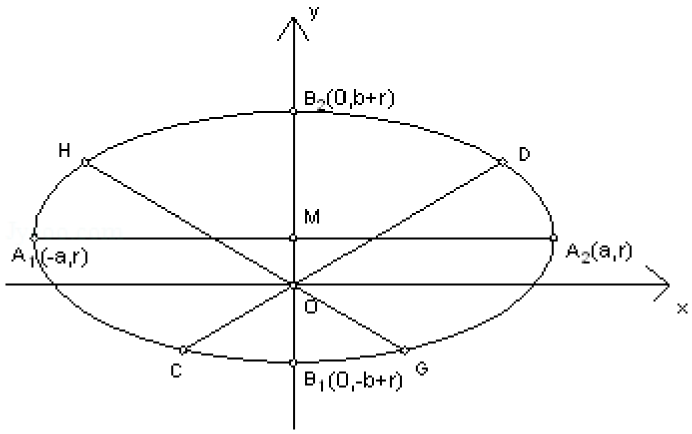
18.（15 分）如图，已知椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行，短轴 B_1B_2 在 y 轴上，中心 $M(0$，$r)(b>r>0$

（Ⅰ）写出椭圆方程并求出焦点坐标和离心率；

（Ⅱ）设直线 $y=k_1x$ 与椭圆交于 $C(x_1$，$y_1)$，$D(x_2$，$y_2)(y_2>0)$，直线 $y=k_2x$ 与椭圆次于 $G(x_3$，$y_3)$，$H(x_4$，$y_4)(y_4>0)$. 求证：$\dfrac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{k_1x_3x_4}{x_3+x_4}$；

（Ⅲ）对于（Ⅱ）中的在 C，D，G，H，设 CH 交 x 轴于 P 点，GD 交 x 轴于 Q 点，求证：$|OP|=|OQ|$

（证明过程不考虑 CH 或 GD 垂直于 x 轴的情形）



【解答】(Ⅰ)解：$\because$ 椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行，短轴 B_1B_2 在 y 轴上，中心 $M(0,r)$，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-r)^2}{b^2}=1$

焦点坐标为 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},r)$，$F_2(\sqrt{a^2-b^2},r)$

离心率 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

(Ⅱ)证明：将直线 CD 的方程 $y=k_1x$ 代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-r)^2}{b^2}=1$，得

$b^2x^2+a^2(k_1x-r)^2=a^2b^2$

整理得 $(b^2+a^2k_1^2)x^2-2k_1a^2rx+(a^2r^2-a^2b^2)=0$

根据韦达定理，得 $x_1+x_2=\dfrac{2k_1a^2r}{b^2+a^2k_1^2}$，$x_1x_2=\dfrac{a^2r^2-a^2b^2}{b^2+a^2k_1^2}$，

所以 $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{r^2-b^2}{2k_1r}$ ①

将直线 GH 的方程 $y=k_2x$ 代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-r)^2}{b^2}=1$，同理可得 $\dfrac{x_3x_4}{x_3+x_4}=\dfrac{r^2-b^2}{2k_2r}$ ②

由 ①、②得 $\dfrac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{r^2-b^2}{2r}=\dfrac{k_2x_3x_4}{x_3+x_4}$

所以结论成立

(Ⅲ)证明：设点 $P(p,0)$，点 $Q(q,0)$

由 C、P、H 共线，得 $\dfrac{x_1-p}{x_4-p}=\dfrac{k_1x_1}{k_2x_4}$

解得 $p=\dfrac{(k_1-k_2)x_1x_4}{k_1x_1-k_2x_4}$

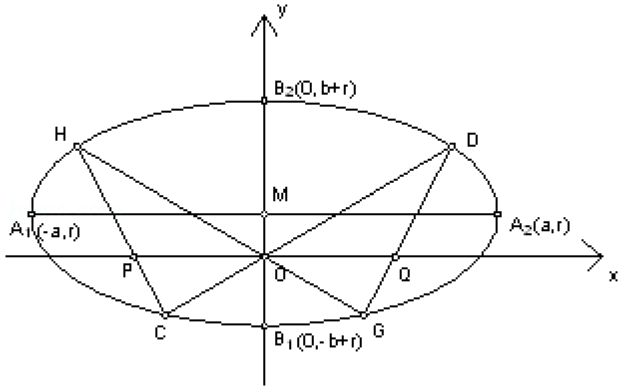
由 D、Q、G 共线，同理可得 $\dfrac{x_2-p}{x_3-p}=\dfrac{k_1x_2}{k_2x_3}$

$\therefore q=\dfrac{(k_1-k_2)x_2x_3}{k_1x_2-k_2x_3}$

由 $\dfrac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{k_2x_3x_4}{x_3+x_4}$ 变形得 $-\dfrac{(k_1-k_2)x_1x_4}{k_1x_1-k_2x_4}=\dfrac{(k_1-k_2)x_2x_3}{k_1x_2-k_2x_3}$

所以 $|p|=|q|$

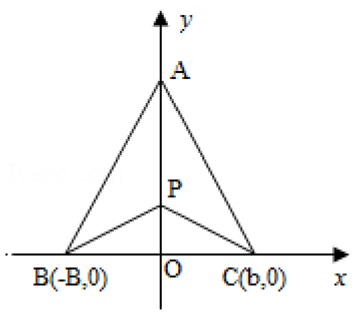
即 $|OP|=|OQ|$



19．（14 分）有三个新兴城镇分别位于 A、B、C 三点处，且 $AB=AC=a$，$BC=2b$，今计划合建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处（建立坐标系如图）．

（Ⅰ）若希望点 P 到三镇距离的平方和最小，则 P 应位于何处？

（Ⅱ）若希望点 P 到三镇的最远距离为最小，则 P 应位于何处？



【解答】解：（Ⅰ）由题设条件 $a>b>0$，设 P 的坐标为 $(0,y)$，则 P 至三镇距离的平方和

为 $f(y)=2(b^2+y^2)+(\sqrt{a^2-b^2}-y)^2=3y^2-2\sqrt{a^2-b^2}\,y+a^2+b^2$

所以，当 $y=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{3}$ 时，函数 $f(y)$ 取得最小值．

答：点 P 的坐标是 $(0,\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{3})$

（Ⅱ）记 $h=\sqrt{a^2-b^2}$

P 至三镇的最远距离为 $g(x)=\begin{cases}\sqrt{b^2+y^2},当\sqrt{b^2+y^2}\geqslant|h-y|\\|h-y|,当\sqrt{b^2+y^2}<|h-y|.\end{cases}$

由 $\sqrt{b^2+y^2}\geqslant|h-y|$ 解得 $y\geqslant\dfrac{h^2-b^2}{2h}$，记 $y^*=\dfrac{h^2-b^2}{2h}$，

于是 $g(x)=\begin{cases}\sqrt{b^2+y^2},当y\geqslant y^*\\|h-y|,当y<y^*.\end{cases}$

当 $y^*=\dfrac{h^2-b^2}{2h}\geqslant 0$，即 $h\geqslant b$ 时，

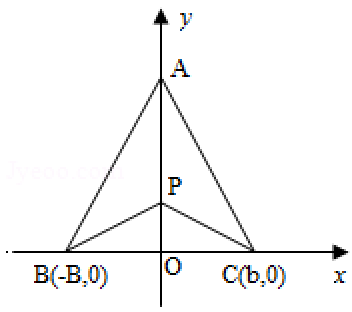
因为 $\sqrt{b^2+y^2}$ 在 $[y^*，+\infty)$ 上是增函数，而 $|h-y|$ 在 $(-\infty，y^*]$ 上是减函数.

所以 $y=y^*$ 时，函数 $g(y)$ 取得最小值．点 P 的坐标是 $(0,\dfrac{h^2-b^2}{2h})$

当 $y^*=\dfrac{h^2-b^2}{2h}<0$，即 $h<b$ 时，因为 $\sqrt{b^2+y^2}$ 在 $[y^*，+\infty)$ 上当 $y=0$ 函数 $g(y)$ 取得最小值 b，

而 $|h-y|$ 在 $(-\infty，y^*]$ 上是减函数，且 $|h-y|>b$，所以 $y=0$ 时，函数 $g(y)$ 取得最小值.

答: 当 $h\geqslant b$ 时，点 P 的坐标是 $(0,\dfrac{h^2-b^2}{2h})$；当 $h<b$ 时，点 P 的坐标是 $(0,0)$，其中 $h=\sqrt{a^2-b^2}$



20．（14 分）设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1，1]$ 上的函数，且满足条件，① $f(-1)=f（1）=0$，②对任意的 u、$v\in[-1，1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$

（Ⅰ）证明：对任意 $x\in[-1，1]$，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$

（Ⅱ）证明：对任意的 u，$v\in[-1，1]$ 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$

（Ⅲ）在区间 $[-1，1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$ 且使得

$\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|\, uv\in[0,\frac{1}{2}]\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|\, uv\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$；若存在请举一例，若不存在，请说明理由．

【解答】（Ⅰ）证明：由题设条件可知，

当$x\in[-1，1]$时，有$|f(x)|=|f(x)-f$（1）$|\leqslant|x-1|=1-x$，即$x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$．

（Ⅱ）证明：对任意的u，$v\in[-1，1]$，

当$|u-v|\leqslant 1$时，有$|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|\leqslant 1$

当$|u-v|>1$时，$u\cdot v<0$，不妨设$u\in[-1，0)$，$v\in(0，1]$，则$v-u>1$

从而有$|f(u)-f(v)|\leqslant|f(u)-f(-1)|+|f(v)-f$（1）$|\leqslant|u+1|+|v-1|=2-(v-u)<1$

综上可知，对任意的u，$v\in[-1，1]$，都有$|f(u)-f(v)|\leqslant 1$

（Ⅲ）解：这样满足所述条件的函数不存在．理由如下：

假设存在函数$f(x)$满足条件，则由$|f(u)-f(v)|=|u-v|$．

$u,v\in[\frac{1}{2},1]$得$|f(\frac{1}{2})-f(1)|=|\frac{1}{2}-1|=\frac{1}{2}$

又f（1）$=0$，所以$|f(\frac{1}{2})|=\frac{1}{2}$①

又因为$f(x)$为奇函数，所以$f(0)=0$，

由条件$|f(u)-f(v)|<|u-v|$．

$u,v\in[0,\frac{1}{2}]$得$|f(\frac{1}{2})|=|f(\frac{1}{2})-f(0)|<|\frac{1}{2}-0|=\frac{1}{2}$

所以$|f(\frac{1}{2})|<\frac{1}{2}$②

①与②矛盾，因此假设不成立，即这样的函数不存在．