2007年青海高考理科数学真题及答案

注意事项：

1. 本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共4页，总分150分，考试时间120分钟．
2. 答题前，考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上．
3. 选择题的每小题选出答案后，用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，不能答在试题卷上．
4. 非选择题必须使用0.5毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写，字体工整，笔迹清楚
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答．超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效；在草稿纸、本试题卷上答题无效．
6. 考试结束，将本试题卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷（选择题）

本卷共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A，B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么

n次独立重复试验中事件A恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\ldots，n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一、选择题

1．$\sin 210^\circ=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

2．函数$y=|\sin x|$的一个单调增区间是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$B．$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　C．$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

3．设复数z满足$\dfrac{1+2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A．$-2+\mathrm{i}$　　B．$-2-\mathrm{i}$　　C．$2-\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$

4．下列四个数中最大的是（　　）

A．$(\ln 2)^2$　　B．$\ln(\ln 2)$　　C．$\ln\sqrt{2}$　　D．$\ln 2$

5．在$\triangle ABC$中，已知D是AB边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

6．不等式$\frac{x-1}{x^2-4}>0$的解集是（　　）

A．$(-2,1)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-2,1)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

7．已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长与底面边长相等，则AB_1与侧面ACC_1A_1所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知曲线$y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$的一条切线的斜率为$\frac{1}{2}$，则切点的横坐标为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

9．把函数$y=\mathrm{e}^x$的图像按向量$\boldsymbol{a}=(2,3)$平移，得到$y=f(x)$的图像，则$f(x)=$（　　）

A．$\mathrm{e}^{x-3}+2$　　B．$\mathrm{e}^{x+3}-2$　　C．$\mathrm{e}^{x-2}+3$　　D．$\mathrm{e}^{x+2}-3$

10．从5位同学中选派4位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动，每人一天，要求星期五有2人参加，星期六、星期日各有1人参加，则不同的选派方法共有（　　）

A．40种　　B．60种　　C．100种　　D．120种

11．设F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$的左、右焦点，若双曲线上存在点$A$，使$\angle F_1AF_2=90^\circ$且$|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

12．设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A，B，C为该抛物线上三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$（　　）

A．9　　B．6　　C．4　　D．3

第Ⅱ卷（非选择题）

本卷共10题，共90分

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．$(1+2x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$的展开式中常数项为__________．（用数字作答）

14．在某项测量中，测量结果ξ服从正态分布$N(1,\ \sigma^2)(\sigma>0)$．若$\xi$在$(0,1)$内取值的概率为 0.4，则$\xi$在$(0,2)$内取值的概率为______________．

15．一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上．如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为__________cm^2．

16．已知数列的通项$a_n=-5n+2$，其前n项和为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$__________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，已知内角$A=\dfrac{\pi}{3}$，边$BC=2\sqrt{3}$．设内角$B=x$，周长为y．

（1）求函数$y=f(x)$的解析式和定义域；

（2）求y的最大值．

18．（本小题满分 12 分）

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件A："取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品"的概率$P(A)=0.96$．

（1）求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率p；

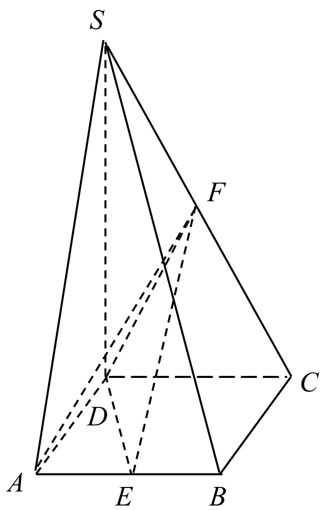
（2）若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件，ξ表示取出的 2 件产品中二等品的件数，求ξ的分布列．

19．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，侧棱$SD\perp$底面$ABCD$，E，F分别为AB，SC的中点．

（1）证明$EF\parallel$平面SAD；

（2）设$SD=2DC$，求二面角$A-EF-D$的大小．



20．（本小题满分 12 分）

在直角坐标系xOy中，以O为圆心的圆与直线$x-\sqrt{3}y=4$相切．

（1）求圆 O 的方程；

（2）圆 O 与 x 轴相交于 A，B 两点，圆内的动点 P 使 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，求 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\in(0,1)$，$a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4$，… .

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$，证明 $b_n<b_{n+1}$，其中 n 为正整数.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t，f(t))$ 处的切线方程；

（2）设 $a>0$，如果过点 $(a，b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

参考答案

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度．可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数．选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

1．D　2．C　3．C　4．D　5．A　6．C

7．A　8．A　9．C　10．B　11．B　12．B

二、填空题

13．-42　14．0.8　15．$2+4\sqrt{2}$　16．$-\dfrac{5}{2}$

三、解答题

17．解：（1）$\triangle ABC$ 的内角和 $A+B+C=\pi$，由 $A=\dfrac{\pi}{3}，B>0，C>0$ 得

$0 < B < \frac{2\pi}{3}$.

应用正弦定理，知

$$AC = \frac{BC}{\sin A}\sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x = 4\sin x,$$

$$AB = \frac{BC}{\sin A}\sin C = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

因为 $y = AB + BC + AC$，

所以 $y = 4\sin x + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2\sqrt{3}\left(0 < x < \frac{2\pi}{3}\right)$，

（2）因为 $y = 4\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 2\sqrt{3}$

$$= 4\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}\right),$$

所以，当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{3}$时，y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

18．解：（1）记 A_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”，

A_1 表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”.

则 A_0，A_1 互斥，且 $A = A_0 + A_1$，故

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_0 + A_1)\\ &= P(A_0) + P(A_1)\\ &= (1-p)^2 + \mathrm{C}_2^1 p(1-p)\\ &= 1 - p^2\end{aligned}$$

于是 $0.96 = 1 - p^2$.

解得 $p_1 = 0.2$，$p_2 = -0.2$（舍去）.

（2）ξ 的可能取值为 $0,1,2$.

若该批产品共 100 件，由（1）知其二等品有 $100 \times 0.2 = 20$ 件，故

$$P(\xi = 0) = \frac{\mathrm{C}_{80}^2}{\mathrm{C}_{100}^2} = \frac{316}{495}.$$

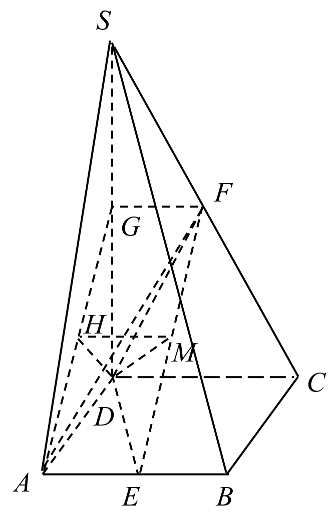
$$P(\xi=1)=\frac{C_{80}^{1}C_{20}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{160}{495}.$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_{20}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{19}{495}.$$

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

19．解法一：



（1）作$FG\parallel DC$交SD于点G，则G为SD的中点.

连结AG，$FG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$，又$CD \underline{\underline{\parallel}} AB$，

故$FG \underline{\underline{\parallel}} AE$，$AEFG$为平行四边形.

$EF\parallel AG$，又$AG\subset$平面SAD，$EF\not\subset$平面SAD.

所以$EF\parallel$平面SAD.

（2）不妨设$DC=2$，则$SD=4$，$DG=2$，$\triangle ADG$为等腰直角三角形.

取AG中点H，连结DH，则$DH\perp AG$.

又$AB\perp$平面SAD，所以$AB\perp DH$，而$AB\cap AG=A$，

所以$DH\perp$面AEF.

取EF中点M，连结MH，则$HM\perp EF$.

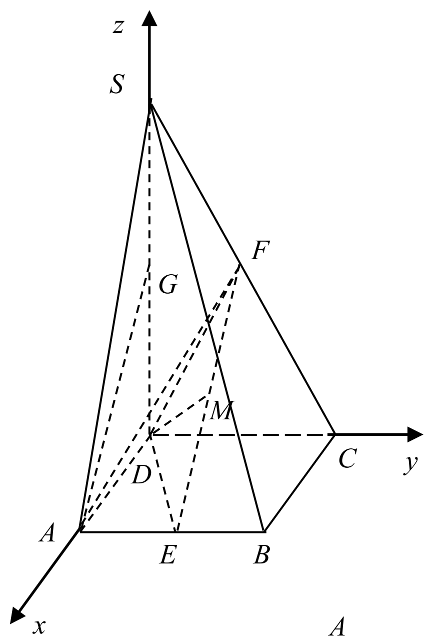
连结DM，则$DM\perp EF$.

故$\angle DMH$为二面角$A-EF-D$的平面角

$$\tan\angle DMH=\frac{DH}{HM}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}.$$

所以二面角$A-EF-D$的大小为$\arctan\sqrt{2}$.

解法二：（1）如图，建立空间直角坐标系$D-xyz$.



设$A(a,0,0)$，$S(0,0,b)$，则$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，

$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$，

$\overrightarrow{EF}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AG}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$，$EF\,//\,AG$，$AG\subset$ 平面 SAD，$EF\not\subset$ 平面 SAD，

所以 $EF\,//$ 平面 SAD.

（2）不妨设 $A(1,0,0)$，则 $B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$S(0,0,2)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$MD\perp EF$

又 $\overrightarrow{EA}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$EA\perp EF$，

所以向量 $\overrightarrow{MD}$ 和 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

$$\cos<\overrightarrow{MD},\overrightarrow{EA}>=\frac{\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{MD}\right|\bullet\left|\overrightarrow{EA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20．解：（1）依题设，圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 的距离，

即 $r=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$.

得圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$.

（2）不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$. 由 $x^2=4$ 即得

$A(-2,0)$，$B(2,0)$.

设 $P(x,\ y)$，由 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，得

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x^2+y^2,$$

即 $x^2-y^2=2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}&=(-2-x,-y)\bullet(2-x,-y)\\&=x^2-4+y^2\\&=2(y^2-1).\end{aligned}$$

由于点 P 在圆 O 内，故$\begin{cases} x^2+y^2<4, \\ x^2-y^2=2. \end{cases}$

由此得 $y^2<1$.

所以 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2,0)$.

21．解：（1）由 $a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4$，…，

整理得　$1-a_n=-\dfrac{1}{2}(1-a_{n-1})$.

又 $1-a_1\neq 0$，所以 $\{1-a_n\}$ 是首项为 $1-a_1$，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，得

$$a_n=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

（2）方法一：

由（1）可知 $0<a_n<\dfrac{3}{2}$，故 $b_n>0$.

那么，$b_{n+1}^2-b_n^2$

$$\begin{aligned}
&=a_{n+1}^2(3-2a_{n+1})-a_n^2(3-2a_n)\\
&=\left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2\left(3-2\times\frac{3-a_n}{2}\right)-a_n^2(3-2a_n)\\
&=\frac{9a_n}{4}(a_n-1)^2.
\end{aligned}$$

又由（1）知 $a_n>0$ 且 $a_n\neq 1$，故 $b_{n+1}^2-b_n^2>0$，

因此　$b_n<b_{n+1}$，n 为正整数.

方法二：

由（1）可知 $0<a_n<\dfrac{3}{2}$，$a_n\neq 1$，

因为 $a_{n+1}=\dfrac{3-a_n}{2}$，

所以　$b_{n+1}=a_{n+1}\sqrt{3-2a_{n+1}}=\dfrac{(3-a_n)\sqrt{a_n}}{2}$.

由 $a_n\neq 1$ 可得 $a_n(3-2a_n)<\left(\dfrac{3-a_n}{2}\right)^3$，

即　$a_n^2(3-2a_n)<\left(\dfrac{3-a_n}{2}\right)^2\bullet a_n$

两边开平方得　　$a_n\sqrt{3-2a_n}<\dfrac{3-a_n}{2}\bullet\sqrt{a_n}$.

即　$b_n<b_{n+1}$，n 为正整数.

22．解：（1）求函数 $f(x)$ 的导数；$f'(x)=3x^2-1$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t，f(t))$ 处的切线方程为：

$$y-f(t)=f'(t)(x-t),$$

即　$y=(3t^2-1)x-2t^3$.

（2）如果有一条切线过点 $(a，b)$，则存在 t，使

$$b=(3t^2-1)a-2t^3.$$

于是，若过点 $(a，b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则方程

$$2t^3-3at^2+a+b=0$$

有三个相异的实数根.

记　$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ ，

则　$g'(t)=6t^2-6at$

$$=6t(t-a).$$

当 t 变化时，$g(t)$，$g'(t)$ 变化情况如下表：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0，a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	极大值 $a+b$	$\searrow$	极小值 $b-f(a)$	$\nearrow$

由 $g(t)$ 的单调性，当极大值 $a+b<0$ 或极小值 $b-f(a)>0$ 时，方程 $g(t)=0$ 最多有一个实数根；

当 $a+b=0$ 时，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=0，t=\dfrac{3a}{2}$，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根；

当 $b-f(a)=0$ 时，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=-\dfrac{a}{2}，t=a$ ，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根.

综上，如果过$(a,\ b)$可作曲线$y=f(x)$三条切线，即$g(t)=0$有三个相异的实数根，

则$\begin{cases} a+b>0, \\ b-f(a)<0. \end{cases}$

即　$-a<b<f(a)$.