

绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（文史类）

【学科网试卷总评】2013 年高考数学四川卷遵循《考试说明》的要求,保持了近几年四川卷的命题风格,在题型、题量、难度等方面保持相对稳定,试卷覆盖了高中数学的主干内容,重视对数学思想方法的考查,着重考查数学能力.

①源于教材,注重基础,试卷中很多考题直接源于教材或由教材上的例题、习题、复习题改编而来,这些试题重视对基础知识和通性通法的考查.这种立足于教材编拟高考试题的理念和方法,对中学数学教学回归教材、重视课本、减轻学业负担、实施素质教育具有良好的导向作用,也充分体现了试题背景的公平性.

②注重思想,考查本质,试卷在考查数学基础知识和基本技能的基础上,注重数学思想方法和数学本质的考查.第 2、5、6、等题考查了数形结合思想,第 8、10、15 题考查了分类与整合思想,第 14、20、21 等题考查了函数与方程思想.此外,化归与转化思想在多个题目中得到了体现.

③多考点想,少考点算,数学思维能力的考查在大部分试题中得到了充分体现.如第 1~4、6、12、15、17(I)等题,都不需要较多的运算就可得出结论.第 5、7、8、9、14 等题,具有思维量大但运算量小的特点.其思维难度高、思维量大,但借助于直觉猜想、合理估算、反例构造、演绎推理等方法,运用数形结合、函数与方程等数学思想,其运算就比较简单.第 21 题,若能运用对数函数的单调性及图像的分析就能较快的解决问题,并可避免繁琐的数值计算.今年全卷的运算量和书写量比过去几年有所降低,但思维量有所增加,较好地体现了“多考点想,少考点算”的命题理念.

本试题卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上大题无效。满分 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡上一并交回。

第 I 卷 （选择题 共 50 分）

注意事项：

必须使用 2B 铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，

只有一个是符合题目要求的。

1、设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，集合 $B = \{-2, 2\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- (A) \emptyset
- (B) $\{2\}$
- (C) $\{-2, 2\}$
- (D) $\{-2, 1, 2, 3\}$

【答案】B

【解析】 A 、 B 两集合中只有一个公共元素2， $\therefore A \cap B = \{2\}$ ，选B.

【学科网考点定位】本题考查用列举法表示的集合的交运算.



2、一个几何体的三视图如图所示，则该几何体可以是 ()

- (A) 棱柱
- (B) 棱台
- (C) 圆柱
- (D) 圆台

【答案】D

【解析】由俯视图知，该几何体是圆柱和圆台的组合体，可排除A、B，由正视图可排除C，故选D.

【学科网考点定位】本题考查简单几何体的三视图的画法和识别，以及一个几何体的三视图与直观图的相互转换问题.

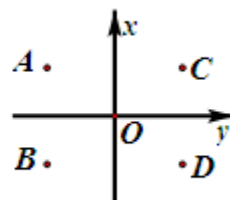
3、如图，在复平面内，点 A 表示复数 z ，则图中表示 z 的共轭复数的点是 ()

- (A) A
- (B) B
- (C) C
- (D) D

【答案】B

【解析】设点 $A(x, y)$ 表示的复数 $z = x + yi$ ，则 z 的共轭复数 $\bar{z} = x - yi$ 对应的点为 $B(x, -y)$ ， $\therefore A$ 、 B 两点关于 x 轴对称，选B.

【学科网考点定位】本题考查复数的概念、表示方法、几何意义以及共轭复数的概念，容易题.



4、设 $x \in Z$ ，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集. 若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$ ，则 ()

- (A) $\neg p: \exists x \in A, 2x \in B$
- (B) $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$
- (C) $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$
- (D) $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$

【答案】C

【解析】本题考查全称命题的否定，注意到“任意”的否定是“存在”，“属于”的否定是“不属于”，将 \forall 改为 \exists ，将 $2x \in B$ 改为 $2x \notin B$ ，于是有 $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$ ，故选C.

【学科网考点定位】本题考查全称命题的否定，注意：“任意”的否定是“存在”，“属于”的否定是“不属于”.

5、抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点到直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 的距离是 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) 2
 (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

【答案】D

【解析】抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2,0)$ ，于是点 F 到直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 的距离

$$d = \frac{|2 - \sqrt{3} \times 0|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 1, \text{ 选 D.}$$

【学科网考点定位】本题考查抛物线的标准方程、简单的几何性质，点到直线的距离公式，计算量小，基础题。

6、函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则 ω, φ 的值分别是

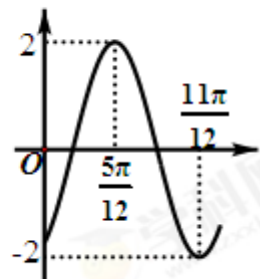
- ()
 (A) $2, -\frac{\pi}{3}$ (B) $2, -\frac{\pi}{6}$
 (C) $4, -\frac{\pi}{6}$ (D) $4, \frac{\pi}{3}$

【答案】A

【解析】由图知，周期 T 满足 $\frac{1}{2}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}$ ， $\therefore T = \pi$ ，又 $\omega > 0$ ， \therefore

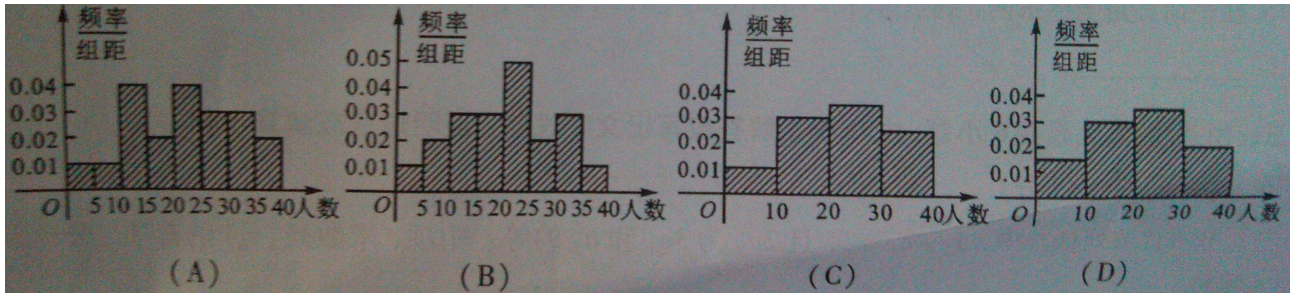
$\omega = 2$ ，故 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ，图象的最高点为 $(\frac{5\pi}{12}, 2)$ ，于是由“五

点法”作图，知 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ，选 A.



【学科网考点定位】本题考查正弦型函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质，难点是确定初相 φ 的值，关键是理解“五点法”作图。

7、某学校随机抽取 20 个班，调查各班中有网上购物经历的人数，所得数据的茎叶图如图所示。以组距为 5 将数据分组成 $[0,5), [5,10), \dots, [30,35), [35,40]$ 时，所作的频率分布直方图是 ()



0	7	3					
1	7	6	4	4	3	0	
2	7	5	5	4	3	2	0
3	8	5	4	3	0		

【答案】A

【解析】由茎叶图，有

组别	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40]
频数	1	1	4	2	4	3	3	2

上表对应的频率分布直方图为 A，故选 A.

【学科网考点定位】本题考查茎叶图和频率分布直方图等统计初步知识，考查学生收集数据，处理数据的能力.

8、若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 8, \\ 2y-x \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = 5y - x$ 的最大值为 a ，最小值为 b ，则 $a - b$ 的值是

()

(A) 48

(B) 30

(C) 24

(D) 16

【答案】C

【解析】约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 8, \\ 2y-x \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 表示以 $(0,0)$ 、 $(0,2)$ 、 $(4,4)$ 、 $(8,0)$ 为顶点的四边形区域，检验

四顶点坐标可知，当 $x=4$ ， $y=4$ 时， $a=z_{\max}=5 \times 4 - 4 = 16$ ，当 $x=8$ ， $y=0$ 时， $b=z_{\min}=5 \times 0 - 8 = -8$ ，所以 $a-b=24$ ，选 c.

【学科网考点定位】本题考查不等式（组）表示平面区域的作法，图解法求线性规划问题的最优解等基础知识，考查数形结合的思想方法.

9、从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 P 向 x 轴作垂线，垂足恰为左焦点 F_1 ， A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点， B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点，且 $AB \parallel OP$ (O 是坐标原点)，则该椭圆的离心率是 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】c

【解析】由已知，点 $P(-c, y)$ 在椭圆上， $\therefore \frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，解得 $P(-c, \frac{b^2}{a})$ ，又 $AB \parallel OP$ ， $\therefore -\frac{b}{a} = -\frac{b^2}{ac}$ ，即 $b=c$ ，所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2}$ ，故椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，选 c.

【学科网考点定位】本题考查椭圆的标准方程、简单几何性质以及两直线平行的充要条件，课本习题改编，中等题.

10、设函数 $f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ ($a \in R$ ， e 为自然对数的底数)。若存在 $b \in [0, 1]$ 使 $f(f(b)) = b$ 成立，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[1, e]$ (B) $[1, 1+e]$ (C) $[e, 1+e]$ (D) $[0, 1]$

【答案】A

【解析】 $\because f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ 在定义域上单调递增， $\therefore \exists b \in [0, 1]$ ，使得 $f(f(b)) = b$ 成立 $\Leftrightarrow \exists b \in [0, 1]$ ，使得 $f(b) = b$ ，即等价于方程 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 有解，于是 $a = e^x + x - x^2$ 在 $[0, 1]$ 有解，所以 a 的取值范围就是函数 $g(x) = e^x + x - x^2$ ， $x \in [0, 1]$ 的值域， $\because g'(x) = e^x + 1 - 2x$ 在 $[0, 1]$ 恒为正， \therefore 函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，所以 $g(x) \in [1, e]$ ，故 a 的取值范围是 $[1, e]$ ，选 A.

【学科网考点定位】本题考查函数图象与性质的应用，函数零点、方程的根和函数图象与 x 轴交点三者间的关系，考查推理论证、运算求解和创新意识，本题具有高等数学背景，较难.

第二部分 (非选择题 共 100 分)

注意事项:

必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11、 $\lg \sqrt{5} + \lg \sqrt{20}$ 的值是_____。

【答案】 1

【解析】 $\lg \sqrt{5} + \lg \sqrt{20} = \lg(\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) = \lg \sqrt{100} = \lg 10 = 1$, 故填 1.

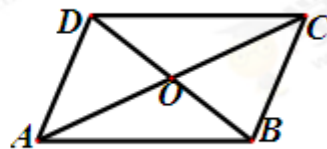
【学科网考点定位】 本题考查对数的概念和对数的运算法则, 容易题。

12、如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda =$ _____。

【答案】 2

【解析】 如图, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$, 所以 $\lambda = 2$, 故填 2.

【学科网考点定位】 本题考查平面向量的线性运算以及运算的几何表示。



13、已知函数 $f(x) = 4x + \frac{a}{x}$ ($x > 0, a > 0$) 在 $x = 3$ 时取得最小值, 则 $a =$ _____。

【答案】 36

【解析】 $f(x) = 4x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{a}{x}} = 4\sqrt{a}$, 当且仅当 $4x = \frac{a}{x}$, 即 $a = 4x^2$ 时等号成立, 又在 $x = 3$

时取得最小值, 所以 $a = 4x^2 = 4 \times 3^2 = 36$, 故填 36.

【学科网考点定位】 本题考查利用均值不等式求最值, 注意对“一正”、“二定”、“三相等”这三个条件的验证!

14、设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____。

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin \alpha, \therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2},$ 又 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore \alpha = \frac{2\pi}{3},$ 所以 $\tan 2\alpha = \tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$ 故填 $\sqrt{3}.$

【学科网考点定位】 本题考查同角三角函数间的基本关系，二倍角公式，简单的三角恒等变换，基础题。

15、在平面直角坐标系内，到点 $A(1,2), B(1,5), C(3,6), D(7,-1)$ 的距离之和最小的点的坐标是_____。

【答案】 (2,4)

【解析】 设四边形 $ABCD$ 对角线的交点为 Q, P 为坐标平面内任意一点，根据三角形性质，有 $PA+PC \geq AC, PB+PD \geq BD, \therefore PA+PB+PC+PD \geq AC+BD,$ 当点 P 与 Q 重合时取等号，于是所求点为 $Q,$ 易知直线 AC, BD 的方程分别为： $y = 2x, x + y - 6 = 0,$ 由
$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$$
 解得 $Q(2,4),$ 填(2,4)。

【学科网考点定位】 本题以直角坐标系为载体，考查直线的方程、两直线交点和多距离几何最值问题，考查考生对问题的探究和富有数学特点的思考，考查创新能力。解题的关键是灵活使用定理：三角形中，两边之和大于第三边。

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16、(本小题满分 12 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 - a_1 = 2,$ 且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项，求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公比及前 n 项和。

【答案】 首项 $a_1 = 1,$ 公比 $q = 3,$ 前 n 项和 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}.$

【解析】 设该数列的公比为 $q,$ 由已知，可得，

$$\begin{cases} a_1 q - a_1 = 2 \\ 4a_1 q = 3a_1 + a_1 q^2 \end{cases},$$

所以 $\begin{cases} a_1(q-1) = 2 \\ q^2 - 4q + 3 = 0 \end{cases}$,

解方程组, 得 $a_1 = 1, q = 3$.

即数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 3.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$12 分

【学科网考点定位】 本小题考查等比数列、等差中项等基础知识, 考查运算求解能力.

17、(本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且

$$\cos(A-B)\cos B - \sin(A-B)\sin(A+C) = -\frac{3}{5}.$$

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 若 $a = 4\sqrt{2}$, $b = 5$, 求向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影.

【答案】 (I) $\frac{4}{5}$, (II) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 (I) 由 $\cos(A-B)\cos B - \sin(A-B)\sin(A+C) = -\frac{3}{5}$, 得

$$\cos(A-B)\cos B - \sin(A-B)\sin B = -\frac{3}{5},$$

$$\text{则 } \cos(A-B+B) = -\frac{3}{5}, \text{ 即 } \cos A = -\frac{3}{5}.$$

又 $0 < A < \pi$, 则 $\sin A = \frac{4}{5}$5 分

$$(II) \text{ 由正弦定理, 有 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由题知 $a > b$, 则 $A > B$, 故 $B = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{根据余弦定理, 有 } (4\sqrt{2})^2 = 5^2 + c^2 - 2 \times 5c \times (-\frac{3}{5}),$$

解得 $c = 1$ 或 $c = -7$ (负值舍去).

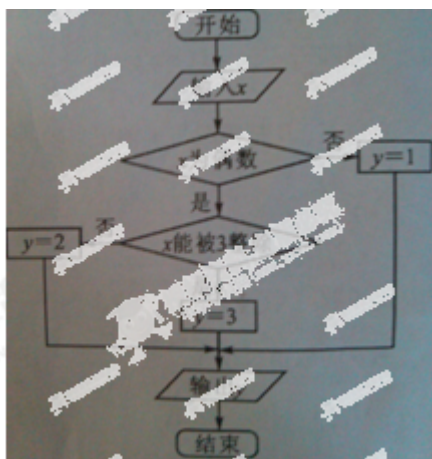
故向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影为 $|\overrightarrow{BA}| \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$12 分

【学科网考点定位】本小题主要考查两角和的余弦公式、诱导公式、正弦定理、余弦定理、同角三角函数的关系等基础知识，考查向量投影的概念，考查运算求解能力、考查化归与转化等数学思想。

18、(本小题满分 12 分)

某算法的程序框图如图所示，其中输入的变量 x 在 $1, 2, 3, \dots, 24$ 这 24 个整数中等可能随机产生。

(I) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 $P_i (i = 1, 2, 3)$;



(II) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解，各自编写程序重复运行 n 次后，统计记录了输出 y 的值为 $i (i = 1, 2, 3)$ 的频数。以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据。

甲的频数统计表 (部分)

乙的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
...
2100	1027	376	697

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
...
2100	1051	696	353

【答案】(I) 在平面 ABC 内, 过点 P 作直线 $l \parallel BC$; (II) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【解析】(I) 如图, 在平面 ABC 内, 过点 P 作直线 $l \parallel BC$,

因为 l 在平面 A_1BC 外, BC 在平面 A_1BC 内, 由直线与平面平行的判定定理可知,

$l \parallel$ 平面 A_1BC ,

由已知 $AB = AC$, D 为线段 BC 的中点,

所以, $BC \perp AD$, 则直线 $l \perp AD$.

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp$ 直线 l ,

又因为 AD 、 AA_1 在平面 ADD_1A_1 内, 且 AD 与 AA_1 相交,

所以直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_17分

(II) 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E .

$\because AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\therefore DE \perp AA_1$.

又因为 AC 、 AA_1 在平面 ACC_1A_1 内, 且 AC 与 AA_1 相交,

所以 $DE \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

由 $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, 有 $AD = 1$, $\angle DAC = 60^\circ$,

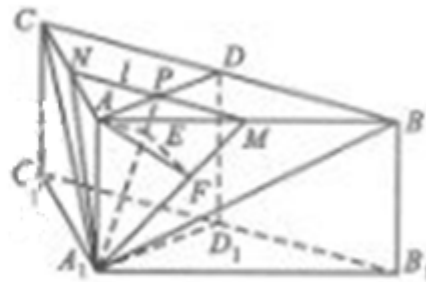
所以在 $\triangle ACD$ 中, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $S_{\triangle A_1QC_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot AA_1 = 1$, 所以

$$V_{A_1-QC_1D} = V_{D-QC_1A_1} = \frac{1}{3} DE \cdot S_{\triangle A_1QC_1} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

因此三棱锥 A_1-QC_1D 的体积是 $\frac{\sqrt{3}}{6}$12分

【学科网考点定位】本小题主要考查本作图、线面的平行与垂直、棱锥的体积等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力.



20、(本小题满分 13 分)

已知圆 C 的方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ，点 O 是坐标原点. 直线 $l: y = kx$ 与圆 C 交于 M 、 N 两点.

(I) 求 k 的取值范围;

(II) 设 $Q(m, n)$ 是线段 MN 上的点, 且 $\frac{2}{|OQ|^2} = \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}$. 请将 n 表示为 m 的函数.

【答案】 (I) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, (II) $n = \frac{\sqrt{15m^2 + 180}}{5}$ ($m \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$)

【解析】 (I) 将 $y = kx$ 代入 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 中, 得

$$(1+k^2)x^2 - 8kx + 12 = 0. \quad (*)$$

由 $\Delta = (-8k)^2 - 4(1+k^2) \times 12 > 0$, 得 $k^2 > 3$.

所以, k 的取值范围 $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$4 分

(II) 因为 M 、 N 在直线 l 上, 可设点 M 、 N 的坐标分别为 (x_1, kx_1) 、 (x_2, kx_2) , 则

$$|OM|^2 = (1+k^2)x_1^2, \quad |ON|^2 = (1+k^2)x_2^2.$$

$$\text{又 } |OQ|^2 = m^2 + n^2 = (1+k^2)m^2.$$

$$\text{由 } \frac{2}{|OQ|^2} = \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}, \text{ 得}$$

$$\frac{2}{(1+k^2)m^2} = \frac{1}{(1+k^2)x_1^2} + \frac{1}{(1+k^2)x_2^2}, \text{ 即}$$

$$\frac{2}{m^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}.$$

由(*)可知, $x_1 + x_2 = \frac{8k}{1+k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{12}{1+k^2}$,

所以 $m^2 = \frac{36}{5k^2-3}$.

因为点 Q 在直线 $y=kx$ 上, 所以 $k = \frac{n}{m}$, 代入 $m^2 = \frac{36}{5k^2-3}$ 中并化简, 得

$$5n^2 - 3m^2 = 36.$$

由 $m^2 = \frac{36}{5k^2-3}$ 及 $k^2 > 3$, 可得 $0 < m^2 < 3$, 即 $m \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$.

根据题意, 点 Q 在圆 C 内, 则 $n > 0$, 所以 $n = \sqrt{\frac{36+3m^2}{5}} = \frac{\sqrt{15m^2+180}}{5}$,

于是 n 与 m 的函数关系为 $n = \frac{\sqrt{15m^2+180}}{5}$ ($m \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$).

13分

【学科网考点定位】本小题主要考查直线、圆、函数与不等式等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查函数与方程等数学思想, 并考查思维的严谨性.

21、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 其中 a 是实数. 设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 为该函

数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$.

(I) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直, 且 $x_2 < 0$, 证明: $x_2 - x_1 \geq 1$;

(III) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合, 求 a 的取值范围.

【答案】(I) 减区间为 $(-\infty, -1)$, 增区间为 $[-1, 0)$ 、 $(0, +\infty)$; (II) 略; (III) $(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

【解析】(I) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, 单调递增区间为 $[-1, 0)$ 、 $(0, +\infty)$3

分

(II) 由导数的几何意义可知, 点 A 处的切线斜率为 $f'(x_1)$, 点 B 处的切线斜率为 $f'(x_2)$,

故当点 A 处的切线与点 B 处的切线垂直时, 有 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$.

当 $x < 0$ 时, 对函数 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = 2x + 2$,

因为 $x_1 < x_2 < 0$ ，所以， $(2x_1 + 2)(2x_2 + 2) = -1$ ，

所以 $2x_1 + 2 < 0$ ， $2x_2 + 2 > 0$ 。

因此 $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}[-(2x_1 + 2) + (2x_2 + 2)] \geq \sqrt{[-(2x_1 + 2)] \cdot (2x_2 + 2)} = 1$ ，

当且仅当 $-(2x_1 + 2) = 2x_2 + 2 = 1$ ，即 $x_1 = -\frac{3}{2}$ ， $x_2 = -\frac{1}{2}$ 时等号成立。

所以，函数 $f(x)$ 的图象在点 A ， B 处的切线互相垂直时， $x_2 - x_1 \geq 1$ 。……7 分

(III) 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $x_2 > x_1 > 0$ 时， $f'(x_1) = f'(x_2)$ ，故 $x_1 < 0 < x_2$ 。

当 $x_1 < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为

$$y - (x_1^2 + 2x_1 + a) = (2x_1 + 2)(x - x_1)，即 y = (2x_1 + 2)x - x_1^2 + a。$$

当 $x_2 > 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切线方程为

$$y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)，即 y = \frac{1}{x_2} \cdot x + \ln x_2 - 1。$$

两切线重合的充要条件是

$$\begin{cases} \frac{1}{x_2} = 2x_1 + 2, & (1) \\ \ln x_2 - 1 = -x_1^2 + a, & (2) \end{cases}$$

由①及 $x_1 < 0 < x_2$ 知， $-1 < x_1 < 0$

由①②得 $a = x_1^2 + \ln \frac{1}{2x_1 + 2} - 1 = x_1^2 - \ln(2x_1 + 2) - 1$ 。

设 $h(x_1) = x_1^2 - \ln(2x_1 + 2) - 1$ ($-1 < x_1 < 0$)，

则 $h'(x_1) = 2x_1 - \frac{1}{x_1 + 1} < 0$ ，

所以， $h(x_1)$ ($-1 < x_1 < 0$) 是减函数。

则 $h(x_1) > h(0) = -\ln 2 - 1$ ，

所以 $a > -\ln 2 - 1$.

又当 $x_1 \in (-1, 0)$ 且趋近于 -1 时, $h(x_1)$ 无限增大,

所以 a 的取值范围是 $(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

故当函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合时, a 的取值范围是 $(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

.....14分

【学科网考点定位】 本小题主要考查基本函数的性质、导数的应用、基本不等式、直线的位置关系等基

础知识, 考查推论证能力、运算求解能力、创新意识、考查函数与方程、分类与整合、转化与化归等数学思想. 第 (I) 问两个增区间之间错加并集符号; 第 (II) 问没有注明均值不等式中
等号成立的条件; 第 (III) 问不会分离变量, 把所求问题转化为函数值域问题.