

2005 年吉林高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 10 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。
3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是

P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k

次的概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

2. 正方体 ABCD—A₁B₁C₁D₁ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B₁C₁ 的中点。那么，正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ()

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

3. 函数 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} (x \leq 0)$ 的反函数是 ()

- A. $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$ B. $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$
C. $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$ D. $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$

4. 已知函数 $y = \tan \omega x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是减函数, 则 ()

- A. $0 < \omega \leq 1$ B. $-1 \leq \omega < 0$ C. $\omega \geq 1$ D. $\omega \leq -1$

5. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 若 $\frac{a+bi}{c+di}$ 为实数, 则 ()

- A. $bc+ad \neq 0$ B. $bc-ad \neq 0$ C. $bc-ad=0$ D. $bc+ad=0$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 M 在双曲线上且 $MF_1 \perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A, B 满足 $\tan A - \frac{1}{\sin 2A} = \tan B$, 则有 ()

- A. $\sin 2A - \cos B = 0$ B. $\sin 2A + \cos B = 0$
C. $\sin 2A - \sin B = 0$ D. $\sin 2A + \sin B = 0$

8. 已知点 $A(\sqrt{3}, 1), B(0, 0), C(\sqrt{3}, 0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E , 那么有 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 28 \leq 0\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

- A. $\{x | -4 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 7\}$ B. $\{x | -4 < x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x < 7\}$
C. $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $v = (4, -3)$ (即点 P 的运动方向与 v 相同, 且每秒移动的距离为 $|v|$ 个单位. 设开始时点 P 的坐标为 $(-10, 10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ()

- A. $(-2, 4)$ B. $(-30, 25)$ C. $(10, -5)$ D. $(5, -10)$

11. 如果 a_1, a_2, \dots, a_8 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d \neq 0$, 则 ()

- A. $a_1 a_8 > a_4 a_5$ B. $a_1 a_8 < a_4 a_5$ C. $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$ D. $a_1 a_8 = a_4 a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}$ B. $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ C. $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}$

第II卷

注意事项:

1. 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
3. 本卷共 10 小题, 共 90 分。

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 圆心为 (1, 2) 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为_____.
14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.
15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有_____个.
16. 下面是关于三棱锥的四个命题:
①底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.
②底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥.
③底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥.
④侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥. 其中, 真命题的编号是_____ (写出所有真命题的编号).

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = 2^{|x+1|-|x-1|}$, 求使 $f(x) \geq 2\sqrt{2}x$ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1, \lg a_2, \lg a_4$ 成等差数列. 又

$$b_n = \frac{1}{a_{2^n}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

(I) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(II) 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S = \frac{1}{3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d .

(注: 无穷数列各项的和即当 $n \rightarrow \infty$ 时数列前 n 项和的极限)

19. (本小题满分 12 分)

甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛

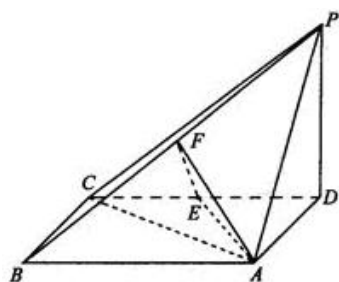
采用五局三胜制，即先胜三局的队获胜，比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E 、 F 分别为 CD 、 PB 的中点.

(I) 求证: $EF \perp$ 平面 PAB ;

(II) 设 $AB = \sqrt{2} BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. (本小题满分 14 分)

P 、 Q 、 M 、 N 四点都在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知

\overrightarrow{PF} 与 \overrightarrow{FQ} 共线, \overrightarrow{MF} 与 \overrightarrow{FN} 共线, 且 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$.

(I) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;

(II) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.

参考答案

1-6: CDBBCC 7-12: ACACBC

13. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; 14. $-\frac{3}{4}$. 15. 192; 16. ①, ④

17. 本小题主要考查指数函数的性质、不等式性质和解法, 考查分析问题的能力和计算能力, 满分 12 分

解: 由于 $y = 2^x$ 是增函数, $f(x) \geq 2\sqrt{2}$ 等价于 $|x+1| - |x-1| \geq \frac{3}{2}$ ①

(1) 当 $x \geq 1$ 时, $|x+1| - |x-1| = 2$, \therefore ①式恒成立。

(2) 当 $-1 < x < 1$ 时, $|x+1| - |x-1| = 2x$, ①式化为 $2x \geq \frac{3}{2}$, 即 $\frac{3}{4} \leq x < 1$

(3) 当 $x \leq -1$ 时, $|x+1| - |x-1| = -2$, ①式无解

综上 x 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

18. 本小题主要考查等差数列、等比数列的基本知识以及运用这些知识的能力。满分 12 分。

(I) 证明: $\because \lg a_1, \lg a_2, \lg a_4$ 成等差数列, $\therefore 2 \lg a_2 = \lg a_1 + \lg a_4$, 即 $a_2^2 = a_1 a_4$

又设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$, 即 $d^2 = a_1 d$

$\because d \neq 0, \therefore d = a_1 \neq 0$, $a_{2^n} = a_1 + (2^n - 1)d = 2^n d$, $b_n = \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{2^n}$

这时 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = \frac{1}{2d}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(II) 解: 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q = 1$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时其前 n 项和的极限不存在。

因而 $d = a_1 \neq 0$, 这时公比 $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2d}$, 这样 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{\frac{1}{2d} [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}}$ 。

则 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2d} [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{d}$ 。

由 $S = \frac{1}{3}$ 得公差 $d = 3$, 首项 $a_1 = d = 3$ 。

19. 本小题考查离散型随机变量分布和数学期望等概念, 考查运用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分

解: 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 乙队胜甲队的概率为 $1 - 0.6 = 0.4$

比赛 3 局结束有两种情况: 甲队胜 3 局或乙队胜 3 局, 因而 $P(\xi = 3) = 0.6^3 + 0.4^3 = 0.28$

比赛 4 局结束有两种情况: 前 3 局中甲队胜 2 局, 第 4 局甲队胜; 或前 3 局中乙队胜 2 局, 第 4 局乙队胜。因而

$$P(\xi = 4) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_3^2 \times 0.4^2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.3744$$

比赛 5 局结束有两种情况: 前 4 局中甲队胜 2 局、乙队胜 2 局, 第 5 局甲胜或乙胜。因而

$$P(\xi=5) = C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 \times 0.6 + C_4^2 \times 0.4^2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.3456$$

所以 ξ 的概率分布为

ξ	3	4	5
P	0.28	0.3744	0.3456

$$\xi \text{ 的期望 } E_\xi = 3 \times P(\xi=3) + 4 \times P(\xi=4) + 5 \times P(\xi=5) = 4.0656$$

20. 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识、及思维能力和空间想象能力。满分 12 分。

证明：(I) 证明：连结 EP， $\because PD \perp$ 底面 ABCD，DE 在平面 ABCD 内， $\therefore PD \perp DE$ 。

又 CE=ED，PD=AD=BC， $\therefore Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle PDE$ ， $\therefore PE = BE$ 。

\because F 为 PB 中点， $\therefore EF \perp PB$ 。由三垂线定理得 $PA \perp AB$ ， \therefore 在 $Rt\triangle PAB$ 中，PF=AF。

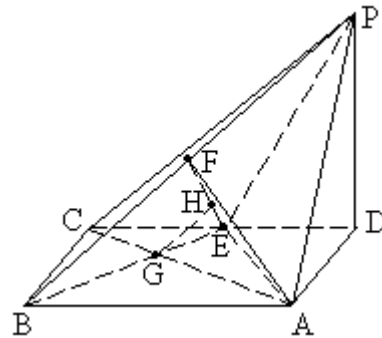
又 PE=BE=EA，

$\therefore Rt\triangle EFP \cong Rt\triangle EFA$ ， $\therefore EF \perp FA$ 。

\because PB、FA 为平面 PAB 内的相交直线， $\therefore EF \perp$ 平面 PAB。

(II) 解：不妨设 BC=1，则 AD=PD=1， $AB = \sqrt{2}$ ，

$$PA = \sqrt{2}，AC = \sqrt{3}$$



$\therefore \triangle PAB$ 为等腰直角三角形，且 $PB=2$ ，F 为其斜边中点， $BF=1$ ，且 $AF \perp PB$ 。

\because PB 与平面 AEF 内两条相交直线 EF、AF 都垂直， $\therefore PB \perp$ 平面 AEF。

连结 BE 交 AC 于 G，作 $GH \parallel BP$ 交 EF 于 H，则 $GH \perp$ 平面 AEF， $\angle GAH$ 为 AC 与平面 AEF 所成的角。

$$\text{由 } \triangle EGC \sim \triangle BGA \text{ 可知 } EG = \frac{1}{2}GB, EG = \frac{1}{3}EB, AG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

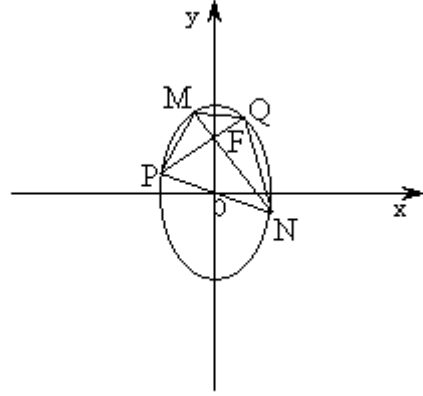
$$\text{由 } \triangle ECH \sim \triangle EBF \text{ 可知 } GH = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \angle GAH = \frac{GH}{AG} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\therefore AC \text{ 与平面 } AEF \text{ 所成的角为 } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

21. 本小题主要考查椭圆和直线的方程与性质，两条直线垂直的条件，两点间的距离，不等式的性质等基本知识及综合分析能力。满分 14 分。

解：如图，由条件知 MN 和 PQ 是椭圆的两条弦，相交于焦点 F (0, 1)，且 $PQ \perp MN$ ，直线 PQ、NM 中至少有一条存在斜率，不妨设 PQ 的斜率为 k 。



又 PQ 过点 F (0, 1)，故 PQ 方程为 $y = kx + 1$ ，将此式代入椭圆方程得

$$(2 + k^2)x^2 + 2kx - 1 = 0$$

设 P、Q 两点的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ，

则

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}, \quad x_2 = \frac{-k + \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}$$

$$\text{从而 } |PQ|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{8(1 + k^2)^2}{(2 + k^2)^2}, \quad \therefore |PQ| = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{2 + k^2}$$

$$(1) \text{ 当 } k \neq 0 \text{ 时, MN 的斜率为 } -\frac{1}{k}, \text{ 同上可推得 } |MN| = \frac{2\sqrt{2}(1 + (-\frac{1}{k})^2)}{2 + (-\frac{1}{k})^2}$$

$$\text{故四边形的面积 } S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = \frac{4(1 + k^2)(1 + \frac{1}{k^2})}{(2 + k^2)(2 + \frac{1}{k^2})} = \frac{4(2 + k^2 + \frac{1}{k^2})}{5 + 2k^2 + \frac{2}{k^2}}$$

$$\text{令 } u = k^2 + \frac{1}{k^2}, \text{ 得 } S = \frac{4(2 + u)}{5 + 2u} = 2(1 - \frac{1}{5 + 2u})$$

$$\text{因为 } u = k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2,$$

$$\text{当 } k = \pm 1 \text{ 时, } u = 2, S = \frac{16}{9}, \text{ 且 } S \text{ 是以 } u \text{ 为自变量的增函数,}$$

$$\text{所以 } \frac{16}{9} \leq S < 2.$$

$$(2) \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, MN 为椭圆长轴, } |MN| = 2\sqrt{2}, |PQ| = \sqrt{2},$$

$$S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = 2$$

综合 (1)、(2) 知，四边形 PMQN 面积的最大值为 2，最小值为 $\frac{16}{9}$ 。

22. 本小题主要考查导数的概念和计算, 应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力。
满分 12 分。

解: (I) 对函数 $f(x)$ 求导数, 得 $f'(x) = (x^2 - 2ax)e^x + (2x - 2a)e^x = [x^2 + 2(1-a)x - 2a]e^x$.

已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$.




(I) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;

(II) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.

令 $f'(x) = 0$, 得 $[x^2 + 2(1-a)x - 2a]e^x = 0$, 从而 $x^2 + 2(1-a)x - 2a = 0$,

解得 $x_1 = a - 1 - \sqrt{1+a^2}$, $x_2 = a - 1 + \sqrt{1+a^2}$, 其中 $x_1 < x_2$

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

当 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取到极大值, 在 $x = x_2$ 处取到极小值。

当 $a \geq 0$ 时, $x_1 < -1$, $x_2 \geq 0$, $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上为减函数, 在 $(x_2, +\infty)$ 上为增函数,

而当 $x < 0$ 时, $f(x) = x(x - 2a)e^x > 0$; 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$.

所以当 $x = a - 1 + \sqrt{1+a^2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值。

(II) 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为单调函数的充要条件是 $x_2 \geq 1$,

即 $a - 1 + \sqrt{1+a^2} \geq 1$, 解得 $a \geq \frac{3}{4}$ 。

综上, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为单调函数的充要条件 $a \geq \frac{3}{4}$ 。

即 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 。