

2007 年四川高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 到 10 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。
3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

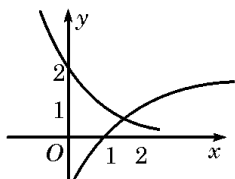
其中 R 表示球的半径

一. 选择题：

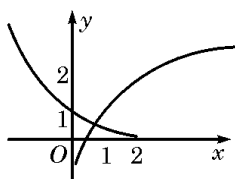
(1) 复数 $\frac{1+i}{1-i} + i^2$ 的值是

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 1

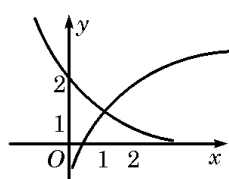
(2) 函数 $f(x) = 1 + \log_2 x$ 与 $g(x) = 2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是



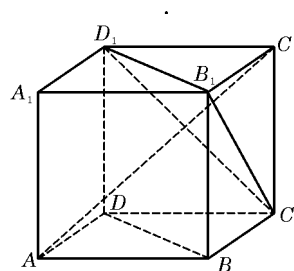
(A)



(B)



(C)



(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =$

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

(4) 如图， $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是

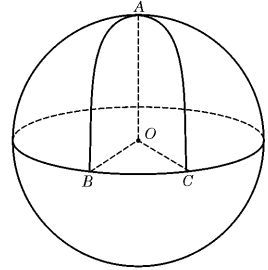
- (A) $BD \parallel$ 平面 CB_1D_1 (B) $AC_1 \perp BD$
 (C) $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 (D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 60°

(5) 如果双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是

- (A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$

(6) 设球 O 的半径是 1, A, B, C 是球面上三点, 已知 A 到 B, C 两点的球面距离都是 $\frac{\pi}{2}$, 且三面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B, C 两点再回到 A 点的最短距离是

- (A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{4}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$



(7) 设 $A \{a, 1\}, B \{2, b\}, C \{4, 5\}$, 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 \vec{OA} 与 \vec{OB} 在 \vec{OC} 方向上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为

- (A) $4a - 5b = 3$ (B) $5a - 4b = 3$
(C) $4a + 5b = 14$ (D) $5a + 4b = 14$

(8) 已知抛物线 $y = -x^2 + 3$ 上存在关于直线 $x + y = 0$ 对称的相异两点 A, B , 则 $|AB|$ 等于

- (A) 3 (B) 4 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

(9) 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为

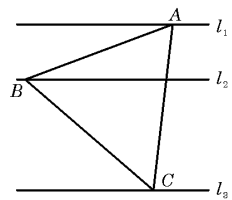
- (A) 36 万元 (B) 31.2 万元 (C) 30.4 万元 (D) 24 万元

(10) 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有

- (A) 288 个 (B) 240 个 (C) 144 个 (D) 126 个

(11) 如图, l_1, l_2, l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1, l_2, l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{17}}{4}$ (D) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$



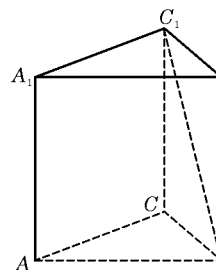
(12) 已知一组抛物线 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$, 其中 a 为 2, 4, 6, 8 中任取的一个数, b 为 1, 3, 5, 7 中任取的一个数, 从这些抛物线中任意抽取两条, 它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{7}{60}$ (C) $\frac{6}{25}$ (D) $\frac{5}{25}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在横线上.

(13) 若函数 $f(x) = e^{-(m-x)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m , 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m^+ + e^m =$ _____.

(14) 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是_____.



(15) 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是_____.

(16) 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4x-\cos^4x$ 的最小正周期是 π .

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\{a \mid a=\frac{k\pi}{2}, k \in Z\}$.

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点.

④ 把函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象.

⑤ 函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ 在 $(0, \pi)$ 上是减函数.

其中真命题的序号是_____ (写出所言)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分) 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

(I) 求 $\tan 2\alpha$ 的值.

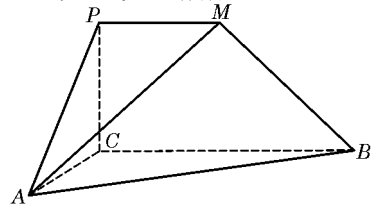
(II) 求 β .

(18) (本小题满分 12 分) 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家将一批产品发给商家时, 商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验, 以决定是否接收这批产品.

(I) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8, 从中任意取出 4 件进行检验. 求至少有 1 件是合格品的概率;

(II) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 都进行检验, 只有 2 件都合格时才接收这批产品, 否则拒收. 求该商家可能检验出不合格产品数 ξ 的分布列及期望 $E\xi$, 并求该商家拒收这批产品的概率.

(19) (本小题满分 12 分) 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB = 90^\circ$, $PM \parallel BC$, $PM = 1$, $BC = 2$, 又 $AC = 1$, $\angle ACB = 120^\circ$, $AB \perp PC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60° .



- (I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;
- (II) 求二面角 $M - AC - B$ 的大小;
- (III) 求三棱锥 $P - MAC$ 的体积.

(20) (本小题满分 12 分) 设 F_1 、 F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点.

- (I) 若 P 是该椭圆上的一个动点, 求 $PF_1 \cdot PF_2$ 的最大值和最小值;
- (II) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A 、 B , 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

已知函数 $f(x) = x^2 + 4$, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(n, f(n))$ 处的切线与 x 轴交于点 $(a, 0)$ 其中 x_n 为实数

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + 4$, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(n, f(n))$ 处的切线与 x 轴交于点 $(a, 0)$ 其中 x_n 为实数

- (I) 用 a 表示 n
- (II) 求 a 的取值范围

(22) (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in N$, 且 $n > 1, x \in N$).

- (I) 当 $x=6$ 时, 求 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项;
- (II) 对任意的实数 x , 证明 $\frac{f(2x) + f(2)}{2} > f'(x)$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数);
- (III) 是否存在 $a \in N$, 使得 $a^n < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) < (a+1)n$ 恒成立? 若存在, 试证明你的结论并求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

参考答案

一. 选择题: 本题考察基础知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 60 分

- (1) A (2) C (3) D (4) D (5) A (6) C
 (7) A (8) C (9) B (10) B (11) D (12) B

二. 填空题: 本题考察基础知识和基本运算, 每小题 4 分, 满分 16 分

- (13) 1 (14) $\frac{\pi}{6}$ (15) $x = \frac{3}{2}$ (16) ① ④

三. 解答题:

(17) 本题考察三角恒等变形的的主要基本公式、三角函数值的符号, 已知三角函数值求角以及计算能力。

解: (I) 由 $\cos \alpha = \frac{1}{7}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 得 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{7}{1} = 4\sqrt{3}$, 于是 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 4\sqrt{3}}{1 - (4\sqrt{3})^2} = -\frac{8\sqrt{3}}{47}$

(II) 由 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 得 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

又 $\because \cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, $\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

由 $\beta = \alpha - (\alpha - \beta)$ 得:

$\cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{7} \times \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}$

所以 $\beta = \frac{\pi}{3}$

(18) 本题考察相互独立事件、互斥事件等的概率计算, 考察随机事件的分布列, 数学期望等, 考察运用所学知识与方法解决实际问题的能力。

解: (I) 记“厂家任取 4 件产品检验, 其中至少有 1 件是合格品”为事件 A

用对立事件 \bar{A} 来算, 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.2^4 = 0.9984$

(II) ξ 可能的取值为 0, 1, 2

$P(\xi = 0) = \frac{C_{17}^2}{C_{20}^2} = \frac{136}{190}$, $P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 C_{17}^1}{C_{20}^2} = \frac{51}{190}$, $P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{20}^2} = \frac{3}{190}$

ξ	0	1	2
P	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

$$E\xi = 0 \times \frac{136}{190} + 1 \times \frac{51}{190} + 2 \times \frac{3}{190} = \frac{3}{10}$$

记“商家任取2件产品检验，都合格”为事件B，则商家拒收这批产品的概率

$$P = 1 - P(B) = 1 - \frac{136}{190} = \frac{27}{95}$$

所以商家拒收这批产品的概率为 $\frac{27}{95}$

(19) 本题主要考察异面直线所成的角、平面与平面垂直、二面角、三棱锥体积等有关知识，考察思维能力和空间想象能力、应用向量知识解决数学问题的能力、化归转化能力和推理运算能力。

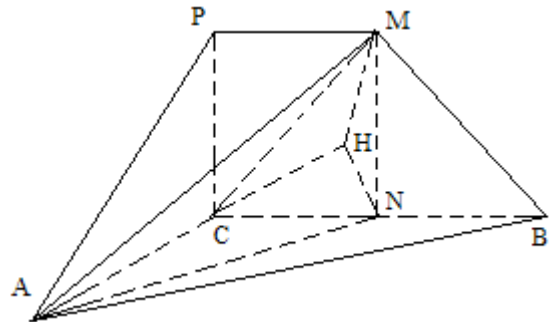
解法一：

(I) $\because PC \perp AB, PC \perp BC, AB \cap BC = B$

$\therefore PC \perp$ 平面 ABC ,

又 $\because PC \subset$ 平面 PAC

\therefore 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC



(II) 取 BC 的中点 N ，则 $CN = 1$ ，连结 AN, MN ，

$\because PM \parallel CN, \therefore MN \parallel PC$ ，从而 $MN \perp$ 平面 ABC

作 $NH \perp AC$ ，交 AC 的延长线于 H ，连结 MH ，则由三垂线定理知， $AC \perp NH$ ，从而 $\angle MHN$ 为二面角 $M-AC-B$ 的平面角

直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°

$\therefore \angle AMN = 60^\circ$

在 $\triangle ACN$ 中，由余弦定理得 $AN = \sqrt{AC^2 + CN^2 - 2AC \cdot CN \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$

在 $\triangle AMN$ 中， $MN = AN \cdot \cot \angle AMN = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$

在 $\triangle CNH$ 中， $NH = CN \cdot \sin \angle NCH = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

在 $\triangle MNH$ 中， $MN = \tan \angle MHN = \frac{MN}{NH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

故二面角 $M-AC-B$ 的平面角大小为 $\arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(III) 由 (II) 知, $PCMN$ 为正方形

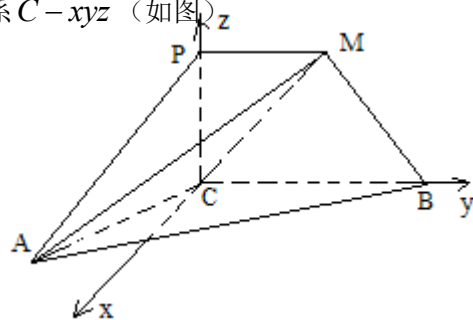
$$\therefore V_{P-MAC} = V_{A-PCM} = V_{A-MNC} = V_{M-ACN} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC \cdot CN \cdot \sin 120^\circ \cdot MN = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

解法二: (I) 同解法一

(II) 在平面 ABC 内, 过 C 作 $CD \perp CB$, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$ (如图)

由题意有 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $P(0, 0, z_0) (z_0 > 0)$,

则 $M(0, 1, z_0), \overrightarrow{AM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, z_0\right), \overrightarrow{CP} = (0, 0, z_0)$



由直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60° , 得

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CP} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{CP}| \cdot \cos 60^\circ, \text{ 即 } z_0^2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{z_0^2 + 3} \cdot z_0, \text{ 解得 } z_0 = 1$$

$\therefore \overrightarrow{CM} = (0, 0, 1), \overrightarrow{CA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, 设平面 MAC 的一个法向量为 $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$,

$$\text{则 } \begin{cases} y_1 + z_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x_1 = 1, \text{ 得 } \vec{n} = \{1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

平面 ABC 的法向量取为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$$\text{设 } \vec{m} \text{ 与 } \vec{n} \text{ 所成的角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

显然, 二面角 $M-AC-B$ 的平面角为锐角,

故二面角 $M-AC-B$ 的平面角大小为 $\arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$

(III) 取平面 PCM 的法向量取为 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$, 则点 A 到平面 PCM 的距离

$$h = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PC}| = 1, |\overrightarrow{PM}| = 1, \therefore$$

$$V_{P-MAC} = V_{A-PCM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} |\overline{PC}| \cdot |\overline{PM}| \cdot h = \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

(20) 本题主要考察直线、椭圆、平面向量的数量积等基础知识，以及综合应用数学知识解决问题及推理计算能力。

解：(I) 解法一：易知 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$

所以 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，设 $P(x, y)$ ，则

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = (-\sqrt{3}-x, -y) \cdot (\sqrt{3}-x, -y) = x^2 + y^2 - 3 = x^2 + 1 - \frac{x^2}{4} - 3 = \frac{1}{4}(3x^2 - 8)$$

因为 $x \in [-2, 2]$ ，故当 $x=0$ ，即点 P 为椭圆短轴端点时， $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ 有最小值 -2

当 $x = \pm 2$ ，即点 P 为椭圆长轴端点时， $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ 有最大值 1

解法二：易知 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$ ，所以 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，设 $P(x, y)$ ，则

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} &= |\overline{PF_1}| \cdot |\overline{PF_2}| \cdot \cos \angle F_1 P F_2 = |\overline{PF_1}| \cdot |\overline{PF_2}| \cdot \frac{|\overline{PF_1}|^2 + |\overline{PF_2}|^2 - |\overline{F_1 F_2}|^2}{2|\overline{PF_1}| \cdot |\overline{PF_2}|} \\ &= \frac{1}{2} \left[(x+\sqrt{3})^2 + y^2 + (x-\sqrt{3})^2 + y^2 - 12 \right] = x^2 + y^2 - 3 \quad (\text{下同解法一}) \end{aligned}$$

(II) 显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 $l: y=kx-2, A(x_1, y_2), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y=kx-2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } y, \text{整理得: } \left(k^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + 4kx + 3 = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{4k}{k^2 + \frac{1}{4}}, x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{k^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\text{由 } \Delta = (4k)^2 - 4\left(k + \frac{1}{4}\right) \times 3 = 4k^2 - 3 > 0 \text{ 得: } k < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } k > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又 } 0^\circ < \angle AOB < 90^\circ \Leftrightarrow \cos \angle AOB > 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} > 0$$

$$\therefore \overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0$$

$$\text{又 } y_1 y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{3k^2}{k^2 + \frac{1}{4}} + \frac{-8k^2}{k^2 + \frac{1}{4}} + 4 = \frac{-k^2 + 1}{k^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\therefore \frac{3}{k^2 + \frac{1}{4}} + \frac{-k^2 + 1}{k^2 + \frac{1}{4}} > 0, \text{ 即 } k^2 < 4 \quad \therefore -2 < k < 2$$

$$\text{故由①、②得 } -2 < k < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2$$

(21) 本题综合考察数列、函数、不等式、导数应用等知识，以及推理论证、计算及解决问题的能力。

解：(I) 由题可得 $f'(x) = 2x$

所以过曲线上点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为 $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$,

$$\text{即 } y - (x_n - 4) = 2x_n(x - x_n)$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } -(x_n^2 - 4) = 2x_n(x_{n+1} - x_n), \text{ 即 } x_n^2 + 4 = 2x_n x_{n+1}$$

$$\text{显然 } x_n \neq 0 \quad \therefore x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$$

(II) 证明：(必要性)

若对一切正整数 $n, x_{n+1} \leq x_n$, 则 $x_2 \leq x_1$, 即 $\frac{x_1}{2} + \frac{2}{x_1} \leq x_1$, 而 $x_1 > 0$, $\therefore x_1^2 \geq 4$, 即有 $x_1 \geq 2$

(充分性) 若 $x_1 \geq 2 > 0$, 由 $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$

用数学归纳法易得 $x_n > 0$, 从而 $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} \geq 2\sqrt{\frac{x_n}{2} \cdot \frac{2}{x_n}} = 2(n \geq 1)$, 即 $x_n \geq 2(n \geq 2)$

$$\text{又 } x_1 \geq 2 \quad \therefore x_n \geq 2(n \geq 2)$$

$$\text{于是 } x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} - x_n = \frac{4 - x_n^2}{2x_n} = \frac{(2 - x_n)(2 + x_n)}{2x_n} \leq 0,$$

即 $x_{n+1} \leq x_n$ 对一切正整数 n 成立

(III) 由 $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$, 知 $x_{n+1} + 2 = \frac{(x_n + 2)^2}{2x_n}$, 同理, $x_{n+1} - 2 = \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n}$

$$\text{故 } \frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 2} = \left(\frac{x_n + 2}{x_n - 2} \right)^2$$

从而 $\lg \frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 2} = 2 \lg \frac{x_n + 2}{x_n - 2}$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$

所以, 数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 故 $a_n = 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1} \lg \frac{x_1 + 2}{x_1 - 2} = 2^{n-1} \lg 3$,

即 $\lg \frac{x_n + 2}{x_n - 2} = 2^{n-1} \lg 3$, 从而 $\frac{x_n + 2}{x_n - 2} = 3^{2^{n-1}}$

$$\text{所以 } x_n = \frac{2(3^{2^{n-1}} + 1)}{3^{2^{n-1}} - 1}$$

(22) 本题考察函数、不等式、导数、二项式定理、组合数计算公式等内容和数学思想方法。考查综合推理论证与分析解决问题的能力及创新意识。

(I) 解: 展开式中二项式系数最大的项是第 4 项, 这项是 $C_6^3 1^5 \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{20}{n^3}$

$$\begin{aligned} \text{(II) 证法一: } f(2x) + f(2) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &\geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &> 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \geq 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2f'(x) \end{aligned}$$

证 法 二 : 因

$$f(2x) + f(2) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{而 } 2f'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

故只需对 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 和 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 进行比较。

令 $g(x) = x - \ln x (x \geq 1)$, 有 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

由 $\frac{x-1}{x} = 0$, 得 $x = 1$

因为当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以在 $x = 1$ 处 $g(x)$ 有极小值 1

故当 $x > 1$ 时, $g(x) > g(1) = 1$,

从而有 $x - \ln x > 1$, 亦即 $x > \ln x + 1 > \ln x$

故有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 恒成立。

所以 $f(2x) + f(2) \geq 2f'(x)$, 原不等式成立。

(III) 对 $m \in N$, 且 $m > 1$

$$\begin{aligned} \text{有 } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= C_m^0 + C_m^1 \left(\frac{1}{m}\right) + C_m^2 \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \cdots + C_m^k \left(\frac{1}{m}\right)^k + \cdots + C_m^m \left(\frac{1}{m}\right)^m \\ &= 1 + 1 + \frac{m(m-1)}{2!} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{m}\right)^k + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots 2 \cdot 1}{m!} \left(\frac{1}{m}\right)^m \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &< 2 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \cdots + \frac{1}{k(k-1)} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{m} < 3 \end{aligned}$$

又因 $C_m^k \left(\frac{1}{m}\right)^k > 0 (k = 2, 3, 4, \dots, m)$, 故 $2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$

$\therefore 2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$, 从而有 $2n < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3n$ 成立,

即存在 $a = 2$ ，使得 $2n < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3n$ 恒成立。