2015 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（文科）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、 已知 $\frac{(1-i)^2}{z}=1+i$ （i 为虚数单位），则复数 $z=$（　　）

A、$1+i$　　　　B、$1-i$　　　　C、　$-1+i$　　　　D、$-1-i$

【答案】D

【解析】学科网

由题 $\frac{(1-i)^2}{z}=1+i, \therefore z=\frac{(1-i)^2}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{2}=-1-i$ ，故选 D.

【考点定位】复数的运算

【名师点睛】在对复数之间进行乘法运算时，直接利用多项式的乘法分配律进行计算，在最后一步的计算中，根据 $i^2=-1$，最后根据复数的加法原则，实部与实部相加，虚部与虚部相加便可得到最终结果；在进行复数的除法运算时，首先将分式的分子分母同时乘以分母的共轭复数，分子的运算遵循复数的乘法运算法则，从而得到相应的结果.

2、 在一次马拉松比赛中，35 名运动员的成绩（单位：分钟）如图 I 所示;

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号，再用系统抽样方法从中抽取 7 人，则其中成绩在区间[139,151]上的运动员人数为(　　)

A、3　　　　B、4　　　　C、5　　　　D、6

【答案】B

【解析】根据茎叶图中的数据，得：成绩在区间[139，151]上的运动员人数是 20，用系统抽样方法从 35 人中抽取 7 人，成绩在区间[139，151]上的运动员应抽取 $7\times\frac{20}{35}=4$ (人),故选 B.

【考点定位】茎叶图

【名师点睛】系统抽样是指当总体中个数较多时，将总体分成均衡的几部分，然后按照预先定出的规则，从每一部分抽取 1 个个体，得到所需要的样本的抽样方法，其实质为等距抽样. 茎叶图的优点是保留了原始数据，便于记录及表示，能反映数据在各段上的分布情况. 缺点为不能直接反映总体的分布情况. 由数据集中情况可以估计平均数大小，再根据其分散程度可以估测方差大小.

3、设 $x\in$R，则“$x>1$”是“$x^2>1$”的（　　）

A、充分不必要条件　　　　B、必要不充分条件

C、充要条件　　　　D、既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】由题易知“$x>1$”可以推得“$x^2>1$”，“$x^2>1$”不一定得到“$x>1$”，所以“$x>1$”是“$x^2>1$”的充分不必要条件，故选 A. 学科网

【考点定位】充要关系

【名师点睛】判断充分条件和必要条件的方法

(1)命题判断法：

设“若 p，则 q”为原命题，那么：

①原命题为真，逆命题为假时，p 是 q 的充分不必要条件；

②原命题为假，逆命题为真时，p 是 q 的必要不充分条件；

③原命题与逆命题都为真时，p 是 q 的充要条件；

④原命题与逆命题都为假时，p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)集合判断法：

从集合的观点看，建立命题 p，q 相应的集合：p：$A=\{x|p(x)$成立$\}$，q：$B=\{x|q(x)$成立$\}$，那么：

①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 A□B 时，则 p 是 q 的充分不必要条件；

②若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；若 B□A 时，则 p 是 q 的必要不充分条件；

③若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即 $A=B$ 时，则 p 是 q 的充要条件.

(3)等价转化法：

p 是 q 的什么条件等价于綈 q 是綈 p 的什么条件.

4、若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ y-x\leq 1 \\ x\leq 1 \end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最小值为(　　)

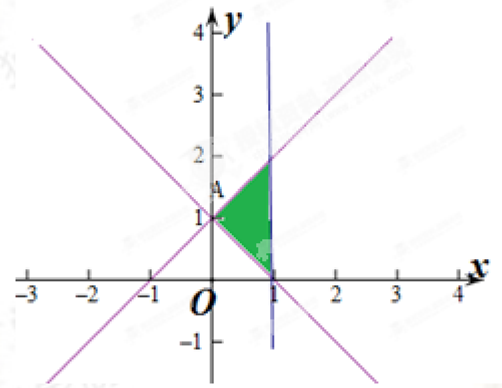
A、-1　　　　B、0　　　　C、1　　　　D、2

【答案】A

【解析】

由约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ y-x\leq 1 \\ x\leq 1 \end{cases}$ 作出可行域如图，由图可知，最优解为A，联立 $\begin{cases} x+y=1 \\ y-x=1 \end{cases}\therefore\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}\therefore A(0,1)$ ，

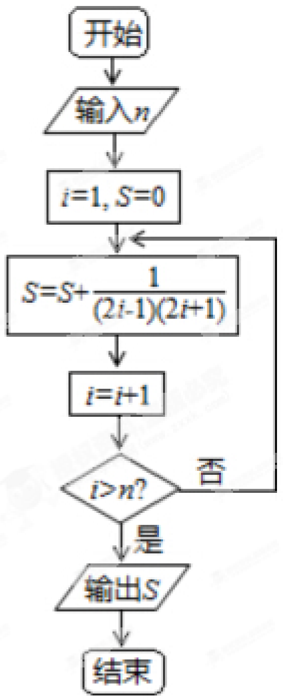
$\therefore z=2x-y$ 在点A处取得最小值为-1．故选：A．学科网



【考点定位】简单的线性规划

【名师点睛】求目标函数的最值的一般步骤为：一画二移三求．其关键是准确作出可行域，理解目标函数的意义．常见的目标函数有：(1)截距型：形如 $z=ax+by$，求这类目标函数的最值常将函数 $z=ax+by$ 转化为直线的斜截式：$y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}z,(b\neq 0)$，通过求直线的截距 $\frac{z}{b}$ 的最值间接求出 z 的最值．(2)距离型：形如 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$．(3)斜率型：形如 $z=\frac{y-b}{x-a}$．注意：转化的等价性及几何意义．

5、执行如图2所示的程序框图，如果输入 n=3，中输入的 S=(　　)



A、$\frac{6}{7}$　　B、$\frac{3}{7}$　　C、$\frac{8}{9}$　　D、$\frac{4}{9}$

【答案】B

【解析】由题根据所给程序框图不难得到所求 S 值即是求递推数列的连续前 3 项的和；

由题 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}=\frac{3}{7}$ ，故选 B. 学科网

【考点定位】程序框图

【名师点睛】识别运行算法流程图和完善流程图是高考的热点．解答这一类问题，第一，要明确流程图的顺序结构、条件结构和循环结构；第二，要识别运行流程图，理解框图所解决的实际问题；第三，按照题目的要求完成解答．对流程图的考查常与数列和函数等知识相结合，进一步强化框图问题的实际背景．

6、若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线经过点（3，-4），则此双曲线的离心率为(　　)

A、$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　B、$\frac{5}{4}$　　C、$\frac{4}{3}$　　D、$\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线经过点（3，-4），

$\therefore 3b=4a, \therefore 9(c^2-a^2)=16a^2, \therefore e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$

故选 D.

【考点定位】双曲线的简单性质

【名师点睛】渐近线是双曲线独特的性质，在解决有关双曲线问题时，需结合渐近线从数形结合上找突破口. 与渐近线有关的结论或方法还有：(1)与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$共渐近线的可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$；(2)若渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，则可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$；(3) 双曲线的焦点到渐近线的距离等于虚半轴长$b$；(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0.b>0)$的一条渐近线的斜率为$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}$. 可以看出，双曲线的渐近线和离心率的实质都表示双曲线张口的大小．另外解决不等式恒成立问题关键是等价转化，其实质是确定极端或极限位置.

7、若实数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则$ab$的最小值为(　　)

A、$\sqrt{2}$　　　　B、2　　　　C、$2\sqrt{2}$　　　　D、4

【答案】C

【解析】

$\because \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}, \therefore a>0,\ b>0, \because \sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{2}{ab}}, \therefore ab\geq 2\sqrt{2}$，(当且仅当$b=2a$时取等号)，所以$ab$的最小值为$2\sqrt{2}$，故选 C. 学科网

【考点定位】基本不等式

【名师点睛】基本不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能，因此可以用在一些不等式的证明中，还可以用于求代数式的最值或取值范围．如果条件等式中，同时含有两个变量的和与积的形式，就可以直接利用基本不等式对两个正数的和与积进行转化，然后通过解不等式进行求解.

8、设函数$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，则$f(x)$是(　　)

A、奇函数，且在（0,1）上是增函数　　　　B、奇函数，且在（0,1）上是减函数

C、偶函数，且在（0,1）上是增函数　　　　D、偶函数，且在（0,1）上是减函数

【答案】A

【解析】

函数$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，函数的定义域为（-1，1），函数$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$所以函数是奇函数.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}$，在（0,1）上 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在(0,1)上单调递增，故选 A.

【考点定位】利用导数研究函数的性质

【名师点睛】利用导数研究函数 $f(x)$ 在(a，b)内的单调性的步骤：(1)求 $f'(x)$；(2)确认 $f'(x)$ 在(a，b)内的符号；(3)作出结论：$f'(x)>0$ 时为增函数；$f'(x)<0$ 时为减函数．研究函数性质时，首先要明确函数定义域.

9、已知点 A,B,C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 AB⊥BC，若点 P 的坐标为（2，0），则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最大值为(　　)

A、6　　　　B、7　　　　C、8　　　　D、9

【答案】B

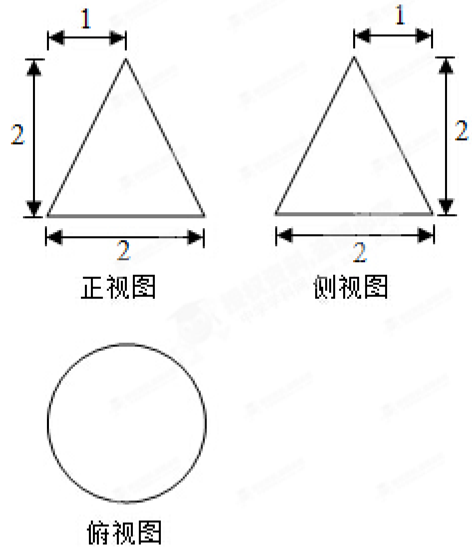
【解析】由题意，AC 为直径，所以 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=\left|2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\right|\le 4+\left|\overrightarrow{PB}\right|\le 4+3=7$，当且仅当点 B 为（-1，0）时，$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 取得最大值 7，故选 B. 学科网

【考点定位】直线与圆的位置关系、平面向量的运算性质

【名师点睛】与圆有关的最值问题是命题的热点内容，它着重考查数形结合与转化思想．由平面几何知识知，圆上的一点与圆外一定点距离最值在定点和圆心连线与圆的两个交点处取到．圆周角为直角的弦为圆的半径，平面向量加法几何意义这些小结论是转化问题的关键.

10、某工作的三视图如图 3 所示，现将该工作通过切削，加工成一个体积尽可能大的正方体新工件，并使新工件的一个面落在原工作的一个面内，则原工件材料的利用率为（材料利用率=新工件的体积/原工件的体积）

A、$\frac{8\pi}{9}$　　　　B、$\frac{8}{27\pi}$　　　　C、$\frac{24(\sqrt{2}-1)^2}{\pi}$　　　　D、$\frac{8(\sqrt{2}-1)^2}{\pi}$

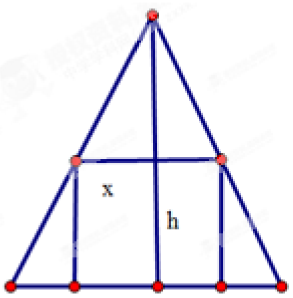


【答案】A

【解析】由题可得，问题等价于圆锥的内接长方体的体积，如图所示，则有 $\frac{x}{1}=\frac{2-h}{2}$，$\therefore h=2-2x$，

所以长方体体积为 $x^2h=(2x)^2(2-2x)=4x\cdot x\cdot(2-2x)\le 4\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{32}{27}$，当且仅当

$x=2-2x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时，等号成立，故利用率为 $\frac{\frac{32}{27}}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2}=\frac{16}{9\pi}$，故选 A. 学科网



【考点定位】三视图、基本不等式求最值、圆锥的内接长方体

【名师点睛】运用基本不等式求最值要紧紧抓住“一正二定三相等”条件，本题“和为定”是解决问题的关键.空间想象能力是解决三视图的关键，可从长方体三个侧面进行.想象几何体.求组合体的体积，关键是确定组合体的组成形式及各部分几何体的特征，再结合分割法、补体法、转化法等方法求体积.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11、已知集合 U=$\{1,2,3,4\}$，A=$\{1,3\}$,B=$\{1,3,4\}$,则 A$\cup$($\complement_U B$)=_____.

【答案】 {1，2，3}.

【解析】由题$\complement_U B=\{2\}$，所以 A$\cup$($\complement_U B$)={1，2，3}.

【考点定位】集合的运算

【名师点睛】研究集合问题，一定要抓住元素，看元素应满足的属性. 研究两集合的关系时，关键是将两集合的关系转化为元素间的关系，本题实质求满足属于集合 A 或不属于集合 B 的元素的集合. 本题需注意检验集合的元素是否满足互异性，否则容易出错.

12、在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2sin\theta$，则曲线 C 的直角坐标方程为_____.

【答案】$x^2+(y-1)^2=1$

【解析】

试题分析：将极坐标化为直角坐标，求解即可.

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2sn\theta,\therefore \rho^2=2\rho sn\theta$ ，它的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y$ ，

$\therefore x^2+(y-1)^2=1$. 故答案为：$x^2+(y-1)^2=1$. 学科网

【考点定位】圆的极坐标方程

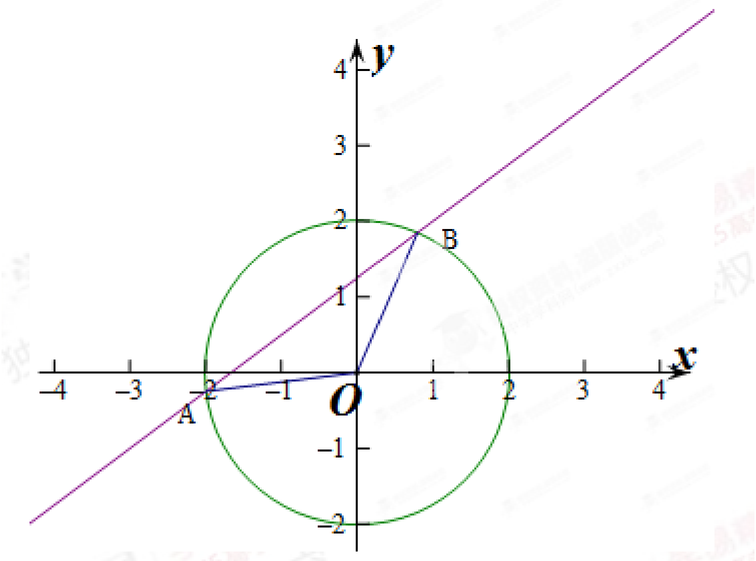
【名师点睛】1. 运用互化公式：$\rho^2=x^2+y^2, y=\rho\sin\theta, x=\rho\cos\theta$ 将极坐标化为直角坐标；

2. 直角坐标方程与极坐标方程的互化，关键要掌握好互化公式，研究极坐标系下图形的性质，可转化直角坐标系的情境进行.

13. 若直线 $3x-4y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$ 相交于 A,B 两点，且 $\angle AOB=120^o$（O 为坐标原点），则 $r=$_____.

【答案】

【解析】如图直线 $3x-4y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，且 $\angle AOB=120^o$，则圆心（0，0）到直线 $3x-4y+5=0$ 的距离为 $\frac{1}{2}r$ ，$\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}r,\therefore r=2$.故答案为 2.



【考点定位】直线与圆的位置关系

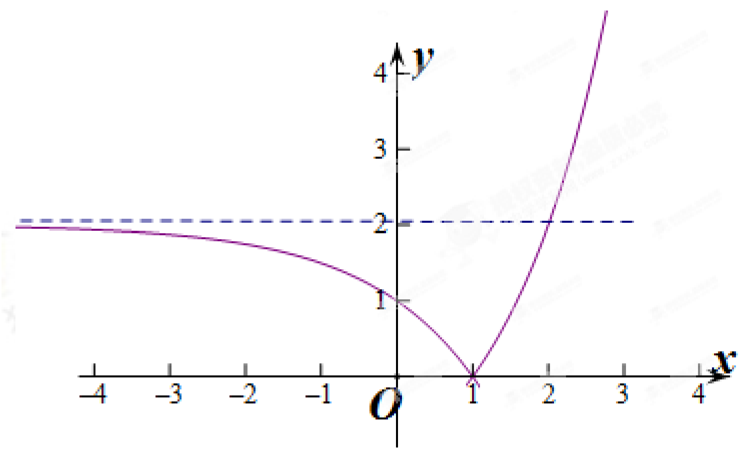
【名师点睛】涉及圆的弦长的常用方法为几何法：设圆的半径为r，弦心距为d，弦长为l，则$(\frac{l}{2})^2=r^2-d^2$.

本题条件是圆心角，可利用直角三角形转化为弦心距与半径之间关系，再根据点到直线距离公式列等量关系.

14、若函数$f(x)=|2^x-2|-b$有两个零点，则实数b的取值范围是_____.

【答案】$0<b<2$

【解析】由函数$f(x)=|2^x-2|-b$有两个零点，可得$|2^x-2|=b$有两个不等的根，从而可得函数$y=|2^x-2|$函数$y=b$的图象有两个交点，结合函数的图象可得，$0<b<2$，故答案为：$0<b<2$.学科网



【考点定位】函数零点

【名师点睛】已知函数有零点(方程有根)求参数取值范围常用的方法

(1)直接法：直接根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围.

(2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数值域问题加以解决.

(3)数形结合法：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图像，然后数形结合求解.

15、已知ω>0,在函数 y=2sinωx 与 y=2cosωx 的图像的交点中，距离最短的两个交点的距离为$2\sqrt{3}$，则ω =_____.

【答案】$\omega=\frac{\pi}{2}$

【解析】由题根据三角函数图像与性质可得交点坐标为

$(\frac{1}{\omega}(k_1\pi+\frac{\pi}{4},2)$，$(\frac{1}{\omega}(k_2\pi+\frac{5\pi}{4},-2)$，$k_1$，$k_2\in Z^+$，距离最短的两个交点一定在同一个周期内，

$\therefore\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{\omega^2}(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4})^2+(-2-2)^2,\therefore\omega=\frac{\pi}{2}$．学科网

【考点定位】三角函数图像与性质

【名师点睛】正、余弦函数的图像既是中心对称图形，又是轴对称图形. 应把三角函数的对称性与奇偶性结合，体会二者的统一.这样就能理解条件“距离最短的两个交点” 一定在同一个周期内，本题也可从五点作图法上理解.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. （本小题满分 12 分）某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额的商品后即可抽奖，抽奖方法是：从装有 2 个红球A_1,A_2和 1 个白球B的甲箱与装有 2 个红球a_1,a_2和 2 个白球b_1,b_2的乙箱中，各随机摸出 1 个球，若摸出的 2 个球都是红球则中奖，否则不中奖。

（I）用球的标号列出所有可能的摸出结果；

（II）有人认为：两个箱子中的红球比白球多，所以中奖的概率大于不中奖的概率，你认为正确吗？请说明理由。

【答案】(I) $\{A_1,a_1\},\{A_1,a_2\},\{A_1,b_1\},\{A_1,b_2\},\{A_2,a_1\},\{A_2,a_2\},$

$\{A_2,b_1\},\{A_2,b_2\},\{B,a_1\},\{B,a_2\},\{B,b_1\},\{B,b_2\},$ (II) 说法不正确；

【解析】

试题分析：(I) 利用列举法列出所有可能的结果即可；(II)在 (I) 中摸出的 2 个球都是红球的结果数，然后利用古典概率公式计算即可得到其对应的概率，中奖概率大于不中奖概率是错误的；

试题解析：(I) 所有可能的摸出结果是：$\{A_1,a_1\},\{A_1,a_2\},\{A_1,b_1\},\{A_1,b_2\},\{A_2,a_1\},\{A_2,a_2\},$

$\{A_2,b_1\},\{A_2,b_2\},\{B,a_1\},\{B,a_2\},\{B,b_1\},\{B,b_2\},$

（II）不正确，理由如下：

由（I）知，所有可能的摸出结果共 12 种，其中摸出的 2 个球都是红球的结果为 $\{A_1,a_1\},\{A_1,a_2\},\{A_2,a_1\},\{A_2,a_2\}$，共 4 种，所以中奖的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，不中奖的概率为 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$，故这种说法不正确。

【考点定位】概率统计

【名师点睛】古典概型中基本事件的探求方法

1．枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的．

2．树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求，注意在确定基本事件时(x，y)可以看成是有序的，如(1,2)与(2,1)不同．有时也可以看成是无序的，如(1,2)(2,1)相同．

17．（本小题满分 12 分）设 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,a=b\tan A$．

（I）证明：$\sin B=\cos A$；

(II) 若 $\sin C-\sin A\cos B=\frac{3}{4}$，且 B 为钝角，求 A,B,C．

【答案】（I）略；(II) $A=30^\circ,B=120^\circ,C=30^\circ$.

【解析】

试题分析：（I）由题根据正弦定理结合所给已知条件可得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sin B}$，所以 $\sin B=\cos A$；(II)根据两角和公式化简所给条件可得 $\sin C-\sin A\cos B=\cos A\sin B=\frac{3}{4}$，可得 $\sin^2 B=\frac{3}{4}$，结合所给角 B 的范围可得角 B,进而可得角 A,由三角形内角和可得角 C.

试题解析：（I）由 $a=b\tan A$ 及正弦定理，得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，所以 $\sin B=\cos A$。

（II）因为 $\sin C-\sin A\cos B=\sin[180^\circ-(A+B)]-\sin A\cos B$

$=\sin(A+B)-\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B=\cos A\sin B$

$\therefore \cos A\sin B=\frac{3}{4}$

有（I）知 $\sin B=\cos A$，因此 $\sin^2 B=\frac{3}{4}$，又 B 为钝角，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $B=120^\circ$，由 $\cos A=\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 知 $A=30^\circ$，从而 $C=180^\circ-(A+B)=30^\circ$，

综上所述，$A=30^\circ,B=120^\circ,C=30^\circ$。

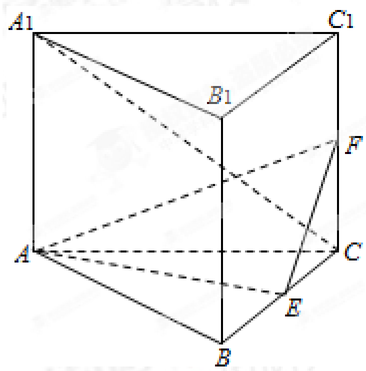
【考点定位】正弦定理及其运用

【名师点睛】解三角形时，有时可用正弦定理，有时也可用余弦定理，应注意用哪一个定理更方便、简捷．如果式子中含有角的余弦或边的二次式，要考虑用余弦定理；如果遇到的式子中含有角的正弦或边的一次式时，则考虑用正弦定理；以上特征都不明显时，则要考虑两个定理都有可能用到．

18. （本小题满分12分）如图4，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为2的正三角形，E,F 分别是 BC,CC_1 的中点。

（I）证明：平面 $AEF\perp$ 平面 B_1BCC_1；

（II）若直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角为 45°，求三棱锥 $F-AEC$ 的体积。



【答案】（I）略；(II) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ ．

【解析】

试题分析：（I）首先证明 $AE\perp BB_1$， $AE\perp BC$，得到 $AE\perp$ 平面 B_1BCC_1，利用面面垂直的判定与性质定理可得平面 $AEF\perp$ 平面 B_1BCC_1； (II)设 AB 的中点为 D,证明直线 $\angle CA_1D$ 直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角，由题设知 $\angle CA_1D=45^\circ$，求出棱锥的高与底面面积即可求解几何体的体积.

试题解析：（I）如图，因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

所以 $AE\perp BB_1$，又 E 是正三角形 ABC 的边 BC 的中点，

所以 $AE\perp BC$，因此 $AE\perp$ 平面 B_1BCC_1，而 $AE\subset$ 平面 AEF，

所以平面 $AEF\perp$ 平面 B_1BCC_1。

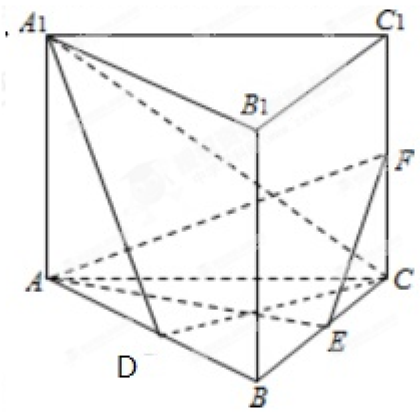
（II）设 AB 的中点为 D，连接 A_1D，CD，因为 ΔABC 是正三角形，所以 $CD\perp AB$，又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CD\perp AA_1$，因此 $CD\perp$ 平面 A_1ABB_1，于是 $\angle CA_1D$ 直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角，

由题设知 $\angle CA_1D=45^\circ$，

所以 $A_1D=CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，

在 $Rt\Delta AA_1D$ 中，$AA_1=\sqrt{A_1D^2-AD^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，所以 $FC=\dfrac{1}{2}AA_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故三棱锥 $F-AEC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{AEC}\times FC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$。



【考点定位】柱体、椎体、台体的体积；面面垂直的判定与性质

【名师点睛】证明面面垂直的关键在于熟练把握空间垂直关系的判定与性质，注意平面图形中的一些线线垂直关系的灵活利用，这是证明空间垂直关系的基础．由于“线线垂直”“线面垂直”“面面垂直”之间可以相互转化，因此整个证明过程围绕着线面垂直这个核心而展开，这是化解空间垂直关系难点的技巧所在．求锥的体积关键在于确定其高，即确定线面垂直．

19. （本小题满分 13 分）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1,a_2=2$，且 $a_{n+1}=3S_n-S_{n+1}+3,(n\in N^*)$，

（I）证明：$a_{n+2}=3a_n$；

（II）求 S_n。

【答案】(I) 略；(II) $S_n=\begin{cases}\frac{3}{2}(5\times 3^{\frac{n-2}{2}}-1),(n=2k+1,k\in N^*)\\ \frac{3}{2}(3^{\frac{n}{2}}-1),(n=2k,k\in N^*)\end{cases}$

【解析】

试题分析：(I) 当 $n\in N^*, n\geq 2$ 时，由题可得 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3,(n\in N^*)$，$a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3,(n\in N^*)$，两式子相减可得 $a_{n+2}-a_{n+1}=3a_n-a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=3a_n,(n\geq 2)$，然后验证当 n=1 时，命题成立即可；(II) 通过求解数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项的和即可得到其对应前 n 项和的通项公式.

试题解析：(I) 由条件，对任意 $n\in N^*$，有 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3,(n\in N^*)$，

因而对任意 $n\in N^*, n\geq 2$，有 $a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3,(n\in N^*)$，

两式相减，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=3a_n-a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=3a_n,(n\geq 2)$，

又 $a_1=1, a_2=2$，所以 $a_3=3S_1-S_2+3=3a_1-(a_1+a_2)+3=3a_1$，

故对一切 $n\in N^*$，$a_{n+2}=3a_n$。

(II) 由 (I) 知，$a_n\neq 0$，所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=3$，于是数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项 $a_1=1$，公比为 3 的等比数列，数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项 $a_1=2$，公比为 3 的等比数列，所以 $a_{2n-1}=3^{n-1}, a_{2n}=2\times 3^{n-1}$，

于是 $S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$$=(1+3+\cdots 3^{n-1})+2(1+3+\cdots 3^{n-1})=3(1+3+\cdots 3^{n-1})=\frac{3(3^n-1)}{2}$$

从而 $S_{2n-1}=S_{2n}-a_{2n}=\frac{3(3^n-1)}{2}-2\times 3^{n-1}=\frac{3}{2}(5\times 3^{n-2}-1)$，

综上所述，$S_n=\begin{cases}\frac{3}{2}(5\times 3^{\frac{n-2}{2}}-1),(n=2k+1,k\in N^*)\\ \frac{3}{2}(3^{\frac{n}{2}}-1),(n=2k,k\in N^*)\end{cases}$。

【考点定位】数列递推关系、数列求和

【名师点睛】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，求数列的通项公式，其求解过程分为三步：

(1) 先利用 $a_1=S_1$ 求出 a_1；(2) 用 $n-1$ 替换 S_n 中的 n 得到一个新的关系，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 便可求出当

$n\geqslant2$ 时 a_n 的表达式；(3) 对 $n=1$ 时的结果进行检验，看是否符合 $n\geqslant2$ 时 a_n 的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；如果不符合，则应该分 $n=1$ 与 $n\geqslant2$ 两段来写．数列求和的常用方法有倒序相加法，错位相减法，裂项相消法，分组求和法，并项求和法等，可根据通项特点进行选用．

20. （本小题满分 13 分）已知抛物线 $C_1: x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点，C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$，过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A,B 两点，与 C_2 相交于 C,D 两点，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向.

（I）求 C_2 的方程；

（II）若 $|AC|=|BD|$，求直线 l 的斜率.

【答案】(I) $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{8}=1$ ；(II) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

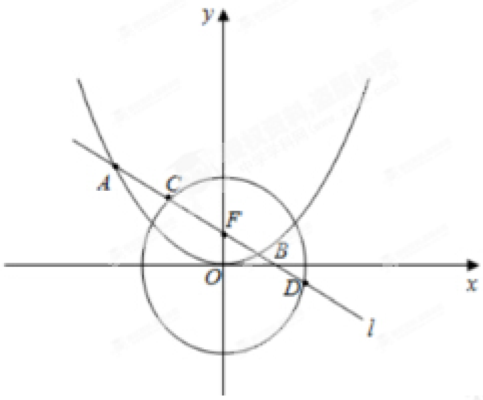
【解析】

试题分析：(I) 由题通过 F 的坐标为 $(0,1)$，因为 F 也是椭圆 C_2 的一个焦点，可得 $a^2-b^2=1$，根据 C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$，C_1 与 C_2 都关于 y 轴对称可得 $\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$，然后得到对应曲线方程即可；（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，根据 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，可得 $(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，设直线 l 的斜率为 k，则 l 的方程为 $y=kx+1$，联立直线与抛物线方程、直线与椭圆方程、利用韦达定理进行计算即可得到结果.

试题解析：(I) 由 $C_1: x^2=4y$ 知其焦点 F 的坐标为 $(0,1)$，因为 F 也是椭圆 C_2 的一个焦点，所以 $a^2-b^2=1$ ①； 又 C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$，C_1 与 C_2 都关于 y 轴对称，且 C_1 的方程为 $C_1: x^2=4y$，由此易知 C_1 与 C_2 的公共点的坐标为 $(\pm\sqrt{6},\dfrac{3}{2})$，$\therefore\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$ ②，

联立①②得 $a^2=9,b^2=8$，故 C_2 的方程为 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{8}=1$。

（II）如图，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，



因$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向，且$|AC|=|BD|$，

所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，从而$x_3-x_1=x_4-x_2$，即$x_3-x_4=x_1-x_2$，于是

$$(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \qquad ③$$

设直线l的斜率为k，则l的方程为$y=kx+1$，

由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$，由$x_1,x_2$是这个方程的两根，$\therefore x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$④

由$\begin{cases}y=kx+1\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$得$(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$，而$x_3,x_4$是这个方程的两根，

$$x_3+x_4=-\frac{16k}{9+8k^2},x_3x_4=-\frac{64}{9+8k^2}, \qquad ⑤$$

将④、⑤代入③，得$16(k^2+1)=\dfrac{16^2k^2}{(9+8k^2)^2}+\dfrac{4\times64}{9+8k^2}$。即$16(k^2+1)=\dfrac{16^2\times9(k^2+1)}{(9+8k^2)^2}$

所以$(9+8k^2)^2=16\times9$，解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即直线l的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【考点定位】直线与圆锥曲线的位置关系；椭圆的性质

【名师点睛】求椭圆标准方程的方法一般为待定系数法：根据条件确定关于 a，b，c 的方程组，解出 a^2，b^2，从而写出椭圆的标准方程．解决直线与椭圆的位置关系的相关问题，其常规思路是先把直线方程与椭圆方程联立，消元、化简，然后应用根与系数的关系建立方程，解决相关问题．涉及弦长问题利用弦长公式解决，往往会更简单．

21. （本小题满分 13 分）函数$f(x)=ae^2\cos x(x\in[0,+\infty)$，记$x_n$为$f(x)$的从小到大的第$n(n\in N^*)$个极值点。

（I）证明：数列$\{f(x_n)\}$是等比数列；

（II）若对一切$n\in N^*, x_n\le |f(x_n)|$恒成立，求$a$的取值范围。

【答案】（I）略；(II) $[\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty)$

【解析】

试题分析：（I）由题$f'(x)=\sqrt{2}ae^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$，令$f'(x)=0$，求出函数的极值点，根据等比数列定义即可得到结果；(II)由题意问题等价于$\frac{\sqrt{2}}{a}\le\frac{e^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}}{n\pi-\frac{3\pi}{4}}$恒成立问题，设$g(t)=\frac{e^t}{t}(t>0)$，然后运用导数知识得到$[g(x_n)]_{\min}=\min[g(x_1),g(x_2)]=\min[g(\frac{\pi}{4}),g(\frac{5\pi}{4})]=g(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{a}\le\frac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}$，求得$a\ge\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}$，得到$a$的取值范围；

试题解析：（I）$f'(x)=ae^x\cos x-ae^x\sin x=\sqrt{2}ae^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$

令$f'(x)=0$，由$x\ge0$，得$x+\frac{\pi}{4}=m\pi-\frac{\pi}{2}$，即$x=m\pi-\frac{3\pi}{4},m\in N^*$，

而对于$\cos(x+\frac{\pi}{4})$，当$k\in Z$时，

若$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}$，则$\cos(x+\frac{\pi}{4})>0$；

若$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即$2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4}$，则$\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$；

因此，在区间$((m-1)\pi,m\pi-\frac{3\pi}{4})$与$(m\pi-\frac{3\pi}{4},m\pi+\frac{\pi}{4})$上，$f'(x)$的符号总相反，于是当$x=m\pi-\frac{3\pi}{4},m\in N^*$时，$f(x)$取得极值，所以$x_n=n\pi-\frac{3\pi}{4},n\in N^*$，此时，

$f(x_n)=ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}\cos(n\pi-\frac{3\pi}{4})=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}$，易知$f(x_n)\ne0$，而

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{(-1)^{n+2}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{(n+1)\pi-\frac{3\pi}{4}}}{(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}}=-e^{\pi}$$ 是常数，

故数列$\{f(x_n)\}$是首项为$f(x_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ae^{\frac{\pi}{4}}$，公比为$-e^{\pi}$的等比数列。

（II）对一切$n\in N^*, x_n\le|f(x_n)|$恒成立，即$n\pi-\dfrac{3\pi}{4}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}$恒成立，亦即

$\dfrac{\sqrt{2}}{a}\le\dfrac{e^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}}{n\pi-\dfrac{3\pi}{4}}$恒成立，

设$g(t)=\dfrac{e^t}{t}(t>0)$，则$g'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$，令$g'(t)=0$得$t=1$，

当$0<t<1$时，$g'(t)<0$，所以$g(t)$在区间$(0,1)$上单调递减；

当$t>1$时，$g'(t)>0$，所以$g(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增；

因为$x_1\in(0,1)$，且当$n\ge2$时，$x_n\in(1,+\infty), x_n<x_{n+1}$，所以

$$[g(x_n)]_{\min}=\min[g(x_1),g(x_2)]=\min[g(\frac{\pi}{4}),g(\frac{5\pi}{4})]=g(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$$

因此，$n\in N^*, x_n\le|f(x_n)|$恒成立，当且仅当$\dfrac{\sqrt{2}}{a}\le\dfrac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$，解得$a\ge\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

故实数a的取值范围是$[\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty)$。

【考点定位】恒成立问题；等比数列的性质

【名师点睛】解决数列与函数的综合问题时，如果是证明题要根据等比数列的定义明确证明的方向，如果是不等式恒成立问题，要使用不等式恒成立的各种不同解法，如变量分离法、最值法、因式分解法等，总之解决这类问题把数列看做特殊函数，并把它和不等式的知识巧妙结合起来综合处理就行了．