

绝密★启用前

2012年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）
数学试卷（理工农医类）

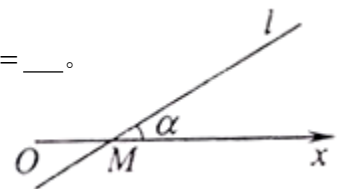
（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

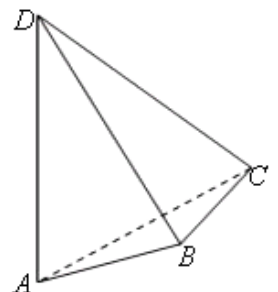
1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（56分）：

1. 计算： $\frac{3-i}{1+i} = \underline{\hspace{2cm}}$ （ i 为虚数单位）。
2. 若集合 $A = \{x \mid 2x+1 > 0\}$ ， $B = \{x \mid |x-1| < 2\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & \cos x \\ \sin x & -1 \end{vmatrix}$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 若 $\vec{n} = (-2, 1)$ 是直线 l 的一个法向量，则 l 的倾斜角的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（结果用反三角函数值表示）。
5. 在 $(x - \frac{2}{x})^6$ 的二项展开式中，常数项等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 有一列正方体，棱长组成以1为首项、 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，体积分别记为 $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 已知函数 $f(x) = e^{|x-a|}$ （ a 为常数）。若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面，则该圆锥的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数，且 $f(1) = 1$ ，若 $g(x) = f(x) + 2$ ，则 $g(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 如图，在极坐标系中，过点 $M(2, 0)$ 的直线 l 与极轴的夹角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ，
若将 l 的极坐标方程写成 $\rho = f(\theta)$ 的形式，则 $f(\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ （结果用最简分数表示）。
12. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ，边 AB 、 AD 的长分别为2、1，若 M 、 N 分别是边 BC 、 CD 上的点，且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|BC|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|CD|}$ ，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



13. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是折线段 ABC ，其中 $A(0, 0)$ 、 $B(\frac{1}{2}, 5)$ 、 $C(1, 0)$ ，

函数 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____。

14. 如图, AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱, $BC = 2$, 若 $AD = 2c$, 且 $AB + BD = AC + CD = 2a$, 其中 a 、 c 为常数, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是_____。

二、选择题 (20分) :

15. 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根, 则 (.)
 A. $b = 2, c = 3$ B. $b = -2, c = 3$ C. $b = -2, c = -1$ D. $b = 2, c = -1$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能确定

17. 设 $10 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 10^4$, $x_5 = 10^5$, 随机变量 ξ_1 取值 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的概率均为 0.2, 随机变量 ξ_2 取值 $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_4+x_5}{2}, \frac{x_5+x_1}{2}$ 的概率也均为 0.2, 若

记 $D\xi_1, D\xi_2$ 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差, 则 ()

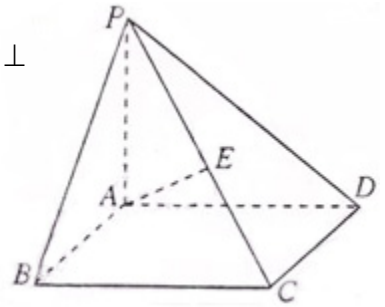
- A. $D\xi_1 > D\xi_2$ B. $D\xi_1 = D\xi_2$
 C. $D\xi_1 < D\xi_2$ D. $D\xi_1$ 与 $D\xi_2$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值有关

18. 设 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{25}$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 在 S_1, S_2, \dots, S_{100} 中, 正数的个数是 (.)

- A. 25 B. 50 C. 75 D. 100

三、解答题 (74分) :

19. (6+6=12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, 已知 $AB = 2, AD = 2\sqrt{2}, PA = 2$, 求:
 (1) 三角形 PCD 的面积;
 (2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小。



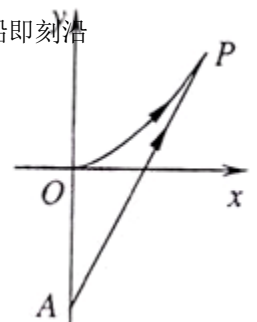
20. (6+8=14分) 已知函数 $f(x) = \lg(x+1)$.

- (1) 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$, 求 x 的取值范围;
 (2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$, 求函数 $y = g(x)$ ($x \in [1, 2]$) 的反函数。

21. (6+8=14分) 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度), 则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里

A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线 $y = \frac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

- (1) 当 $t = 0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向;
 (2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. (4+6+6=16分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C_1: 2x^2 - y^2 = 1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐进线的平行线, 求该直线与另一条渐进线及 x 轴围成的三角形的面积;

(2) 设斜率为1的直线 l 交 C_1 于 P 、 Q 两点, 若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 求证: $OP \perp OQ$;

(3) 设椭圆 $C_2: 4x^2 + y^2 = 1$, 若 M 、 N 分别是 C_1 、 C_2 上的动点, 且 $OM \perp ON$, 求证: O 到直线 MN 的距离是定值。

23. (4+6+8=18分) 对于数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $n \geq 2$

, 定义向量集 $Y = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (s, t), s \in X, t \in X\}$, 若对任意 $\vec{a}_1 \in Y$, 存在 $\vec{a}_2 \in Y$, 使得 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$, 则称 X 具有性质 P . 例如 $\{-1, 1, 2\}$ 具有性质 P .

(1) 若 $x > 2$, 且 $\{-1, 1, 2, x\}$ 具有性质 P , 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 P , 求证: $1 \in X$, 且当 $x_n > 1$ 时, $x_1 = 1$;

(3) 若 X 具有性质 P , 且 $x_1 = 1$ 、 $x_2 = q$ (q 为常数), 求有穷数列 x_1, x_2, \dots, x_n 的通项公式。

