

2023 年上海市春季高考数学试卷

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，第 1 题至第 6 题每个空格填对得 4 分，第 7 题至第 12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得零分。

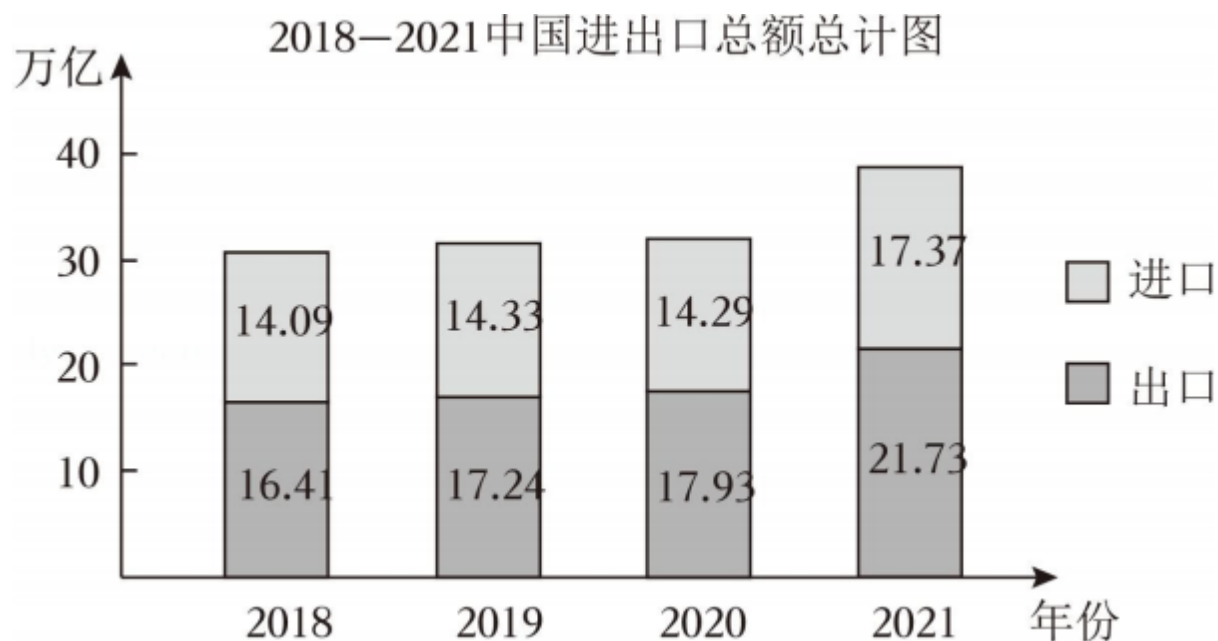
1. (4 分) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, a\}$, 且 $A = B$, 则 $a =$ _____.
2. (4 分) 已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 则 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.
3. (4 分) 若不等式 $|x - 1| \leq 2$, 则实数 x 的取值范围为 _____.
4. (4 分) 已知圆 C 的一般方程为 $x^2 + 2x + y^2 = 0$, 则圆 C 的半径为 _____.
5. (4 分) 已知事件 A 发生的概率为 $P(A) = 0.5$, 则它的对立事件 \bar{A} 发生的概率 $P(\bar{A}) =$ _____.
6. (4 分) 已知正实数 a, b 满足 $a + 4b = 1$, 则 ab 的最大值为 _____.
7. (5 分) 某校抽取 100 名学生测身高, 其中身高最大值为 186cm, 最小值为 154cm, 根据身高数据绘制频率组距分布直方图, 组距为 5, 且第一组下限为 153.5, 则组数为 _____.
8. (5 分) 设 $(1 - 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_4 =$ _____.
9. (5 分) 已知函数 $f(x) = 2 - x + 1$, 且 $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$, 则方程 $g(x) = 2$ 的解为 _____.
10. (5 分) 已知有 4 名男生 6 名女生, 现从 10 人中任选 3 人, 则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为 _____.
11. (5 分) 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ 且 $z_1 = i \cdot \overline{z_2}$, 满足 $|z_1 - 1| = 1$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围为 _____.
12. (5 分) 已知空间向量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 都是单位向量, 且 $\vec{OA} \perp \vec{OB}, \vec{OA} \perp \vec{OC}$, \vec{OB} 与 \vec{OC} 的夹角为 60° , 若 P 为空间任意一点, 且 $|\vec{OP}| = 1$, 满足 $|\vec{OP} \cdot \vec{OC}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OB}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OA}|$, 则 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ 的最大值为 _____.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，第 13 题至第 14 题选对得 4 分，第 15 题至第 16 题选对得 5 分，否则一律得零分。

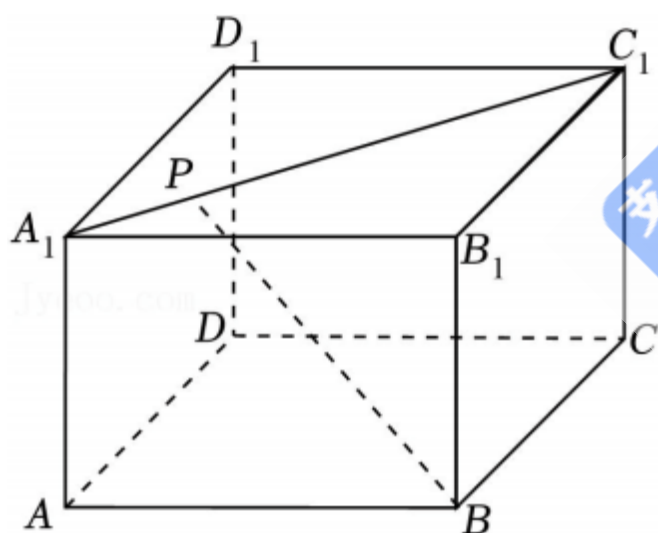
13. (4 分) 下列函数是偶函数的是()

- A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$ C. $y = x^3$ D. $y = 2x$

14. (4分) 根据下图判断, 下列选项错误的是 ()



- A. 从 2018 年开始后, 图表中最后一年增长率最大
 B. 从 2018 年开始后, 进出口总额逐年增大
 C. 从 2018 年开始后, 进口总额逐年增大
 D. 从 2018 年开始后, 图表中 2020 年的增长率最小
15. (5分) 如图, P 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 边 A_1C_1 上的动点, 下列哪条边与边 BP 始终异面 ()



- A. DD_1 B. AC C. AD_1 D. B_1C

16. (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, S_n 为其前 n 项和, 若对任意 $k > 2022$, 都有 $|S_k| > |S_{k+1}|$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等差数列, $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等比数列
 B. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等比数列, $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等差数列
 C. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等差数列, $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等比数列
 D. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等比数列, $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等差数列

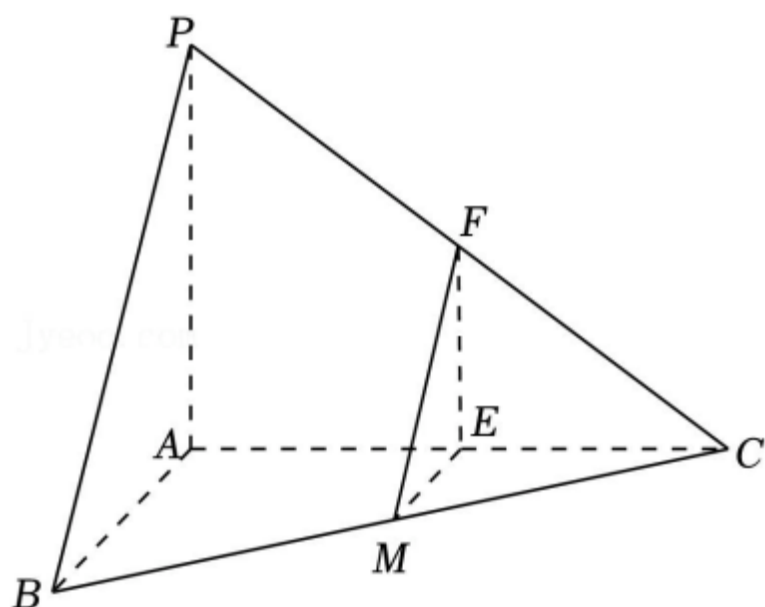
三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 78 分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区

域内写出必要的步骤.

17. (14分) 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $PB=AB=3$, $AC=4$, M 为 BC 中点, 过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC 、 PC 于点 E , F .

(1) 求直线 PM 与平面 ABC 所成角的大小;

(2) 证明: $ME \parallel$ 平面 PAB , 并求直线 ME 到平面 PAB 的距离.



18. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应边为 a, b, c , 其中 $b=2$.

(1) 若 $A+C=120^\circ$, 且 $a=2c$, 求边长 c ;

(2) 若 $A-C=15^\circ$, $a=\sqrt{2}c\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

19. (14分) 为了节能环保, 节约材料, 定义建筑物的“体形系数”为 $S=\frac{F_0}{V_0}$, 其中 F_0 为

建筑物暴露在空气中的面积 (单位: 平方米), V_0 为建筑物的体积 (单位: 立方米).

(1) 若有一个圆柱体建筑的底面半径为 R , 高度为 H , 求该建筑体的 S (用 R, H 表示);

(2) 现有一个建筑体, 侧面皆垂直于地面, 设 A 为底面面积, L 为建筑底面周长. 已知 f 为正比例系数, L^2 与 A 成正比, 定义: $f=\frac{L^2}{A}$, 建筑面积即为每一层的底面面积, 总建筑面积即为

每层建筑面积之和, 值为 T . 已知该建筑体推导得出 $S=\sqrt{\frac{f \cdot n}{T}}+\frac{1}{3n}$, n 为层

数, 层高为 3 米, 其中 $f=18$, $T=10000$, 试求当取第几层时, 该建筑体 S 最小?

20. (18分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{3}=1$ ($m>0, m \neq \sqrt{3}$).

(1) 若 $m=2$, 求椭圆 Γ 的离心率;

(2) 设 A_1, A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点, 若椭圆 Γ 上一点 E 的纵坐标为 1, 且 $\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} =$

-2 , 求 m 的值;

(3) 存在过椭圆 Γ 上一点 P 、且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l , 使得直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$

仅有一个公共点, 求 m 的取值范围.

21. (18分) 设函数 $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + x$, $g(x) = kx + m$, 其中 $a \geq 0$, $k, m \in \mathbb{R}$, 若对任意 $x \in [0, 1]$ 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 且对所有的函数 $y = g(x)$ 取最小值定义为 $\bar{f}(x)$.

(1) 若 $a = 2$, $g(x) = x$, 试问 $y = g(x)$ 是否为 $y = f(x)$ 的“控制函数”;

(2) 若 $a = 0$, 使得直线 $y = h(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 处的切线, 求证: 函数 $y = h(x)$ 是为函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 并求 $\bar{f}(\frac{1}{4})$ 的值;

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ ($x_0 \in (0, 1)$)处的切线过点 $(1, 0)$, 且 $c \in [x_0, 1]$, 求证: 当且仅当 $c = x_0$ 或 $c = 1$ 时, $\bar{f}(c) = f(c)$.