2006年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1.答题前，务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的座位号、姓名，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中“座位号、姓名、科类”与本人座位号、姓名、科类是否一致。

2．答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

3．答第Ⅱ卷时，必须用0.5毫米墨水签字笔在答题卡上书写。在试题卷上作答无效。

4．考试结束，监考人员将试题卷和答题卡一并收回。

参考公式：

如果时间A、B互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果时间A、B相互独立，那么 $P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中R表示球的半径

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R表示球的半径

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题 本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、已知集合M＝ $\{x|\frac{x}{(x-1)^3}\geq 0\}$，N＝ $\{y|y=3x^2+1，x\in R\}$，则M∩N＝（　　）

A. ∅　B. {x|x≥1}　C. {x|x>1}　D. {x| x≥1或x<0}

2、已知复数z满足（$\sqrt{3}+3i$）z＝3i，则z＝（　　）

A. $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　B. $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$　C. $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　D. $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

3、若a>0，b>0，则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于（　　）

A. $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$　B. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$　C. $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{b}$　D. $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

4、设O为坐标原点，F为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A是抛物线上一点，若 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{AF}=-4$ 则点A的坐标是（　　）

A.（2，$\pm2\sqrt{2}$）　B.（1，±2）　C.（1，2）D.(2，$2\sqrt{2}$)

5、对于 R 上可导的任意函数 $f(x)$，若满足（x－1）$f'(x)\geq 0$，则必有（　　）

A. $f(0)+f(2)<2f(1)$　　B. $f(0)+f(2)\leq 2f(1)$

B. $f(0)+f(2)\geq 2f(1)$　　C. $f(0)+f(2)>2f(1)$

6、若不等式 $x^2+ax+1\geq 0$ 对于一切 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. 0　B. －2　C. $-\frac{5}{2}$　D. -3

7、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$，且 A、B、C 三点共线（该直线不过原点 O），则 $S_{200}=$（　　）

A. 100　B. 101　C. 200　D. 201

8、在 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中，含 x 的奇次幂的项之和为 S，当 $x=\sqrt{2}$ 时，S 等于（　）

A. 2^{3008}　B. -2^{3008}　C. 2^{3009}　D. -2^{3009}

9、P 是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点，M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为（　　）

A. 6　B. 7　C. 8　D. 9

10、将 7 个人（含甲、乙）分成三个组，一组 3 人，另两组 2 人，不同的分组数为 a，甲、乙分到同一组的概率为 p，则 a、p 的值分别为（　　）

A. a=105　$p=\frac{5}{21}$　B. a=105　$p=\frac{4}{21}$　C. a=210　$p=\frac{5}{21}$　D. a=210　$p=\frac{4}{21}$

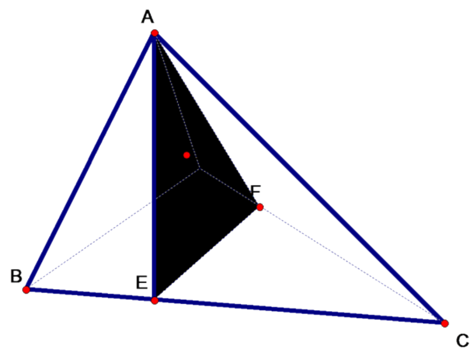
11、如图，在四面体 ABCD 中，截面 AEF 经过四面体的内切球（与四个面都相切的球）球心 O，且与 BC，DC 分别截于 E、F，如果截面将四面体分成体积相等的两部分，设四棱锥 A－BEFD 与三棱锥 A－EFC 的表面积分别是 S_1，S_2，则必有（　　）

A. $S_1<S_2$

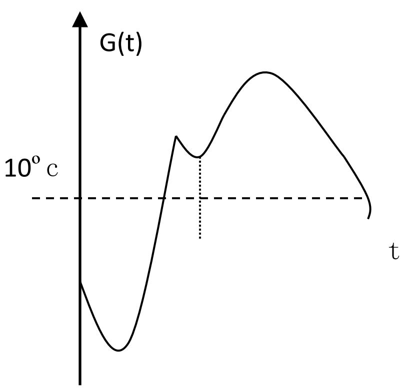
B. $S_1>S_2$

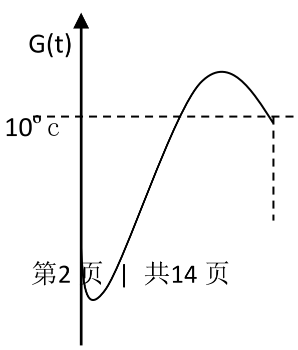
C. $S_1=S_2$

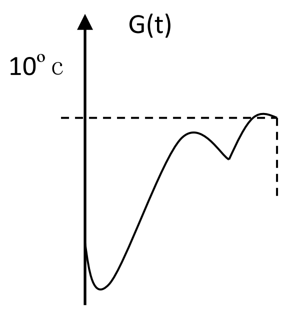
D. S_1，S_2 的大小关系不能确定

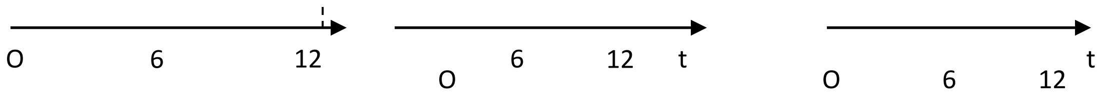


12、某地一年的气温 Q（t）（单位：°c）与时间 t（月份）之间的关系如图（1）所示，已知该年的平均气温为 10°c，令 G（t）表示时间段〔0, t〕的平均气温，G（t）与 t 之间的函数关系用下列图象表示，则正确的应该是（　　）

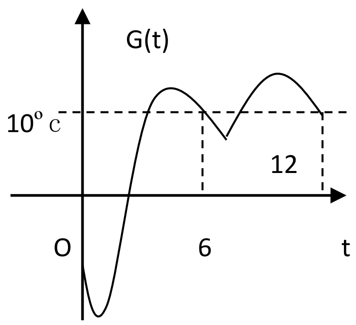




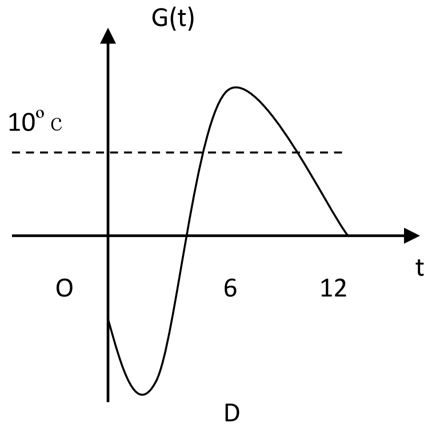




图（1）　　　　A　　　　B



C



D

理科数学

第II卷（非选择题　共90分）

注意事项：

请用0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上书写作答无效。

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填写在答题卡的相应位置。

13、数列｛$\dfrac{1}{4n^2-1}$｝的前n项和为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$＝______________

14、设f（x）＝$\log_3$（x＋6）的反函数为f^{-1}（x），若〔f^{-1}（m）＋6〕〔f^{-1}（n）＋6〕＝27则f（m＋n）＝___________________

15、如图，在直三棱柱ABC－$A_1B_1C_1$中，底面为直角三角形，∠ACB＝90°，AC＝6，BC＝CC_1＝$\sqrt{2}$，P是BC_1上一动点，则CP＋PA_1的最小值是___________

16、已知圆M：（x＋cosθ）^{2}＋（y－sinθ）^{2}＝1，

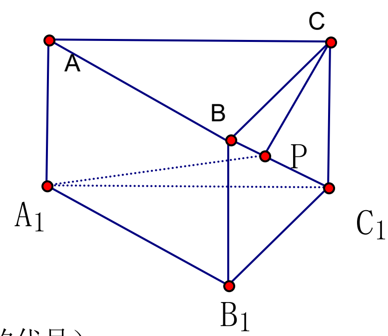
直线l：y＝kx，下面四个命题：

（A）　对任意实数k与θ，直线l和圆M相切；

（B）　对任意实数k与θ，直线l和圆M有公共点；

（C）　对任意实数θ，必存在实数k，使得直线l与和圆M相切

（D）对任意实数k，必存在实数θ，使得直线l与和圆M相切



其中真命题的代号是______________（写出所有真命题的代号）

三、解答题：本大题共6小题，共74分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17、（本小题满分12分）

已知函数f（x）＝x^3＋ax^2＋bx＋c在x＝－$\dfrac{2}{3}$与x＝1时都取得极值

（1）　求a、b的值与函数f（x）的单调区间

（2） 若对 x∈〔－1，2〕，不等式 f（x）$<c^2$恒成立，求 c 的取值范围。

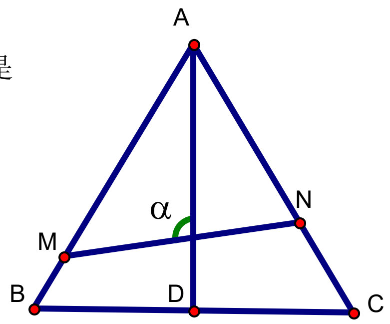
18、（本小题满分 12 分）

某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球，1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球，记下颜色后放回，摸出一个红球可获得奖金 10 元；摸出 2 个红球可获得奖金 50 元，现有甲，乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次，令ξ表示甲，乙摸球后获得的奖金总额。求：

（1）ξ的分布列　（2）ξ的的数学期望

19、（本小题满分 12 分）

如图，已知△ABC 是边长为 1 的正三角形，M、N 分别是边 AB、AC 上的点，线段 MN 经过△ABC 的中心 G，设∠MGA＝α（$\frac{\pi}{3}\le\alpha\le\frac{2\pi}{3}$）

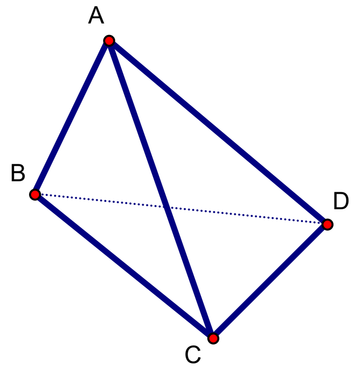


（1） 试将△AGM、△AGN 的面积（分别记为 S_1 与 S_2）表示为α的函数

（2） 求 $y=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}$ 的最大值与最小值

20、（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 A－BCD 中，侧面 ABD、ACD 是全等的直角三角形，AD 是公共的斜边，且 AD＝$\sqrt{3}$，BD＝CD＝1，另一个侧面是正三角形



（1） 求证：AD⊥BC

（2） 求二面角 B－AC－D 的大小

（3） 在直线 AC 上是否存在一点 E，使 ED 与面 BCD 成 30°角？若存在，确定 E 的位置；若不存在，说明理由。

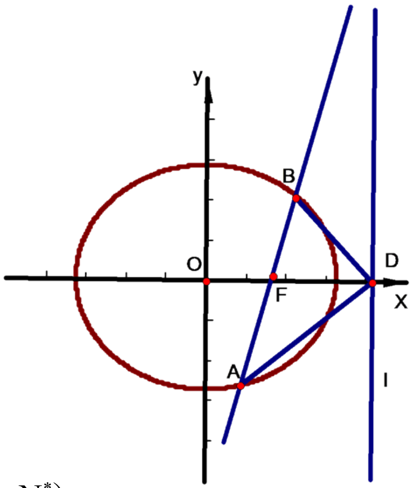
21、（本大题满分 12 分）

如图，椭圆 Q：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的右焦点 F（c，0），过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动，并且交椭圆于 A、B 两点，P 是线段 AB 的中点

（1） 求点 P 的轨迹 H 的方程

（2） 在 Q 的方程中，令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta$（$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$），确定θ的值，使原点距椭圆的右准线 *l* 最远，此时，设 *l* 与 x 轴交点为 D，当直线 m 绕点 F 转动到什么

位置时，三角形 ABD 的面积最大？



22、（本大题满分 14 分）

已知数列｛a_n｝满足：$a_1=\dfrac{3}{2}$，且 $a_n=\dfrac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$（$n\ge 2$，$n\in N^*$）

（1） 求数列｛a_n｝的通项公式；

（2） 证明：对于一切正整数 n，不等式 $a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

2006 年江西高考理科数学真题参考答案

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、已知集合 M＝｛$x|\dfrac{x}{(x-1)^3}\ge 0$｝，N＝｛$y|y=3x^2+1$，$x\in R$｝，则 $M\cap N$＝（ C ）

A．$\varnothing$ B. ｛$x|x\ge 1$｝ C. ｛$x|x>1$｝ D. ｛$x|$ $x\ge 1$ 或 $x<0$｝

解：M＝｛$x|x>1$ 或 $x\le 0$｝，N＝｛$y|y\ge 1$｝故选 C

2、已知复数 z 满足（$\sqrt{3}+3i$）$z=3i$，则 z＝（ D ）

A. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ C. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

解：$z=\dfrac{3i}{\sqrt{3}+3i}=\dfrac{3i(\sqrt{3}-3i)}{12}=\dfrac{\sqrt{3}i+3}{4}$ 故选 D

3、若 $a>0$，$b>0$，则不等式 $-b<\dfrac{1}{x}<a$ 等价于（ D ）

A. $-\dfrac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{1}{a}$ B. $-\dfrac{1}{a}<x<\dfrac{1}{b}$ C. $x<-\dfrac{1}{a}$ 或 $x>\dfrac{1}{b}$ D. $x<-\dfrac{1}{b}$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$

解：

$$-b\prec\frac{1}{x}\prec a\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+b\succ 0\\ \dfrac{1}{x}-a\prec 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+bx}{x}\succ 0\\ \dfrac{1-ax}{x}\prec 0\end{cases}$$

故选 D

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(bx+1)\succ 0\\ x(1-ax)\prec 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\succ 0\text{或}x\prec-\dfrac{1}{b}\\ x\succ\dfrac{1}{a}\text{或}x\prec 0\end{cases}\Rightarrow x\prec-\frac{1}{b}\text{或}x\succ\frac{1}{a}$$

4、设 O 为坐标原点，F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A 是抛物线上一点，若 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{AF}=-4$ 则点 A 的坐标是（B　）

A.（2，$\pm2\sqrt{2}$）　B.（1，±2）　C.（1，2）D.(2，$2\sqrt{2}$)

解：F（1，0）设 A（$\frac{y_0^2}{4}$，y_0）则 $\overrightarrow{OA}=$（$\frac{y_0^2}{4}$，y_0），$\overrightarrow{AF}=$（$1-\frac{y_0^2}{4}$，$-y_0$），由

$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{AF}=-4\Rightarrow y_0=\pm2$，故选 B

5、对于 R 上可导的任意函数 f（x），若满足（x－1）$f'(x)\ge0$，则必有（ C　）

C. f（0）＋f（2）<2f（1）　B. f（0）＋f（2）≤2f（1）

C.　f（0）＋f（2）≥2f（1）　D. f（0）＋f（2）>2f（1）

解：依题意，当 x≥1 时，f′（x）≥0，函数 f（x）在（1，＋∞）上是增函数；当 x<1 时，f′（x）≤0，f（x）在（－∞，1）上是减函数，故 f（x）当 x＝1 时取得最小值，即有 f（0）≥f（1），f（2）≥f（1），故选 C

6、若不等式 $x^2+ax+1\ge0$ 对于一切 x∈（0，$\frac{1}{2}$）成立，则 a 的取值范围是（ C　）

A. 0　B.　－2　C.$-\frac{5}{2}$　D.-3

解：设 f（x）$=x^2+ax+1$，则对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$

若 $-\frac{a}{2}\ge\frac{1}{2}$，即 a≤－1 时，则 f（x）在〔0，$\frac{1}{2}$〕上是减函数，应有 f（$\frac{1}{2}$）≥0⇒

$-\frac{5}{2}\le x\le-1$

若 $-\frac{a}{2}\le0$，即 a≥0 时，则 f（x）在〔0，$\frac{1}{2}$〕上是增函数，应有 f（0）＝1>0 恒成立，故 a≥0

若 $0\le-\frac{a}{2}\le\frac{1}{2}$，即－1≤a≤0，则应有 f（$-\frac{a}{2}$）$=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+1=1-\frac{a^2}{4}\ge0$ 恒成立，故

－1≤a≤0

综上，有 $-\frac{5}{2}\le a$ 故选 C

7、已知等差数列｛a_n｝的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$，且 A、B、C 三点共线（该直线不过原点 O），则 $S_{200}=$（ A　）

A. 100　B. 101　C.200　D.201

解：依题意，$a_1+a_{200}=1$，故选 A

8、在（$x-\sqrt{2}$）^{2006} 的二项展开式中，含 x 的奇次幂的项之和为 S，当 $x=\sqrt{2}$ 时，S 等于（B　）

A.2^{3008}　B.-2^{3008}　C.2^{3009}　D.-2^{3009}

解：设（x－$\sqrt{2}$）^{2006}＝a_0x^{2006}＋a_1x^{2005}＋…＋$a_{2005}x$＋a_{2006}

则当 x＝$\sqrt{2}$ 时，有 a_0（$\sqrt{2}$）^{2006}＋a_1（$\sqrt{2}$）^{2005}＋…＋a_{2005}（$\sqrt{2}$）＋a_{2006}＝0 （1）

当 x＝－$\sqrt{2}$ 时，有 a_0（$\sqrt{2}$）^{2006}－a_1（$\sqrt{2}$）^{2005}＋…－a_{2005}（$\sqrt{2}$）＋a_{2006}＝2^{3009} （2）

（1）－（2）有 a_1（$\sqrt{2}$）^{2005}＋…＋a_{2005}（$\sqrt{2}$）＝$-2^{3009}\div 2=-2^{3008}$

故选 B

9、P 是双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的右支上一点，M、N 分别是圆（x＋5）^{2}＋y^2＝4 和（x－5）^{2}＋y^2＝1 上的点，则|PM|－|PN|的最大值为（ D ）

A. 6 B.7 C.8 D.9

解：设双曲线的两个焦点分别是 F_1（－5，0）与 F_2（5，0），则这两点正好是两圆的圆心，当且仅当点 P 与 M、F_1三点共线以及 P 与 N、F_2三点共线时所求的值最大，此时|PM|－|PN|＝（|PF_1|－2）－（|PF_2|－1）＝10－1＝9 故选 B

10、将 7 个人（含甲、乙）分成三个组，一组 3 人，另两组 2 人，不同的分组数为 a，甲、乙分到同一组的概率为 p，则 a、p 的值分别为（ A ）

B. a=105 p=$\frac{5}{21}$ B. a=105 p=$\frac{4}{21}$ C. a=210 p=$\frac{5}{21}$ D. a=210 p=$\frac{4}{21}$

解：a＝$\frac{C_7^3C_4^2C_2^2}{2!}$＝105

甲、乙分在同一组的方法种数有

（1） 若甲、乙分在 3 人组，有$\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{2!}$＝15 种

（2） 若甲、乙分在 2 人组，有C_5^3＝10 种，故共有 25 种，所以 P＝$\frac{25}{105}=\frac{5}{21}$

故选 A

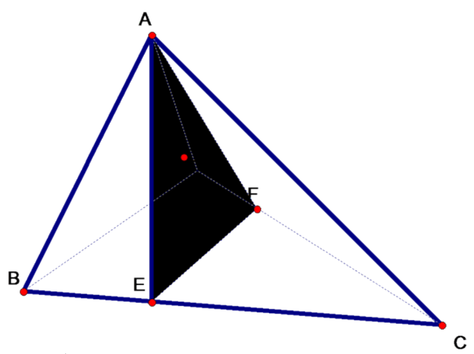
11、如图，在四面体 ABCD 中，截面 AEF 经过四面体的内切球（与四个面都相切的球）球心 O，且与 BC，DC 分别截于 E、F，如果截面将四面体分成体积相等的两部分，设四棱锥 A－BEFD 与三棱锥 A－EFC 的表面积分别是 S_1，S_2，则必有（ ）

A. $S_1<S_2$

B. $S_1>S_2$

C. $S_1=S_2$

D. S_1，S_2的大小关系不能确定



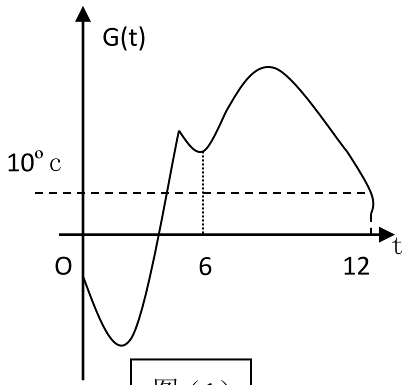
解：连 OA、OB、OC、OD

则 V_{A-BEFD}＝V_{O-ABD}＋V_{O-ABE}＋V_{O-BEFD}

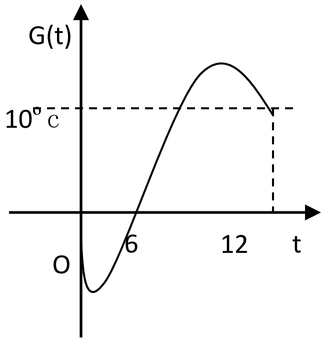
V_{A-EFC}＝V_{O-ADC}＋V_{O-AEC}＋V_{O-EFC} 又 V_{A-BEFD}＝V_{A-EFC} 而每个三棱锥的高都是原四面体的内切球的半径，故 S_{ABD}＋S_{ABE}＋S_{BEFD}＝S_{ADC}＋

$S_{AEC}+S_{EFC}$又面 AEF 公共，故选 C

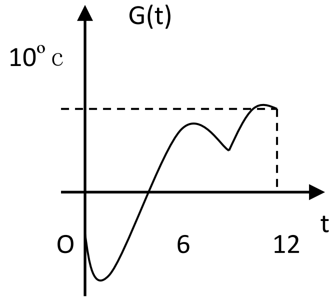
12、某地一年的气温 Q（t）（单位：ºc）与时间 t（月份）之间的关系如图（1）所示，已知该年的平均气温为 10ºc，令 G（t）表示时间段〔0,t〕的平均气温，G（t）与 t 之间的函数关系用下列图象表示，则正确的应该是（　A　）



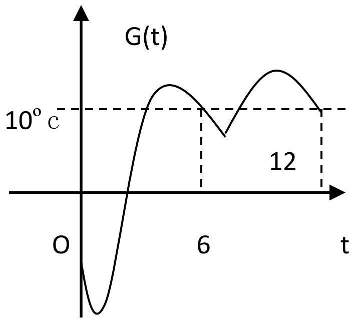
图（1）



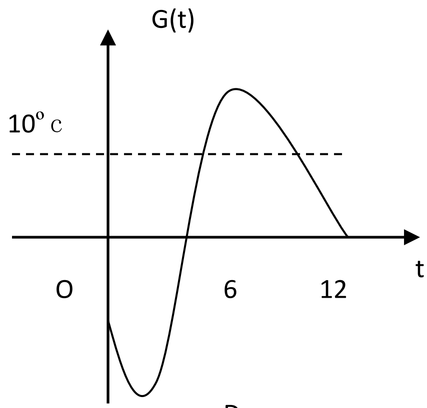
A



B



C



D

解：结合平均数的定义用排除法求解

理科数学

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上书写作答无效。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填写在答题卡的相应位置。

13、数列 $\{\frac{1}{4n^2-1}\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

13、解：$a_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)\bullet(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

故 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$$

14、设 f（x）$=\log_3$（x+6）的反函数为 f^{-1}（x），若〔f^{-1}（m）+6〕〔f^{-1}（n）+6〕=27 则 f（m+n）=__________________

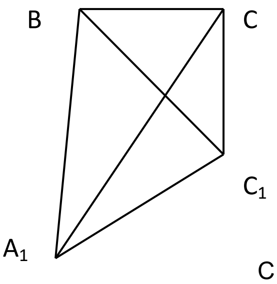
解：f^{-1}（x）$=3^x-6$ 故〔f^{-1}（m）+6〕•〔f^{-1}（x）+6〕$=3^m\bullet 3^n=3^{m+n}=27$

$\therefore m+n=3\therefore f(m+n)=\log_3(3+6)=2$

15、如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面为直角三角形，∠ACB=90°，AC=6，$BC=CC_1=\sqrt{2}$，P 是 BC_1 上一动点，则 $CP+PA_1$ 的最小值是____________

解：连 A_1B，沿 BC_1 将△CBC_1 展开与△A_1BC_1 在同一个平面内，如图所示，

连 A_1C，则 A_1C 的长度就是所求的最小值。



通过计算可得 $\angle A_1C_1C=90°$ 又 $\angle BC_1C=45°$

$\therefore\angle A_1C_1C=135°$ 由余弦定理可求得 $A_1C=5\sqrt{2}$

16、已知圆 M:（x+cosθ）²+（y−sinθ）²=1，

直线 l：y=kx，下面四个命题：

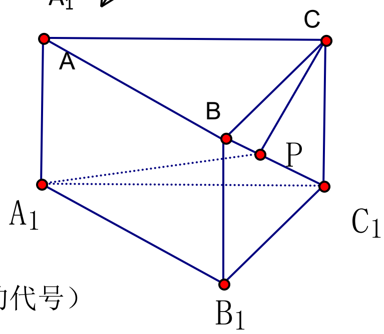
（D） 对任意实数 k 与θ，直线 l 和圆 M 相切；

（E） 对任意实数 k 与θ，直线 l 和圆 M 有公共点；

（F） 对任意实数θ，必存在实数 k，使得直线 l 与和圆 M 相切

（D）对任意实数 k，必存在实数θ，使得直线 l 与和圆 M 相切

其中真命题的代号是________________（写出所有真命题的代号）



解：圆心坐标为（−cosθ，sinθ）d=

$$\frac{|-k\cos\theta-\sin\theta|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}|\sin(\theta+\varphi)|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$=|\sin(\theta+\varphi)|\le 1$$

故选（B）（D）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17、（本小题满分 12 分）

已知函数 f（x）$=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 与 x=1 时都取得极值

（3） 求 a、b 的值与函数 f（x）的单调区间

（4） 若对 x∈〔－1，2〕，不等式 f（x）<c^2恒成立，求 c 的取值范围。

17、解：（1）$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

由 $f'(-\frac{2}{3})=\frac{12}{9}-\frac{4}{3}a+b=0$，$f'(1)=3+2a+b=0$ 得

$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$，函数 $f(x)$ 的单调区间如下表：

x	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以函数 f（x）的递增区间是 $(-\infty, -\frac{2}{3})$ 与 $(1, +\infty)$

递减区间是 $(-\frac{2}{3}, 1)$

（2）$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c$，x∈〔－1，2〕，当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=\frac{22}{27}+c$

为极大值，而 $f(2)=2+c$，则 $f(2)=2+c$ 为最大值。

要使 $f(x)<c^2$（x∈〔－1，2〕）恒成立，只需 $c^2>f(2)=2+c$

解得 $c<-1$ 或 $c>2$

18、（本小题满分 12 分）

某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球，1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球，记下颜色后放回，摸出一个红球可获得奖金 10 元；摸出 2 个红球可获得奖金 50 元，现有甲，乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次，令ξ表示甲，乙摸球后获得的奖金总额。求：

（1）ξ的分布列　（2）ξ的的数学期望

18、解：（1）ξ的所有可能的取值为 0，10，20，50，60

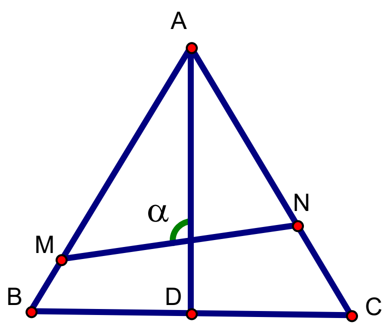
分布列为

ξ	0	10	20	50	60
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{18}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

(2) $E\xi=3.3$

19、（本小题满分 12 分）

如图，已知△ABC 是边长为 1 的正三角形，M、N 分别是边 AB、AC 上的点，线段 MN 经过△ABC 的中心 G，设∠MGA＝α（$\frac{\pi}{3}\le\alpha\le\frac{2\pi}{3}$）



（3） 试将△AGM、△AGN 的面积（分别记为 S_1 与 S_2）表示为α的函数

（4） 求 $y=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}$ 的最大值与最小值

19、解：

（1） 因为 G 是边长为 1 的正三角形 ABC 的中心，

所以 $AG=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle MAG=\frac{\pi}{6}$，

由正弦定理 $\frac{GM}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{GA}{\sin(\pi-\alpha-\frac{\pi}{6})}$

得 $GM=\frac{\sqrt{3}}{6\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})}$

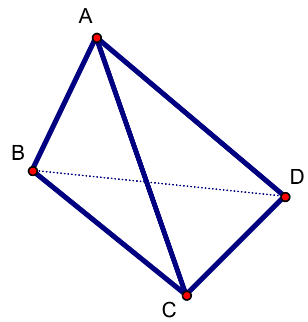
则 $S_1=\frac{1}{2}GM\bullet GA\bullet\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{12\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})}$

同理可求得 $S_2=\frac{\sin\alpha}{12\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})}$

（2） $y=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}=\frac{144}{\sin^2\alpha}[\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})+\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})]$

$=72(3+\cot^2\alpha)$ 因为 $\frac{\pi}{3}\le\alpha\le\frac{2\pi}{3}$，所以当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 时，y 取得最大值 $y_{max}=240$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，y 取得最小值 $y_{min}=216$



20、（本小题满分 12 分）

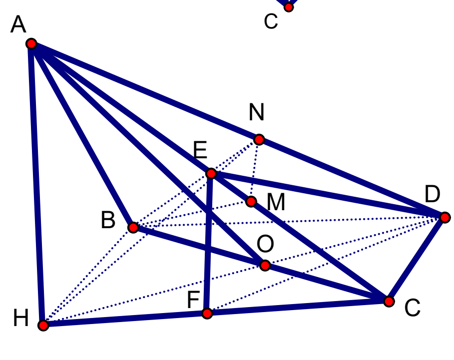
如图，在三棱锥 A—BCD 中，侧面 ABD、ACD 是全等的直角三角形，AD 是公共的斜边，

且 $AD=\sqrt{3}$，BD＝CD＝1，另一个侧面是正三角形

（4） 求证：AD⊥BC

（5） 求二面角 B—AC—D 的大小

（6） 在直线 AC 上是否存在一点 E，使 ED 与面 BCD 成 30°角？若存在，确定 E 的位置；若不存在，说明理由。



20、解法一：

（1） 方法一：作 AH⊥面 BCD 于 H，连 DH。

AB⊥BD⇒HB⊥BD，又 $AD=\sqrt{3}$，BD＝1

$\therefore AB=\sqrt{2}=BC=AC$ $\therefore BD\perp DC$

又 BD＝CD，则 BHCD 是正方形，则 DH⊥BC∴AD⊥BC

方法二：取 BC 的中点 O，连 AO、DO

则有 AO⊥BC，DO⊥BC，∴BC⊥面 AOD

∴BC⊥AD

（2） 作 BM⊥AC 于 M，作 MN⊥AC 交 AD 于 N，则∠BMN 就是二面角 B—AC—D 的平面角，因为

$AB=AC=BC=\sqrt{2}$ ∴M 是 AC 的中点，且 MN∥CD，则 $BM=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$MN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$，$BN=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理可求得 $\cos\angle BMN=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\angle BMN=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$

（3） 设 E 是所求的点，作 EF⊥CH 于 F，连 FD。则 EF∥AH，∴EF⊥面 BCD，∠EDF 就是 ED 与面 BCD 所成的角，则∠EDF＝30°。设 EF＝x，易得 AH＝HC＝1，则 CF＝x，$FD=\sqrt{1+x^2}$，$\therefore\tan\angle EDF=\frac{EF}{FD}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $CE=\sqrt{2}x=1$

故线段 AC 上存在 E 点，且 CE＝1 时，ED 与面 BCD 成 30°角。

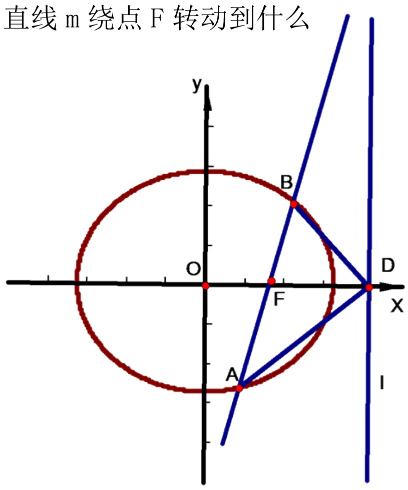
解法二：此题也可用空间向量求解，解答略

21、（本大题满分 12 分）

如图，椭圆 Q：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的右焦点 F（c，0），过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动，并且交椭圆于 A、B 两点，P 是线段 AB 的中点

（3） 求点 P 的轨迹 H 的方程

（4） 在 Q 的方程中，令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta$（$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$），确定θ的值，使原点距椭圆的右准线 *l* 最远，此时，设 *l* 与 x 轴交点为 D，当直线 m 绕点 F 转动到什么位置时，三角形 ABD 的面积最大？



21、解：如图，（1）设椭圆 Q：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）

上的点 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2），又设 P 点坐标为 P（x，y），则

$$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

1°当 AB 不垂直 x 轴时，$x_1\neq x_2$，

由（1）－（2）得

$b^2(x_1-x_2)2x+a^2(y_1-y_2)2y=0$

$$\therefore\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\frac{y}{x-c}$$

$\therefore b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

2°当 AB 垂直于 x 轴时，点 P 即为点 F，满足方程（3）

故所求点 P 的轨迹方程为：$b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$

（2）因为，椭圆 Q 右准线 *l* 方程是 $x=\frac{a^2}{c}$，原点距 *l*

的距离为$\dfrac{a^2}{c}$，由于 $c^2=a^2-b^2$，$a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta$（$0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$）

则$\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{1+\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，上式达到最大值。此时 $a^2=2$，$b^2=1$，$c=1$，D（2，0），$|DF|=1$

设椭圆 Q：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$上的点 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2），三角形 ABD 的面积

$S=\dfrac{1}{2}|y_1|+\dfrac{1}{2}|y_2|=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|$

设直线 m 的方程为 $x=ky+1$，代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$中，得 $(2+k^2)y^2+2ky-1=0$

由韦达定理得 $y_1+y_2=-\dfrac{2k}{2+k^2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{2+k^2}$，

$4S^2=(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\dfrac{8(k^2+1)}{(k^2+2)^2}$

令 $t=k^2+1\ge1$，得 $4S^2=\dfrac{8t}{(t+1)^2}=\dfrac{8}{t+\frac{1}{t}+2}\le\dfrac{8}{4}=2$，当 $t=1$，$k=0$ 时取等号。

因此，当直线 m 绕点 F 转到垂直 x 轴位置时，三角形 ABD 的面积最大。

22、（本大题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{3}{2}$，且 $a_n=\dfrac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}(n\ge2,\ n\in N^*)$

（3） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（4） 证明：对于一切正整数 n，不等式 $a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

22、解：

（1） 将条件变为：$1-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{n-1}{a_{n-1}})$，因此 $\{1-\dfrac{n}{a_n}\}$ 为一个等比数列，其首项为

$1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，公比$\dfrac{1}{3}$，从而 $1-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{3^n}$，据此得 $a_n=\dfrac{n\bullet3^n}{3^n-1}$（$n\ge1$）…………1°

（2） 证：据 1°得，$a_1\bullet a_2\bullet\cdots a_n=\dfrac{n!}{(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})}$

为证 $a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

只要证 $n\in N^*$ 时有 $(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})>\frac{1}{2}$ …………2°

显然，左端每个因式都是正数，先证明，对每个 $n\in N^*$，有

$(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})\geq 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$ …………3°

用数学归纳法证明 3°式：

（i） $n=1$ 时，3°式显然成立，

（ii） 设 $n=k$ 时，3°式成立，

即 $(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^k})\geq 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k})$

则当 $n=k+1$ 时，

$(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\bullet\cdots(1-\frac{1}{3^k})\bullet(1-\frac{1}{3^{k+1}})\geq[1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k})]\bullet(1-\frac{1}{3^{k+1}})$

$=1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k})-\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k})$

$\geq 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}})$ 即当 $n=k+1$ 时，3°式也成立。

故对一切 $n\in N^*$，3°式都成立。

利用 3°得，$(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})\geq 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})=1-\dfrac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}$

$=1-\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n>\frac{1}{2}$

故 2°式成立，从而结论成立。