2012年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学文科

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共6页，时量120分钟，满分150分。

试卷总评：总体来说2012湖南文科数学试题相对于2010，2011维持的稳定的命题趋势，试题注重层次叠进，沿用了2011的命题思路，文理同题，注重了对文理科考试内容和层次差别的处理。选择题、填空题的布局合理，注重对考生基础知识，基本技能的全面考查，为学生的能力考查提供了一个良好的环境。总体来说，试卷有利于课改，有利于中学教学，有利于高校选拔人才。

一选择题：本大题共9小题，每小题5分，共45分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x\,|\,x^2=x\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0\}$

【答案】B

【解析】因 $N=\{x\,|\,x^2=x\}=\{0,1\}$，故 $M\cap N=\{0,1\}$，选B。

【考点定位】集合的运算

2. 复数 $z=i(i+1)$（i为虚数单位）的共轭复数是　　（　　）

A. $-1-i$　　B. $-1+i$　　C. $1-i$　　D. $1+i$

【答案】A

【解析】因为 $z=i^2+i=-1+i$，所以 $\bar{z}=-1-i$，选A。

【考点定位】复数的概念与运算

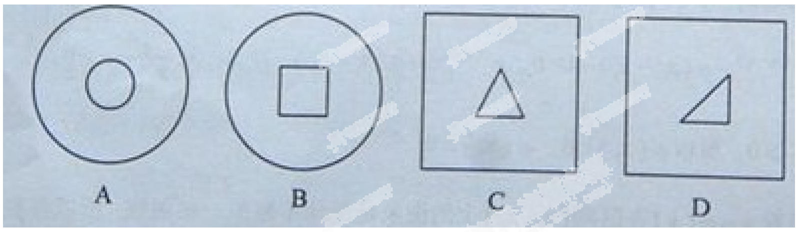
3. 命题“若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha=1$”的逆否命题是（　　）

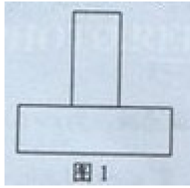
A. 若 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha\neq1$　　B. 若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha\neq1$

C. 若 $\tan\alpha\neq1$，则 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　　D. 若 $\tan\alpha\neq1$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

【答案】C
【解析】逆否命题需将原命题的条件和结论同时否定，并交换位置，故可知选C.
【考点定位】四种命题

4. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是（　　）





【答案】C

【解析】由三视图的识图原理可知，C 不对，其正视图与侧视图有不同，正视图应在中间画一虚线。

【考点定位】三视图和直观图.

5. 设某大学的女生体重 y（单位：kg）与身高 x（单位：cm）具有线性相关关系，根据一组样本数据 (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$，则下列结论不正确的是（　　）

A. y 与 x 具有正的线性相关关系

B. 回归直线过样本点的中心 $(\overline{x}, \overline{y})$

C. 若该大学某女生身高增加 1 cm，则其体重约增加 0.85kg

D. 若该大学某女生身高为 170 cm，则可断定其体重必为 58.79kg

【答案】D

【解析】由回归方程的相关知识可知，D 显然不正确，利用回归方程我们只能进行回顾预报，而不能得出绝对预报的结论。

【考点定位】相关关系与回归方程.

6. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10，点 $P(2,1)$ 在的渐近线上，则 C 的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{80}=1$

【答案】A

【解析】因焦距为 10，则 $c=5$，又渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，因点 $P(2,1)$ 在的渐近线，则 $a=2b$，故可得 $a^2=20, b^2=5$，选 A。

【考点定位】双曲线方程与性质.

7. 设 $a>b>1$，$c<0$，给出下列三个结论：

①$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$；②$a^c<b^c$；③$\log_b(a-c)>\log_a(b-c)$.

其中所有的正确结论的序号是（　　）

A. ①.　　　　B. ①②　　　　C. ②③　　　　D. ①②③

【答案】D

【解析】因为$a>b>1$,所以$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，又因为$c<0$，所以$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$；因为$y=x^{\alpha}$ $(\alpha<0)$在$(0,+\infty)$上是减函数，所以$a^{c}<b^{c}$；因为$c<0$，所以$a-c>b-c$，因为$a>b>1$，所以$\log_{b}a>1$，所以$\log_{a}(b-c)=\frac{\log_{b}(b-c)}{\log_{b}a}<\log_{b}(b-c)<\log_{b}(a-c)$，故选D.

【考点定位】不等式的性质.

8. 在ΔABC中，$AC=\sqrt{7}$，$BC=2$，$B=60^{\circ}$，则BC边上的高等于　（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{4}$

【答案】B

【解析】由余弦定理可得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$,得$AB^2-2AB-3=0$,解得$AB=3$或$AB=-1$(舍去)；由三角形的面积公式$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}BC\cdot h$，得$h=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，选B。

【考点定位】解三角形.

9. 设定义在R上的函数$f(x)$是最小正周期为2π的偶函数，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，当$x\in[0,\pi]$时，$0<f(x)<1$；当$x\in(0,\pi)$且$x\neq\frac{\pi}{2}$时，$(x-\frac{\pi}{2})f'(x)>0$.

则函数$y=f(x)-\sin x$在$[-2\pi,2\pi]$上的零点个数为　（　　）

A. 2　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 8

【答案】B

【解析】依题可知，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$递减，$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$f'(x)>0$，即$f(x)$递增，又$x\in[0,\pi]$时，$0<f(x)<1$；即可知$x=\frac{k\pi}{2}$时，$y=f(x)-\sin x\neq0$，画出$\begin{cases}y=f(x)\\y=\sin x\end{cases}$的简图可知，在$[-2\pi,2\pi]$上的零点个数为4，选B。

【考点定位】导数与方程的应用.

二填空题：本大题共 7 小题，考生作答 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题（请考生在第 10、11 二题中任选一题作答，如果全做，则按第一题记分）

10. 在极坐标系中，曲线 $C_1:\rho(\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta)=1$ 与曲线 $C_2:\rho=a(a>0)$ 的一个交点在极轴上，则 $a=$ ______.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】曲线 $C_1:\rho(\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta)=1$ 化普通直角坐标方程得 $C_1:\sqrt{2}x+y=1$，曲线 $C_2:\rho=a(a>0)$ 化普通直角坐标方程得 $C_2:x^2+y^2=a^2$，由题知交点在 x 轴上，故在 $\sqrt{2}x+y=1$ 中，令 $y=0$，所以 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

【考点定位】极坐标与参数方程

11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定，需要优选培养温度，试验范围定为 $29^\circ C$ ： $63^\circ C$，精确度要求 $\pm 1^\circ C$. 用分数法进行优选时，能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为_____.

【答案】7

【解析】因 $29^\circ C$ ： $63^\circ C$，可知区间的长度为 34，因 $F_8=34$，由分数法最优性原理可知，能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为 7 次。

【考点定位】优选法.

二、必做题（12~16 题）

12. 不等式 $x^2 - 5x + 6 £ 0$ 的解集为__________。

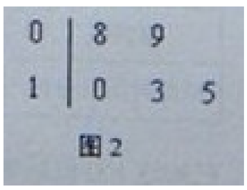
【答案】 $\{x\,|\,2\le x\le 3\}$

【解析】由 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\le 0$，解得 $2\le x\le 3$，即解集为 $\{x\,|\,2\le x\le 3\}$。

【考点定位】一元二次不等式的解法.

13. 图 2 是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图，则该运动员在这五场比赛中得分的方差为________.

(注：方差 $s^2 = \dfrac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + L + (x_n - \bar{x})^2]$，



其中 $\bar{x}$ 为 x_1, x_2, L, x_n 的平均数）

【答案】$\dfrac{34}{5}$

【解析】由茎叶图的数据可知，样本平均数为 $\overline{x}=\dfrac{8+9+10+13+15}{5}=11$，再由方差公式可得 $s^2=\dfrac{1}{5}[(8-11)^2+(9-11)^2+(10-11)^2+(13-11)^2+(15-11)^2]=\dfrac{34}{5}$.

【考点定位】茎叶图和方差.

14．如果执行如图 3 所示的程序框图，输入 $x=4.5$，则输出的数 $i=$ _____.

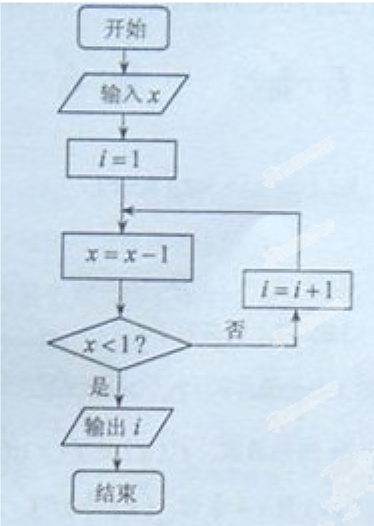


图 3

【答案】4

【解析】由框图流程进行推理，可知

$i=1, x=3.5; i=2, x=2.5; i=3, x=1.5; i=4, x=0.5<1$，此时输出 $i=4$.

【考点定位】程序框图的推理运算.

15．如图 4，在平行四边形 $ABCD$ 中，AP ^ BD，垂足为 P，且 $AP=3$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$ _________.

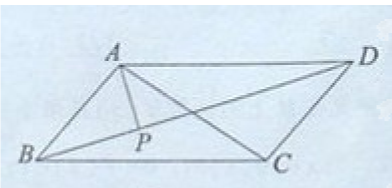


图 4

【答案】18

【解析】因 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，而由数量积的定义可知 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}^2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}^2$，所以

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AP}^2=18$.

【考点定位】平面向量加法运算和数量积.

16．对于$n\in N^*$，将n表示为$n=a_k\times 2^k+a_{k-1}\times 2^{k-1}+\cdots+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0$，当$i=k$时，$a_i=1$，当$0\le i\le k-1$时，$a_i$为 0 或 1. 定义$b_n$如下：在$n$的上述表示中，当$a_0,a_1,a_2\cdots,a_k$中等于 1 的个数为奇数时，$b_n=1$；否则$b_n=0$.

(1) $b_2+b_4+b_6+b_8=$__________;

(2)记c_m为数列$\{b_n\}$中第m个为 0 的项与第$m+1$个为 0 的项之间的项数，则c_m的最大值是_______。

【答案】(1)3；(2) 2

【解析】(1)因$2=10_{(2)}$，$\therefore b_2=1$；$4=100_{(2)}$，$\therefore b_4=1$；$6=110_{(2)}$，$\therefore b_6=0$；$8=1000_{(2)}$，$\therefore b_8=1$，故$b_2+b_4+b_6+b_8=3$；校对与解析：邓永生 QQ：4474986

(2) 由题可知 1，2，3，4，5，6，7，8，9，……，用二进制表示为 1，10，11，100，101，110，111，1000，1001，1010，1011，则对应的$\{b_n\}$依次为 1，1，0，1，0，0，1，1，0，0，1，……，可知$\{b_n\}$中为 0 的项取决于最后两位数字，①如果c_m表示的第m个为 0 的项为b_n：$\underbrace{1101\cdots}_{2k个1}00$则$b_{n+1}$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k个1}01$，即$b_{n+1}=1$；$b_{n+2}$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k个1}10$，即$b_{n+2}=1$；$b_{n+3}$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k个1}11$，即$b_{n+3}=0$；中间有 2 项；②如果$c_m$表示的第$m$个为 0 的项为$b_n$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k-1个1}01$则$b_{n+1}$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k-1个1}110$，即$b_{n+1}=0$；中间有 0 项；③如果$c_m$表示的第$m$个为 0 的项为$b_n$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k个1}11$则$b_{n+1}$：$\underbrace{1101\cdots}_{?个1}00$，即若前有偶数个 1 则$b_{n+1}=0$；中间有 0 项；前有奇数个 1，则$b_{n+1}=1$，有$b_{n+2}=0$，中间有 1 项；④如果$c_m$表示的第$m$个为 0 的项为$b_n$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k-1个1}10$，则$b_{n+1}$：$\underbrace{1101\cdots}_{2k-1个1}11$，即$b_{n+1}=1$；$b_{n+2}$：$\underbrace{1101\cdots}_{?个1}00$，即若前有偶数个 1 则$b_{n+2}=0$；中间有 1 项；前有奇数个 1，则$b_{n+2}=1$，有$b_{n+3}=0$，中间有 2 项；综上可知，$c_m$的最大值是 2。

【考点定位】数列的综合应用.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 12 分）

某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示：

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件以上
顾客数（人）	x	30	25	y	10
结算时间（分钟/人）	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1)确定 x,y 的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；

（2）求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率.（将频率视为概率）

【解析】（Ⅰ）由已知得 $25+y+10=55, x+30=45$，所以 $x=$

客一次购物的结算时间组成一个总体，所收集的 100 位顾客一次

的一个容量为 100 的简单随机样本，顾客一次购物的结算时间的

计，其估计值为 $\dfrac{1\times15+1.5\times30+2\times25+2.5\times20+3\times10}{100}=1.9$（分

（Ⅱ）记 A 为事件"一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟"

"该顾客一次购物的计算时间为 1 分钟"，"该顾客一次购物的结

客一次购物的结算时间为 2 分钟"。将频率视为概率得

$P(A_1)=\dfrac{15}{100}=\dfrac{3}{20}$，$P(A_2)=\dfrac{30}{100}=\dfrac{3}{10}$，$P(A_3)=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$，

因为 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1, A_2, A_3 是互斥事件，所以

$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\dfrac{3}{20}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{4}$

故一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率为 $\dfrac{7}{10}$。

【考点定位】频率分布表和概率的计算.

18．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in R,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图 5 所示，

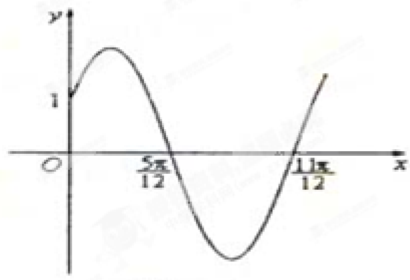


图 5

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求函数 $g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{12})-f(x+\dfrac{\pi}{12})$ 的单调递增区间.

【解析】（Ⅰ）又题设图象知，周期 $T=2(\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12})=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$.

因为点 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$ 在函数图象上，所以 $A\sin(2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi)=0$，即 $\sin(\dfrac{5\pi}{6}+\varphi)=0$，

又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{5\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}+\varphi<\dfrac{4\pi}{3}$。从而 $\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

又点 $(0,1)$ 在函数图象上，所以 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，得 $A=2$。

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）$g(x)=2\sin[2(x-\dfrac{\pi}{12})+\dfrac{\pi}{6}]-2\sin[2(x+\dfrac{\pi}{12})+\dfrac{\pi}{6}]=2\sin 2x-2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

$= 2\sin 2x - 2(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x) = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \le 2x - \frac{\pi}{3} \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \le x \le k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in Z$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}], k \in Z$.

【考点定位】三角函数的图像与性质.

19.（本小题满分 12 分）

如图 6，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD // BC$，$AC \perp BD$.

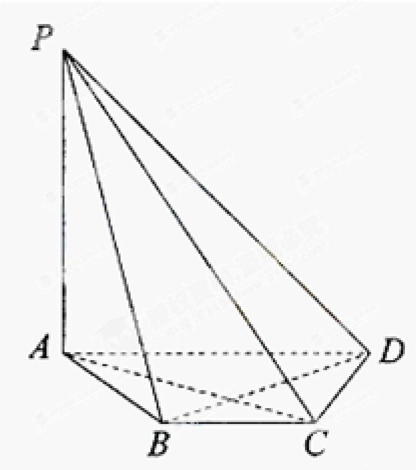


图 6

(1) 证明：$BD \perp PC$；

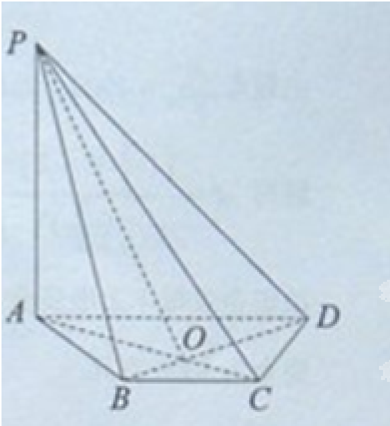
（2）若 $AD = 4, BC = 2$，直线 PD 与平面 PAC 所成的角为 $30°$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【解析】(I) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp BD$.

又 $AC \perp BD$，PA, AC 是平面 PAC 内的两条相交直线，所以 $BD \perp$ 平面 PAC.

而 $PC \subset$ 平面 PAC，所以 $BD \perp PC$.

（II）设 AC 和 BD 相交于点 O，连结 PO，由（I）知，$BD \perp$ 平面 PAC，所以 $\angle DPO$ 是直线 PD 和平面 PAC 所成的角。从而 $\angle DPO = 30°$.由 $BD \perp$ 平面 PAC，$PO \subset$ 平面 PAC 知 $BD \perp PO$，在 $Rt\Delta POD$ 中，由 $\angle DPO = 30°$ 得 $PD = 2OD$.



因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AC \perp BD$，所以 $\Delta AOD, \Delta BOC$ 均为等腰直角三角形，从

而梯形 $ABCD$ 的高为 $\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(4+2)=3$，于是梯形 $ABCD$ 的面积

$S=\frac{1}{2}\times(4+2)\times 3=9$.

在等腰直角三角形中，$OD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=2\sqrt{2}$，

所以 $PD=2OD=4\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=4$，

故四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times S\times PA=\frac{1}{3}\times 9\times 4=12$

【考点定位】立体几何的垂直关系的证明和体积的计算

20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金 2000 万元，将其投入生产，到当年年底资金增长了 50%. 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始，每年年底上缴资金 d 万元，并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.

(1) 用 d 表示 a_1, a_2，并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式；

（2）若公司希望经过 $m(m \geq 3)$ 年使企业的剩余资金为 4000 万元，试确定企业每年上交资金 d 的值（用 m 表示）.

【解析】（I）由题意得 $a_1=2000(1+50\%)-d=3000-d$，

$a_2=a_1(1+50\%)-d=\frac{3}{2}a_1-d=4500-\frac{5}{2}d$，

$a_{n+1}=a_n(1+50\%)-d=\frac{3}{2}a_n-d$.

（II）由（I）得

$a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}-d=\frac{3}{2}(\frac{3}{2}a_{n-2}-d)-d=(\frac{3}{2})^2a_{n-2}-\frac{3}{2}d-d=\cdots$

$=(\frac{3}{2})^{n-1}a_1-d[1+\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2+\cdots+(\frac{3}{2})^{n-2}]$

整理得 $a_m=(\frac{3}{2})^{m-1}(3000-d)-2d[(\frac{3}{2})^{m-1}-1]=(\frac{3}{2})^{m-1}(3000-3d)+2d$

由题意 $a_m=4000$，即 $(\frac{3}{2})^{m-1}(3000-3d)+2d=4000$.

解得 $d=\dfrac{[(\frac{3}{2})^m-2]\times 1000}{(\frac{3}{2})^m-1}=\dfrac{1000(3^m-2^{m+1})}{3^m-2^m}$

故该企业每年上缴资金 d 的值为 $\dfrac{1000(3^m-2^{m+1})}{3^m-2^m}$ 时，经过 $m(m\geq 3)$ 年年企业的剩余资金为 4000 万元.

【考点定位】数列的综合应用

21.(本小题满分 13 分）在直角坐标系 xOy 中，已知中心在原点，离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆 E 的一个焦点为圆 $C: x^2+y^2-4x+2=0$ 的圆心.

(1) 求椭圆 E 的方程；

（2）设 P 是椭圆 E 上一点，过 P 作两条斜率之积为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l_1,l_2. 当直线 l_1,l_2 都与圆 C 相切时，求 P 的坐标.

【解析】(I) 由 $x^2+y^2-4x+2=0$ 得 $(x-2)^2+y^2=2$，故圆 C 的圆心为点 $(2,0)$，从而可设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其焦距为 $2c$. 由题设知 $c=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

所以 $a=2c=4$，$b^2=a^2-c^2=12$. 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(II) 设点的坐标为 (x_0,y_0)，l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，则 l_1,l_2 的方程分别为

$l_1: y-y_0=k_1(x-x_0), l_2: y-y_0=k_2(x-x_0)$，且 $k_1k_2=\frac{1}{2}$，由 l_1 与圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$

相切得 $\dfrac{|2k_1+y_0-k_1x_0|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{2}$

即 $[(2-x_0)^2-2]k_1^2+2(2-x_0)y_0k_1+y_0^2-2=0$，

同理可得 $[(2-x_0)^2-2]k_2^2+2(2-x_0)y_0k_2+y_0^2-2=0$

从而 k_1, k_2 是方程 $[(2-x_0)^2-2]k^2+2(2-x_0)y_0k+y_0^2-2=0$ 的两个实根。于是

$$\begin{cases}(2-x_0)^2-2\neq 0\\ \Delta=8[(2-x_0)^2+y_0^2-2>0\end{cases} \quad ①$$

且 $k_1k_2=\dfrac{y_0^2-2}{(2-x_0)^2-2}=\dfrac{1}{2}$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{12}=1\\ \dfrac{y_0^2-2}{(2-x_0)^2-2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 得 $5x_0^2-8x_0-36=0$，解得 $x_0=-2$ 或 $x_0=\dfrac{18}{5}$.

由 $x_0=-2$ 得 $y_0=\pm 3$；由 $x_0=\dfrac{18}{5}$ 得 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{57}}{5}$；它们均满足①式，

故点 P 的坐标为 $(-2,3)$，或 $(-2,-3)$，或 $(\dfrac{18}{5},\dfrac{\sqrt{57}}{5})$，或 $(\dfrac{18}{5},-\dfrac{\sqrt{57}}{5})$.

【考点定位】椭圆的方程与直线与圆锥曲线的位置关系.

22. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）若对一切 $x\in R, f(x)\geq 1$ 恒成立，求 a 的取值集合；

（Ⅱ）在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))(x_1<x_2)$，记直线 AB 的斜率为 k，证明：存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)=k$ 成立.

【解析】(Ⅰ) $f'(x)=e^x-a$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$，

当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(\ln a)=a-a\ln a$.

于是对一切 $x\in R$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，当且仅当 $a-a\ln a\geq 1$ ①

令 $g(t)=t-t\ln t$，则 $g'(t)=-\ln t$.

当 $0<t<1$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，故当 $t=1$ 时，

$g(t)$ 取最大值 $g(1)=1$，因此，当且仅当 $a=1$ 时，①式成立。

综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$.

（II）由题意知，$k=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}-a$.

令 $\varphi(x)=f'(x)-k=e^x-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，则 $\varphi(x_1)=-\dfrac{e^{x_1}}{x_2-x_1}[e^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1]$，

$\varphi(x_2)=\dfrac{e^{x_2}}{x_2-x_1}[e^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1]$.

令 $F(t)=e^t-t-1$，则 $F'(t)=e^t-1$.

当 $t<0$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减；当 $t>0$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增，故当 $t\neq 0$ 时

$F(t)>F(0)=0$ 即 $e^t-t-1>0$.

从而 $e^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1>0$，$e^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1>0$，又 $\dfrac{e^{x_1}}{x_2-x_1}>0$，$\dfrac{e^{x_2}}{x_2-x_1}>0$，所以

$\varphi(x_1)<0$，$\varphi(x_2)>0$. 因为函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，

所以存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=k$ 成立.

【考点定位】导数的综合应用。