

2001 年湖北高考理科数学真题及答案

第 I 卷 (选择题共 60 分)

参考公式:

如果事件 A、B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P, 那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$$S_{\text{锥侧}} = \frac{1}{2} cl$$

其中 c 表示底面周长, l 表示斜高或母线长.

棱锥、圆锥的体积公式

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} sh$$

其中 s 表示底面积, h 表示高.

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 函数 $y = 3 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ 的周期、振幅依次是

- (A) 4π 、3 (B) 4π 、-3 (C) π 、3 (D) π 、-3

(2) 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = n^2$, 则 $\{a_n\}$ 是

- (A) 等比数列, 但不是等差数列 (B) 等差数列, 但不是等比数列
(C) 等差数列, 而且也是等比数列 (D) 既非等比数列又非等差数列

(3) 过点 A(1, -1)、B(-1, 1) 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是

- (A) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ (B) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$
(C) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ (D) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

(4) 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x) = \log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(0, \frac{1}{2}]$ (C) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (D) $(0, +\infty)$

(5) 若向量 $a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$, $c = (-1, 2)$, 则 $c =$

- (A) $-\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b$ (B) $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$ (C) $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$ (D) $-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b$

(6) 若 A、B 是 x 轴上的两点, 点 P 的横坐标为 2 且 $|PA| = |PB|$. 若直线 PA 的方程为

$x - y + 1 = 0$, 则直线 PB 的方程是

- (A) $x + y - 5 = 0$ (B) $2x - y - 1 = 0$
(C) $2y - x - 4 = 0$ (D) $2x + y - 7 = 0$

(7) 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, $\sin \beta + \cos \beta = b$, 则

以上两个命题中，逆命题为真命题的是_____.

(把符合要求的命题序号都填上)

(15) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q =$ _____.

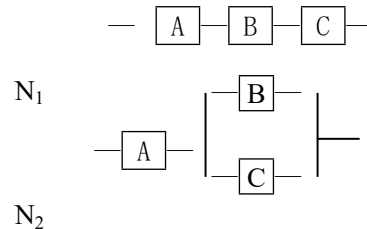
三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

解关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-a^2} < 0 (a \in R)$.

(18) (本小题满分 12 分)

如图, 用 A、B、C 三类不同的无件连接成两个系统 N_1 、 N_2 . 当元件 A、B、C 都正常工作时, 系统 N_1 正常工作; 当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有一个正常工作时, 系统 N_2 正常工作. 已知元件 A、B、C 正常工作的概率依次为 0.80, 0.90, 0.90. 分别求系统 N_1 、 N_2 正常工作的概率 P_1 、 P_2 .



(19) (本小题满分 12 分)

设 $a > 0$, $f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x}$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数.

(I) 求 a 的值;

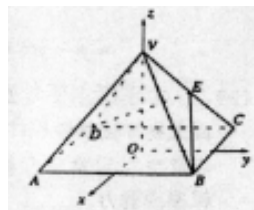
(II) 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

注意：考生在（20 甲）、（20 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（20 甲）计分。

（20 甲）（本小题满分 12 分）如图，以正四棱锥 $V-ABCD$ 底面中心 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，其中 $Ox \parallel BC$ ， $Oy \parallel AB$ 。E 为 VC 中点，正四棱锥底面边长为 $2a$ ，高为 h 。

（I）求 $\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle$ ；

（II）记面 BCV 为 α ，面 DCV 为 β ，若 $\angle BED$ 是二面角 $\alpha-VC-\beta$ 的平面角，求 $\angle BED$ 。



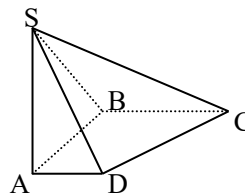
（20 乙）（本小题满分 12 分）如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中，

$\angle ABC = 90^\circ$, $SA \perp$ 面 $ABCD$,

$SA=AB=BC=1$, $AD=\frac{1}{2}$.

（I）求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积；

（II）求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值。

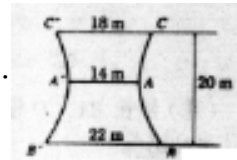


(21) (本小题满分 12 分)

某电厂冷却塔的外形是如图所示双曲线的一部分绕其中轴 (即双曲线的虚轴) 旋转所成的曲面, 其中 A 、 A' 是双曲线的顶点, C 、 C' 是冷却塔上口直径的两个端点, B 、 B' 是下底直径的两个端点, 已知 $AA' = 14\text{m}$, $CC' = 18\text{m}$, $BB' = 22\text{m}$, 塔高 20m .

(I) 建立坐标系并写出该双曲线方程;

(II) 求冷却塔的容积 (精确到 10m^3 , 塔壁厚度不计, π 取 3.14).



(22) (本小题满分 14 分)

设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 曲线 $x^2 \sin \theta + y^2 \cos \theta = 1$ 和 $x^2 \cos \theta - y^2 \sin \theta = 1$ 有 4 个不同的交点.

(I) 求 θ 的取值范围;

(II) 证明这 4 个交点共圆, 并求圆半径的取值范围.

参 考 答 案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算

(1) A (2) B (3) C (4) A (5) B (6) A (7) A (8) D (9) A (10) B (11) D (12) D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算

(13) $\frac{5\pi}{3}$ (14) 1.2 (15) ② (16) 1

三、解答题

(17) 本小题主要考查分式不等式的解法，考查分类讨论的数学思想.

解：原不等式的解集是下面不等式组 (I)、(II) 的解集的并集：

$$(I) \begin{cases} x-a=0, \\ x-a^2 < 0; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x-a < 0, \\ x-a^2 > 0; \end{cases}$$

分情况讨论

(i) 当 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时，有 $a < a^2$ ，此时不等式组 (I) 的解集为 $\{x | a < x < a^2\}$ ，不等式组 (II) 的解集为空集 ϕ ；

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时，有 $a^2 < a$ ，此时，不等式组 (I) 的解集为空集 ϕ ，不等式组 (II) 的解集为 $\{x | a^2 < x < a\}$ ；

(iii) 当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，原不等式无解.

综上，当 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时，原不等式的解集为 $\{x | a < x < a^2\}$ ，当 $0 < a < 1$ 时，原不等式的解集为 $\{x | a^2 < x < a\}$ ；当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，原不等式的解集为 ϕ 。

(18) 本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力。

解：分别记元件 A、B、C 正常工作作为事件 A、B、C，由已知条件

$$P(A)=0.80, P(B)=0.90, P(C)=0.90.$$

(I) 因为事件 A、B、C 是相互独立的，所以，系统 N_1 正常工作的概率

$$P_1 = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.80 \times 0.90 \times 0.90 = 0.648.$$

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648.

(II) 系统 N_2 正常工作的概率

$$P_2 = P(A) \cdot [1 - P(\bar{B} \cdot \bar{C})] = P(A) \cdot [1 - P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})],$$

$$\because P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.90 = 0.10, P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.90 = 0.10,$$

$$\therefore P_2 = 0.80 \times [1 - 0.10 \times 0.10] = 0.80 \times 0.99 = 0.792.$$

故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792.

(19) 本小题主要考查函数的奇偶性和单调性等基本性质，指数函数和不等式的基本性质和运算，以及综合分析问题的能力。

(I) 解：依题意，对一切 $x \in R$ 有 $f(x) = f(-x)$ ，即 $\frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x} = \frac{1}{ae^x} + ae^x$ ，

所以 $(a - \frac{1}{a})(e^x - \frac{1}{e^x}) = 0$ 对一切 $x \in R$ 成立.

由此得到 $a - \frac{1}{a} = 0$ ，即 $a^2 = 1$.

又因为 $a > 0$ ，所以 $a = 1$.

(II) 证明一：设 $0 < x_1 < x_2$ ，

$$f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1} - e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}} = (e^{x_2} - e^{x_1}) \left(\frac{1}{e^{x_1+x_2}} - 1 \right)$$

$$= e^{x_1} (e^{x_2-x_1} - 1) \cdot \frac{1 - e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}},$$

由 $x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 - x_1 > 0$, 得 $x_1 + x_2 > 0, e^{x_2-x_1} - 1 > 0, 1 - e^{x_2+x_1} < 0$.

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

证明二: 由 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 得 $f'(x) = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $e^{-x} > 0, e^{2x} - 1 > 0$, 此时 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

注意: 考生在 (20 甲)、(20 乙) 两题中选一题作答, 如果两题都答, 只以 (20 甲) 计分.

(20 甲) 本小题主要考查空间直角坐标的概念、空间点和向量的坐标表示以及两个向量夹角的计算方法; 考查运用向量研究空间图形的数学思想方法.

解: (I) 由题意知 $B(a, a, 0), C(-a, a, 0), D(-a, -a, 0), E(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2})$,

$$\text{由此得 } \overrightarrow{BE} = (-\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2}), \overrightarrow{DE} = (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{h}{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DE} = (-\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2}) + (-\frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2}) + \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{3a^2}{2} + \frac{h^2}{4},$$

$$|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(-\frac{3a}{2})^2 + (-\frac{a}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{10a^2 + h^2}.$$

由向量的数量积公式有

$$\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} = \frac{-\frac{3a^2}{2} + \frac{h^2}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{10a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{10a^2 + h^2}} = \frac{-6a^2 + h^2}{10a^2 + h^2}.$$

(II) 若 $\angle BED$ 是二面角 $\alpha - VC - \beta$ 的平面角, 则 $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CV}$, 即有 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CV} = 0$.

又由 $C(-a, a, 0), V(0, 0, h)$, 有 $\overrightarrow{CV} = (a, -a, h)$ 且 $\overrightarrow{BE} = (-\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2})$,

$$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CV} = -\frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{2} = 0, \text{ 即 } h = \sqrt{2}a, \text{ 这时有}$$

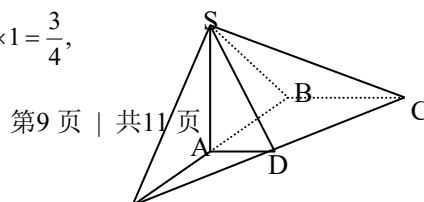
$$\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{-6a^2 + h^2}{10a^2 + h^2} = \frac{-6a^2 + (\sqrt{2}a)^2}{10a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \angle BED = \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle = \arccos(-\frac{1}{3}) = \pi - \arccos \frac{1}{3}.$$

(20 乙) 本小题主要考查线面关系和棱锥体积计算, 以及空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

解: (I) 直角梯形 ABCD 的面积是

$$M_{\text{底面}} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB = \frac{1+0.5}{2} \times 1 = \frac{3}{4},$$



∴四棱锥 S—ABCD 的体积是

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times SA \times M_{\text{底面}} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(II) 延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱。

∵ AD // BC, BC = 2AD,

∴ EA = AB = SA, ∴ SE ⊥ SB,

∴ SA ⊥ 面 ABCD, 得面 SEB ⊥ 面 EBC, EB 是交线, 又 BC ⊥ EB, ∴ BC ⊥ 面 SEB, 故 SE 是 CS 在面 SEB 上的射影, ∴ CS ⊥ SE, 所以 ∠BSC 是所求二面角的平面角。

$$\because SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}, BC = 1, BC \perp SB, \therefore \tan \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即所求二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(21) 本小题考查选择适当的坐标系建立曲线方程和解方程组等基础知识, 考查应用所学积分知识、思想和方法解决实际问题的能力。

解: (I) 如图建立直角坐标系 xOy, AA' 在 x 轴上, AA' 的中点为坐标原点 O, CC' 与 BB' 平行于 x 轴。

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $a = \frac{1}{2} AA' = 7$.

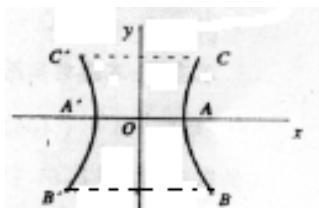
又设 B (11, y₁), C (9, y₂), 因为点 B、C 在双曲线上, 所以有

$$\frac{11^2}{7^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{9^2}{7^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \textcircled{2}$$

由题意知

$$y_2 - y_1 = 20. \quad \textcircled{3}$$



由①、②、③得 $y_1 = -12, y_2 = 8, b = 7\sqrt{2}$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{98} = 1$.

(II) 由双曲线方程得 $x^2 = \frac{1}{2}y^2 + 49$.

设冷却塔的容积为 V (m³), 则 $V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{-12}^8 (\frac{1}{2}y^2 + 49) dy$

$$= \pi \left(\frac{1}{6}y^3 + 49y \right) \Big|_{-12}^8, \text{ 经计算得 } V \approx 4.25 \times 10^3 (m^3).$$

答: 冷却塔的容积为 $4.25 \times 10^3 (m^3)$.

(22) 本小题主要考查坐标法、曲线的交点和三角函数性质等基础知识, 以及逻辑推理能力和运算能力。

解：(I) 两曲线的交点坐标 (x, y) 满足方程组

$$\begin{cases} x^2 \sin \theta + y^2 \cos \theta = 1, \\ x^2 \cos \theta - y^2 \sin \theta = 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x^2 = \sin \theta + \cos \theta, \\ y^2 = \cos \theta - \sin \theta. \end{cases}$$

有 4 个不同交点等价于 $x^2 > 0$, 且 $y^2 > 0$, 即 $\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta > 0, \\ \cos \theta - \sin \theta > 0. \end{cases}$

又因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以得 θ 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{4})$.

(II) 由 (I) 的推理知 4 个交点的坐标 (x, y) 满足方程

$$x^2 + y^2 = 2 \cos \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{4}),$$

即得 4 个交点共圆, 该圆的圆心在原点, 半径为 $r = \sqrt{2 \cos \theta} (0 < \theta < \frac{\pi}{4})$.

因为 $\cos \theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上是减函数, 所以由 $\cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

知 r 的取值范围是 $(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$.