

2009年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

本试卷共4页，21小题，满分150分。考试用时120分钟。

- 注意事项：**
1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
 2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
 3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
 4. 作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题组号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。
 5. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}sh$ ，其中 S 是锥体的底面积， h 是锥体的高

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $M = \{x | -2 \leq x - 1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x | x = 2k - 1, k = 1, 2, \dots\}$ 的关系的韦恩（Venn）图如图1所示，则阴影部分所示的集合的元素共有

- A. 3个 B. 2个
C. 1个 D. 无穷个

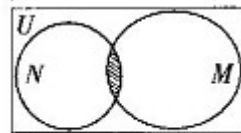


图1

2. 设 z 是复数， $a(z)$ 表示满足 $z^n = 1$ 的最小正整数 n ，则对虚数单位 i ， $a(i) =$

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

3. 若函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的反函数，其图像经过点 (\sqrt{a}, a) ，则 $f(x) =$

- A. $\log_2 x$ B. $\log_{\frac{1}{2}} x$ C. $\frac{1}{2^x}$ D. x^2

3。

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ ，且 $a_5 \cdot a_{2n-5} = 2^{2n} (n \geq 3)$ ，则当 $n \geq 1$ 时，

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} =$$

- A. $n(2n-1)$ B. $(n+1)^2$ C. n^2 D. $(n-1)^2$

4

5. 给定下列四个命题：

- ①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；
 - ②若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；
 - ③垂直于同一直线的两条直线相互平行；
 - ④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直。其中，为真命题的是
- A. ①和② B. ②和③ C. ③和④ D. ②和④

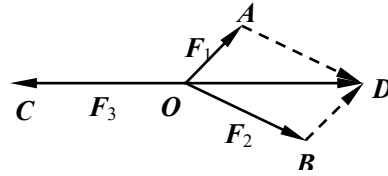
6. 一质点受到平面上的三个力 F_1, F_2, F_3 （单位：牛顿）的作用而处于平衡状态。已知 F_1, F_2 成 60° 角，且 F_1, F_2

的大小分别为 2 和 4，则 F_3 的大小为

- A. 6 B. 2 C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{7}$

7. 2010年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作，若其中小赵和小李只能从事前两项工作，其余三人均能从事这四项工作，则不同的选派方案共有

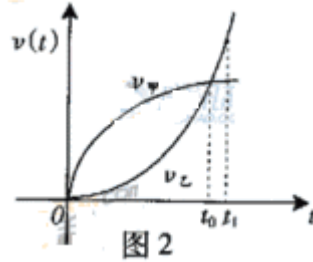
- A. 36种 B. 12种 C. 18种 D. 48种



、小王五名志愿工作，若其中小工作，则不同的

8. 已知甲、乙两车由同一起点同时出发，并沿同一路线（假定为甲车、乙车的速度曲线分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$ （如图2所示）。那么对于 t_0 和 t_1 ，下列判断中一定正确的是

- A. 在 t_1 时刻，甲车在乙车前面
 B. t_1 时刻后，甲车在乙车后面
 C. 在 t_0 时刻，两车的位置相同
 D. t_0 时刻后，乙车在甲车前面

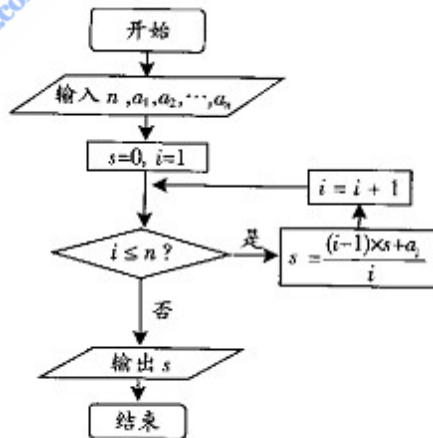


直线）行驶。图中给定的

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

（一）必做题（9~12题）

9. 随机抽取某产品 n 件，测得其长度分别为 a_1, a_2, \dots, a_n ，则图3所示的程序框图输出的 $s = \underline{\hspace{2cm}}$ ，表示的样本的数字特征是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”“:=”。



。（注：

10. 若平面向量 a, b 满足 $|a+b|=1$ ， $a+b$ 平行于 x 轴， $b=(2, -1)$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 已知椭圆 G 的中心在坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且 G 上一点到 G 的两个焦点的距离之和为12，则椭圆 G 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

且为

12. 已知离散型随机变量 X 的分布列如右表。若 $EX=0$ ， $DX=1$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\frac{1}{12}$

）垂直，则

（二）选做题（13~15题，考生只能从中选做两题）

13. （坐标系与参数方程选做题）若直线

$l_1: \begin{cases} x=1-2t, \\ y=2+kt. \end{cases}$ (t 为参数) 与直线 $l_2: \begin{cases} x=s, \\ y=1-2s. \end{cases}$ (s 为参数) 垂直，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. （不等式选讲选做题）不等式 $\frac{|x+1|}{|x+2|} \geq 1$ 的实数解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. (几何证明选讲选做题) 如图4, 点 A, B, C 是圆 O 上的点, 且 $AB = 4, \angle ACB = 45^\circ$, 则圆 O 的面积等于_____

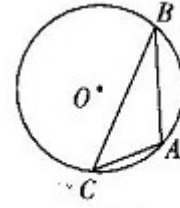


图4

三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分. 解答须写出文字说明、证明过程

和演算步骤,

16. (本小题满分12分)

已知向量 $a = (\sin \theta, -2)$ 与 $b = (1, \cos \theta)$ 互相垂直, 其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(1) 求 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的值;

(2) 若 $\sin(\theta - \varphi) = \frac{\sqrt{10}}{10}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 求 $\cos \varphi$ 的值.

17. (本小题满分12分)

根据空气质量指数API (为整数) 的不同, 可将空气质量分级如下表:

API	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 250	251 ~ 300	> 300
级别	I	II	III ₁	III ₂	IV ₁	IV ₂	V
状况	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染

对某城市一年(365天)的空气质量进行监测, 获得API数据按照区间 $[0, 50], (50, 100], (100, 150], (150, 200], (200, 250], (250, 300], (300, 365]$ 进行分组, 得

到频率分布直方图如图5

- 求直方图中 x 的值;
- 计算一年中空气质量分别为良和轻微污染的天数
- 求该城市某一周至少有2天的空气质量为良或轻微污染的概率.

(结果用分数表示. 已知 $5^7 = 78125, 2^7 = 128$,
 $\frac{3}{1825} + \frac{2}{365} + \frac{7}{1825} + \frac{3}{1825} + \frac{8}{9125} = \frac{123}{9125}$,
 $365 = 73 \times 5$)

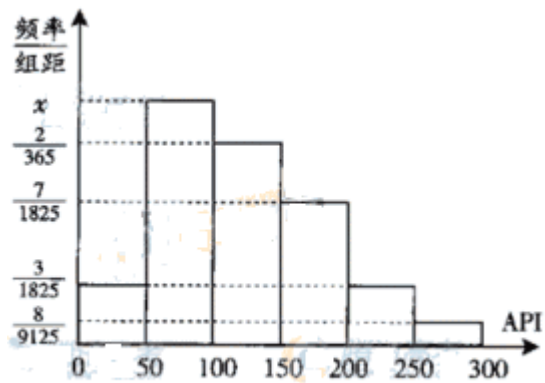


图5

18. (本小题满分14分)

如图6, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2,

点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心, 点 F, G 分别是棱 C_1D_1, AA_1 的中点. 设点 E_1, G_1 分别是点 E, G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影.

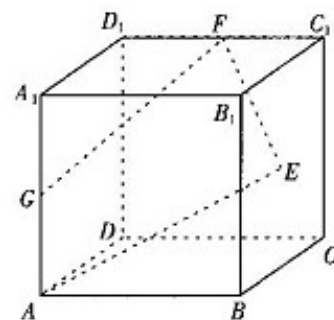


图6

- 求以 E 为顶点, 以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积;
- 证明: 直线 $FG_1 \perp$ 平面 FEE_1 ;
- 求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值

19. (本小题满分14分)

已知曲线 $C: y = x^2$ 与直线 $l: x - y + 2 = 0$ 交于两点 $A(x_A, y_A)$ 和 $B(x_B, y_B)$, 且 $x_A < x_B$. 记曲线 C 在点 A 和点 B 之间那一段 L 与线段 AB 所围成的平面区域 (含边界) 为 D . 设点 $P(s, t)$ 是 L 上的任一点, 且点 P 与点 A 和点 B 均不重合.

(1) 若点 Q 是线段 AB 的中点, 试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程;

(2) 若曲线 $G: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + a^2 + \frac{51}{25} = 0$ 与 D 有公共点, 试求 a 的最小值.

20. (本小题满分 14 分)

已知二次函数 $y = g(x)$ 的导函数的图像与直线 $y = 2x$ 平行, 且 $y = g(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小值

$m - 1 (m \neq 0)$. 设 $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 上的点 P 到点 $Q(0, 2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$, 求 m 的值;

(2) $k (k \in \mathbb{R})$ 如何取值时, 函数 $y = f(x) - kx$ 存在零点, 并求出零点.

21. (本小题满分 14 分)

已知曲线 $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0 (n = 1, 2, \dots)$. 从点 $P(-1, 0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n (k_n > 0)$ 的切线 l_n , 切点为 $P_n(x_n, y_n)$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}$