

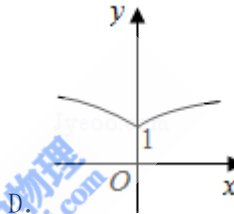
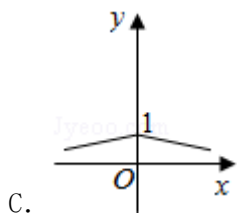
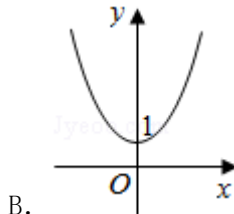
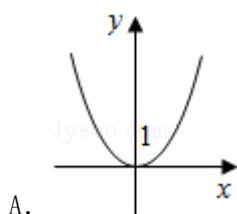
# 1998 年福建高考理科数学真题及答案

## 一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

1. (4 分)  $\sin 330^\circ$  等于 ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (4 分) 函数  $y=a^{|x|}$  ( $a>1$ ) 的图象是 ( )



3. (4 分) 曲线的极坐标方程  $\rho = 4\cos \theta$  化为直角坐标方程为 ( )

- A.  $(x+2)^2 + y^2 = 4$       B.  $(x-2)^2 + y^2 = 4$   
 C.  $(x+4)^2 + y^2 = 16$       D.  $(x-4)^2 + y^2 = 16$

4. (4 分) 两条直线  $A_1x+B_1y+C_1=0$ ,  $A_2x+B_2y+C_2=0$  垂直的充要条件是 ( )

- A.  $A_1A_2+B_1B_2=0$       B.  $A_1A_2 - B_1B_2=0$   
 C.  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = -1$       D.  $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = 1$

5. (4 分) 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的反函数  $f^{-1}(x) =$  ( )

- A.  $x$  ( $x \neq 0$ )      B.  $\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )      C.  $-x$  ( $x \neq 0$ )      D.  $-\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )

6. (4 分) 若点  $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$  在第一象限, 则在  $[0, 2\pi)$  内  $\alpha$  的取值范围是

( )

- A.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$  \*      B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

D.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

7. (4分) 已知圆锥的全面积是底面积的3倍, 那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 ( )

- A.  $120^\circ$                       B.  $150^\circ$                       C.  $180^\circ$                       D.  $240^\circ$

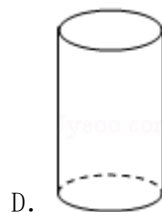
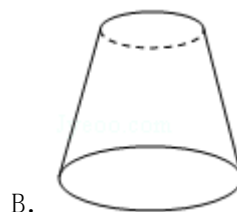
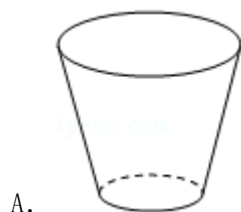
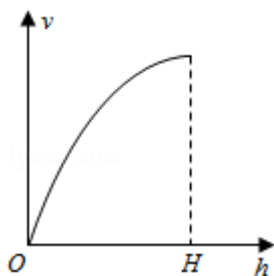
8. (4分) 复数  $-i$  的一个立方根是  $i$ , 它的另外两个立方根是 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       C.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$                       D.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

9. (4分) 如果棱台的两底面积分别是  $S, S'$ , 中截面的面积是  $S_0$ , 那么 ( )

- A.  $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$                       B.  $S_0 = \sqrt{S'S}$                       C.  $2S_0 = S + S'$   
D.  $S_0^2 = 2S'S$

10. (4分) 向高为  $H$  的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量  $V$  与水深  $h$  的函数关系如图, 那么水瓶的形状是图中的 ( )



11. (4分) 3名医生和6名护士被分配到3所学校为学生体检, 每校分配1名医生和2名护士. 不同的分配方法共有 ( )

- A. 90种                      B. 180种                      C. 270种                      D. 540种

12. (4分) 椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点为  $F_1$  和  $F_2$ , 点  $P$  在椭圆上, 如果线段  $PF_1$  的中点在  $y$  轴上, 那么  $|PF_1|$  是  $|PF_2|$  的 ( )

- A. 7 倍                      B. 5 倍                      C. 4 倍                      D. 3 倍

13. (4分) 球面上有 3 个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的  $\frac{1}{6}$ , 经过这 3 个点的小圆的周长为  $4\pi$ , 那么这个球的半径为 ( )

- A.  $4\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{3}$

14. (4分) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角是 ( )

- A.  $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$                       B.  $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$                       C.  $\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2}$                       D.  $\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

15. (4分) 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 > 1$ , 且前  $n$  项和  $S_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{1}{a_1}$ , 那么  $a_1$  的取值范围是 ( )

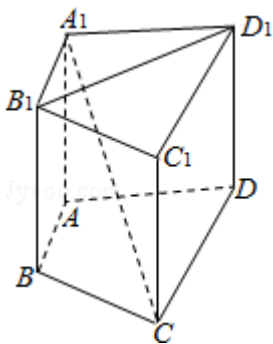
- A.  $(1, +\infty)$                       B.  $(1, 4)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(1, \sqrt{2})$

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

16. (5分) 已知圆  $C$  过双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的一个顶点和一个焦点, 且圆心在此双曲线上, 则圆心到双曲线中心的距离是\_\_\_\_\_.

17. (5分)  $(x+2)^{10} (x^2 - 1)$  的展开式中  $x^0$  的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).

18. (5分) 如图, 在直四棱柱  $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$  中, 当底面四边形  $ABCD$  满足条件\_\_\_\_\_时, 有  $A_1C \perp B_1D_1$ . (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形.)



19. (5分) 关于函数  $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 有下列命题:

①由  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  可得  $x_1 - x_2$  必是  $\pi$  的整数倍;

②  $y = f(x)$  的表达式可改写为  $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ;

③  $y = f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  对称;

④  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{6}$  对称.

其中正确的命题的序号是\_\_\_\_\_. (把你认为正确的命题序号都填上)

### 三、解答题 (共6小题, 满分70分)

20. (10分) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 设  $a+c=2b, A-C = \frac{\pi}{3}$ . 求  $\sin B$

的值. 以下公式供解题时参考:

$$\sin \theta + \sin \phi = 2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

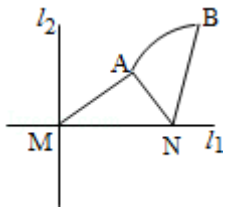
$$\sin \theta - \sin \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

21. (12分) 如图, 直线  $l_1$  和  $l_2$  相交于点  $M, l_1 \perp l_2$ , 点  $N \in l_1$ . 以  $A, B$  为端点的曲线段  $C$

上的任一点到  $l_2$  的距离与到点  $N$  的距离相等. 若  $\triangle AMN$  为锐角三角形,  $|AM| = \sqrt{17}, |AN| = 3$ , 且  $|BM| = 6$ . 建立适当的坐标系, 求曲线段  $C$  的方程.



22. (12分) 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为2米的无盖长方体沉淀箱,

污水从  $A$  孔流入，经沉淀后从  $B$  孔流出。设箱体的长度为  $a$  米，高度为  $b$  米。已知流出的水中该杂质的质量分数与  $a, b$  的乘积  $ab$  成反比。现有制箱材料 60 平方米。问当  $a, b$  各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（ $A, B$  孔的面积忽略不计）。



23. (12 分) 已知如图，斜三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧面  $A_1ACC_1$  与底面  $ABC$  垂直， $\angle ABC = 90^\circ$

， $BC = 2$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ，且  $AA_1 \perp A_1C$ ， $AA_1 = A_1C$ 。

- (1) 求侧棱  $A_1A$  与底面  $ABC$  所成角的大小；
- (2) 求侧面  $A_1ABB_1$  与底面  $ABC$  所成二面角的大小；
- (3) 求顶点  $C$  到侧面  $A_1ABB_1$  的距离。



24. (12 分) 设曲线  $C$  的方程是  $y = x^3 - x$ ，将  $C$  沿  $x$  轴、 $y$  轴正向分别平行移动  $t, s$  单位长度后得曲线  $C_1$ 。

(1) 写出曲线  $C_1$  的方程；

(2) 证明曲线  $C$  与  $C_1$  关于点  $A\left(\frac{t}{2}, \frac{s}{2}\right)$  对称；

(3) 如果曲线  $C$  与  $C_1$  有且仅有一个公共点，证明  $s = \frac{t^3}{4} - t$  且  $t \neq 0$ 。

25. (12 分) 已知数列  $\{b_n\}$  是等差数列， $b_1 = 1$ ， $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 145$ 。

(1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n$ ；

(2) 设数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$  (其中  $a > 0$ ，且  $a \neq 1$ )，记  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的

前  $n$  项和。试比较  $S_n$  与  $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$  的大小，并证明你的结论。

1998 年全国统一高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

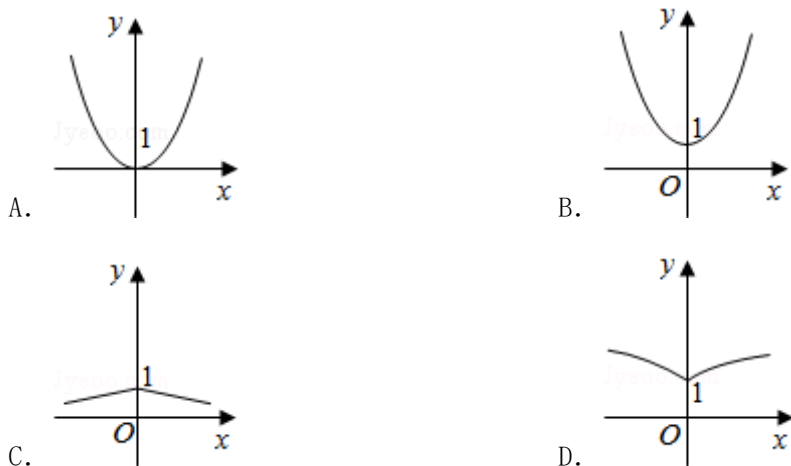
1. (4 分)  $\sin 330^\circ$  等于 ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：∵  $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

故选：B.

2. (4 分) 函数  $y=a^{|x|}$  ( $a>1$ ) 的图象是 ( )



【解答】解：法一：由题设知  $y = \begin{cases} a^x, & x \geq 0 \\ (\frac{1}{a})^x, & x < 0 \end{cases}$ ,

又  $a>1$ . 由指数函数图象易知答案为 B.

法二：因  $y=a^{|x|}$  是偶函数，又  $a>1$ .

所以  $a^{|x|} \geq 1$ ，排除 AC. 当  $x \geq 0$ ,  $y=a^x$ , 由指数函数图象知选 B.

故选：B.

3. (4 分) 曲线的极坐标方程  $\rho = 4\cos \theta$  化为直角坐标方程为 ( )

- A.  $(x+2)^2 + y^2 = 4$       B.  $(x-2)^2 + y^2 = 4$   
C.  $(x+4)^2 + y^2 = 16$       D.  $(x-4)^2 + y^2 = 16$

【解答】解：将原极坐标方程  $\rho = 4\cos \theta$ ，化为：

$$\rho^2 = 4\rho \cos \theta,$$

化成直角坐标方程为:  $x^2 + y^2 - 4x = 0,$

$$\text{即 } y^2 + (x - 2)^2 = 4.$$

故选: B.

4. (4分) 两条直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  垂直的充要条件是 ( )

A.  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

B.  $A_1A_2 - B_1B_2 = 0$

C.  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = -1$

D.  $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = 1$

【解答】解: 直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  的方向向量为  $(-B_1, A_1)$ , 直线  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  的方向向量为  $(-B_2, A_2)$ ,

两条直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  垂直, 就是两条直线的方向向量的数量积为 0,

即:  $(-B_1, A_1) \cdot (-B_2, A_2) = 0$  可得  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

故选: A.

5. (4分) 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的反函数  $f^{-1}(x) =$  ( )

A.  $x$  ( $x \neq 0$ )

B.  $\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )

C.  $-x$  ( $x \neq 0$ )

D.  $-\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )

【解答】由  $y = \frac{1}{x}$  得  $x = \frac{1}{y}$  且  $y \neq 0$ , 所以反函数  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$  且  $x \neq 0$  故选则 B

6. (4分) 若点  $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$  在第一象限, 则在  $[0, 2\pi)$  内  $\alpha$  的取值范围是 ( )

A.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$  \*

B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

D.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

【解答】解:  $\because \begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

故选：B.

7. (4分) 已知圆锥的全面积是底面积的3倍，那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 ( )

A.  $120^\circ$                       B.  $150^\circ$                       C.  $180^\circ$                       D.  $240^\circ$

【解答】解：圆锥的全面积是底面积的3倍，那么母线和底面半径的比为2，  
设圆锥底面半径为1，则圆锥母线长为2，圆锥的侧面展开图扇形的弧长是圆锥底面周长为 $2\pi$ ，

该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角： $\pi$ ，即 $180^\circ$

故选：C.

8. (4分) 复数 $-i$ 的一个立方根是 $i$ ，它的另外两个立方根是 ( )

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       C.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$                       D.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

【解答】解： $\because -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$ ，其立方根是  $\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}$ ，  
 $k \in \{0, 1, 2\}$ ，

即  $i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ，

故选：D.

9. (4分) 如果棱台的两底面积分别是 $S, S'$ ，中截面的面积是 $S_0$ ，那么 ( )

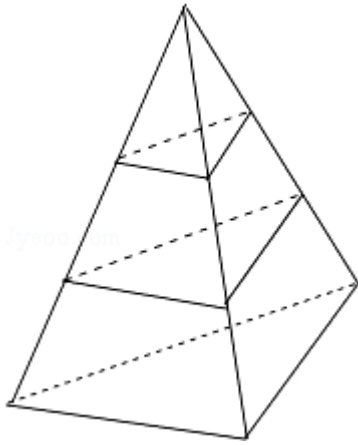
A.  $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$                       B.  $S_0 = \sqrt{S'S}$                       C.  $2S_0 = S + S'$   
D.  $S_0^2 = 2S'S$

【解答】解：不妨设棱台为三棱台，设棱台的高为 $2r$ ，上部三棱锥的高为 $a$ ，

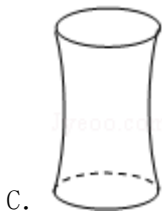
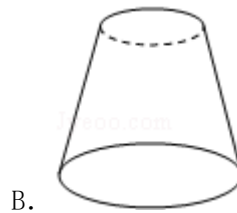
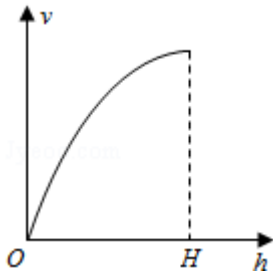
根据相似比的性质可得： $\begin{cases} (\frac{a}{a+2r})^2 = \frac{S'}{S} \\ (\frac{a}{a+r})^2 = \frac{S_0}{S} \end{cases}$ ，可得： $\begin{cases} \frac{a+2r}{a} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}} \\ \frac{a+r}{a} = \frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S'}} \end{cases}$

消去 $r$ ，可得  $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$

故选：A.



10. (4分) 向高为  $H$  的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量  $V$  与水深  $h$  的函数关系如图, 那么水瓶的形状是图中的 ( )



**【解答】**解: 如果水瓶形状是圆柱,  $V = \pi r^2 h$ ,  $r$  不变,  $V$  是  $h$  的正比例函数, 其图象应该是过原点的直线, 与已知图象不符. 故  $D$  错;

由已知函数图可以看出, 随着高度  $h$  的增加  $V$  也增加, 但随  $h$  变大,

每单位高度的增加, 体积  $V$  的增加量变小, 图象上升趋势变缓,

其原因只能是瓶子平行底的截面的半径由底到顶逐渐变小. 故  $A$ 、 $C$  错.

故选:  $B$ .

11. (4分) 3名医生和6名护士被分配到3所学校为学生体检, 每校分配1名医生和2名

护士. 不同的分配方法共有 ( )

- A. 90 种                      B. 180 种                      C. 270 种                      D. 540 种

【解答】解: 三所学校依次选医生、护士, 不同的分配方法共有:  $C_3^1 C_6^2 C_2^1 C_4^2 = 540$  种.

故选: D.

12. (4分) 椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点为  $F_1$  和  $F_2$ , 点  $P$  在椭圆上, 如果线段  $PF_1$  的中点在  $y$  轴上,

那么  $|PF_1|$  是  $|PF_2|$  的 ( )

- A. 7 倍                      B. 5 倍                      C. 4 倍                      D. 3 倍

【解答】解: 由题设知  $F_1(-3, 0)$ ,  $F_2(3, 0)$ ,

如图, 设  $P$  点的坐标是  $(x, y)$ , 线段  $PF_1$  的中点坐标为  $(\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$

$\because$  线段  $PF_1$  的中点  $M$  在  $y$  轴上,

$$\therefore \frac{x-3}{2} = 0$$

$$\therefore x = 3$$

将  $P(3, y)$  代入椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 得到  $y^2 = \frac{3}{4}$ .

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{36 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{147}}{2},$$

$$|PF_2| = \sqrt{0 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{\frac{\sqrt{147}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 7.$$

$\therefore$  .

故选: A.



13. (4分) 球面上有3个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$ , 经过这3个点的小圆的周长为 $4\pi$ , 那么这个球的半径为 ( )

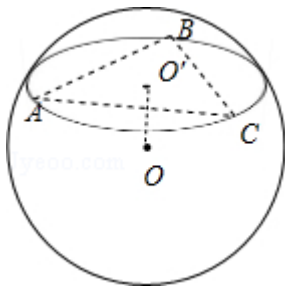
- A.  $4\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C. 2      D.  $\sqrt{3}$

【解答】解法一: 过  $O$  作  $OO' \perp$  平面  $ABC$ ,  $O'$  是垂足,

则  $O'$  是  $\triangle ABC$  的中心, 则  $O'A = r = 2$ , 又因为  $\angle AOC = \theta = \frac{\pi}{3}$ ,

$OA = OC$  知  $OA = AC < 2O'A$ . 其次,  $OA$  是  $\text{Rt}\triangle OO'A$  的斜边,

故  $OA > O'A$ . 所以  $O'A < OA < 2O'A$ . 因为  $OA = R$ , 所以  $2 < R <$



4.

因此, 排除  $A, C, D$ , 得  $B$ .

解法二: 在正三角形  $ABC$  中, 应用正弦定理, 得  $AB = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ .

因为  $\angle AOB = \theta = \frac{\pi}{3}$ , 所以侧面  $AOB$  是正三角形, 得球半径  $R = OA = AB = 2\sqrt{3}$ .

解法三: 因为正三角形  $ABC$  的外径  $r = 2$ , 故高  $AD = \frac{3}{2}r = 3$ ,  $D$  是  $BC$  的中点.

在  $\triangle OBC$  中,  $BO = CO = R$ ,  $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $BC = BO = R$ ,  $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}R$ .

在 Rt $\triangle ABD$  中,  $AB=BC=R$ , 所以由  $AB=BD+AD$ , 得  $R^2 = \frac{1}{4}R^2 + 9$ , 所以  $R=2\sqrt{3}$ .

故选: B.

14. (4分) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角是 ( )

- A.  $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$     B.  $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$     C.  $\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2}$     D.  $\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【解答】解: 设 Rt $\triangle ABC$  中,  $C = \frac{\pi}{2}$ , 则  $A$  与  $B$  互余且  $A$  为最小内角.

又由已知得  $\sin^2 B = \sin A$ , 即  $\cos^2 A = \sin A$ ,  $1 - \sin^2 A = \sin A$ ,

解得  $\sin A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  或  $\sin A = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  (舍).

故选: B.

15. (4分) 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 > 1$ , 且前  $n$  项和  $S_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{1}{a_1}$ , 那么  $a_1$  的取值范围是 ( )

- A.  $(1, +\infty)$     B.  $(1, 4)$     C.  $(1, 2)$     D.  $(1, \sqrt{2})$

【解答】解: 由题意知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{a_1}$ ,

$$\therefore a_1^2 = 1 - q,$$

$$\because a_1 > 1, |q| < 1, \therefore 1 < a_1^2 < 2,$$

$$\therefore 1 < a_1 < \sqrt{2}.$$

故选: D.

## 二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

16. (5分) 已知圆  $C$  过双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的一个顶点和一个焦点, 且圆心在此双曲线上, 则

圆心到双曲线中心的距离是  $\frac{16}{3}$ .

【解答】解: 由双曲线的几何性质易知圆  $C$  过双曲线同一支上的顶点和焦点, 所以圆  $C$  的圆心的横坐标为 4.

故圆心坐标为  $(4, \pm \frac{4\sqrt{7}}{3})$ .

$\therefore$  它到中心  $(0, 0)$  的距离为  $d = \sqrt{16 + \frac{112}{9}} = \frac{16}{3}$ .

故答案为:  $\frac{16}{3}$ .

17. (5分)  $(x+2)^{10}(x^2-1)$  的展开式中  $x^{10}$  的系数为 179 (用数字作答).

【解答】解:  $(x+2)^{10}(x^2-1) = x^2(x+2)^{10} - (x+2)^{10}$

$\therefore (x+2)^{10}(x^2-1)$  的展开式中  $x^{10}$  的系数是  $(x+2)^{10}$  展开式的  $x^8$  的系数 -  $x^{10}$  的系数

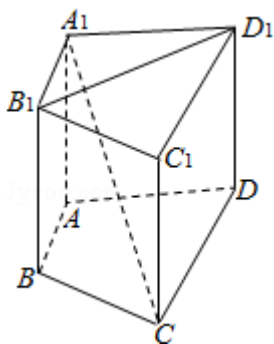
$\therefore (x+2)^{10}$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} 2^r = 2^r C_{10}^r x^{10-r}$

$\therefore$  令  $r=0, 2$  分别得  $x^{10}, x^8$  的系数为 1, 180

故展开式中  $x^{10}$  的系数为  $180 - 1 = 179$ ,

故答案为 179

18. (5分) 如图, 在直四棱柱  $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$  中, 当底面四边形  $ABCD$  满足条件  $AC \perp BD$  时, 有  $A_1C \perp B_1D_1$ . (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形.)



【解答】解:  $\because$  四棱柱  $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$  是直棱柱,

$\therefore B_1D_1 \perp A_1A$ , 若  $A_1C \perp B_1D_1$

则  $B_1D_1 \perp$  平面  $A_1AC_1C$

$\therefore B_1D_1 \perp AC$ ,

又由  $B_1D_1 \parallel BD$ ,

则有  $BD \perp AC$ ,

反之, 由  $BD \perp AC$  亦可得到  $A_1C \perp B_1D_1$

故答案为:  $BD \perp AC$ .

19. (5分) 关于函数  $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 有下列命题:

①由  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  可得  $x_1 - x_2$  必是  $\pi$  的整数倍;

②  $y = f(x)$  的表达式可改写为  $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ;

③  $y = f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  对称;

④  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{6}$  对称.

其中正确的命题的序号是 ②. (把你认为正确的命题序号都填上)

**【解答】**解: 函数  $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的最小正周期  $T = \pi$ ,

由相邻两个零点的横坐标间的距离是  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$  知①错.

利用诱导公式得  $f(x) = 4\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ , 知②正确.

由于曲线  $f(x)$  与  $x$  轴的每个交点都是它的对称中心,

将  $x = \frac{\pi}{6}$  代入得  $f(x) = 4\sin\frac{2\pi}{3} \neq 0$ ,

因此点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  不是  $f(x)$  图象的一个对称中心,

故命题③错误.

曲线  $f(x)$  的对称轴必经过图象的最高点或最低点, 且与  $y$  轴平行, 而  $x = -\frac{\pi}{6}$  时  $y = 0$ , 点

$\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$  不是最高点也不是最低点,

故直线  $x = -\frac{\pi}{6}$  不是图象的对称轴，因此命题④不正确。

故答案为：②

### 三、解答题（共6小题，满分70分）

20. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中， $a, b, c$ 分别是角 $A, B, C$ 的对边，设 $a+c=2b, A-C = \frac{\pi}{3}$ 。求 $\sin B$ 的值。以下公式供解题时参考：

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

【解答】解：由正弦定理和已知条件 $a+c=2b$ 得 $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ 。

由和差化积公式得 $2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin B$ 。

由 $A+B+C = \pi$ 得 $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$ ，

又 $A-C = \frac{\pi}{3}$ 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin B$ ，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ 。

因为 $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ ， $\cos \frac{B}{2} \neq 0$ ，

所以 $\sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

从而  $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

所以  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ .

21. (12分) 如图, 直线  $l_1$  和  $l_2$  相交于点  $M$ ,  $l_1 \perp l_2$ , 点  $N \in l_1$ . 以  $A, B$  为端点的曲线段  $C$  上的任一点到  $l_2$  的距离与到点  $N$  的距离相等. 若  $\triangle AMN$  为锐角三角形,  $|MN| = \sqrt{17}$ ,  $|AM| = 3$ , 且  $|BM| = 6$ . 建立适当的坐标系, 求曲线段  $C$  的方程.



【解答】解：法一：如图建立坐标系，

以  $l_1$  为  $x$  轴， $MN$  的垂直平分线为  $y$  轴，点  $O$  为坐标原点.

依题意知：曲线段  $C$  是以点  $N$  为焦点，以  $l_2$  为准线的抛物线的一段，其中  $A, B$  分别为  $C$  的端点.

设曲线段  $C$  的方程为

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (x_A \leq x \leq x_B, \quad y > 0),$$

其中  $x_A, x_B$  分别为  $A, B$  的横坐标， $p = |MN|$ .

所以  $M(-\frac{p}{2}, 0)$ ,  $N(\frac{p}{2}, 0)$ .

由  $|MN| = \sqrt{17}$ ,  $|AM| = 3$  得

$$(x_A + \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 17, \quad \text{①}$$

$$(x_A - \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 9. \quad \text{②}$$

由①, ②两式联立解得  $x_A = \frac{4}{p}$ . 再将其代入①式并由  $p > 0$  解得  $\begin{cases} p = 4 \\ x_A = 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$ .

因为  $\triangle AMN$  是锐角三角形，所以  $\frac{p}{2} > x_A$ , 故舍去  $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$

所以  $p=4$ ,  $x_A=1$ .

由点  $B$  在曲线段  $C$  上, 得  $x_B = |BM| - \frac{p}{2} = 4$ .

综上得曲线段  $C$  的方程为

$$y^2 = 8x \quad (1 \leq x \leq 4, y > 0).$$

解法二: 如图建立坐标系,

分别以  $l_1$ 、 $l_2$  为  $x$ 、 $y$  轴,  $M$  为坐标原点.

作  $AE \perp l_1$ ,  $AD \perp l_2$ ,  $BF \perp l_2$ , 垂足分别为  $E$ 、 $D$ 、 $F$ .

设  $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $N(x_N, 0)$ .

依题意有

$$x_A = |ME| = |DA| = |AN| = 3,$$

$$y_A = |DM| = \sqrt{|AM|^2 - |DA|^2} = 2\sqrt{2},$$

由于  $\triangle AMN$  为锐角三角形, 故有

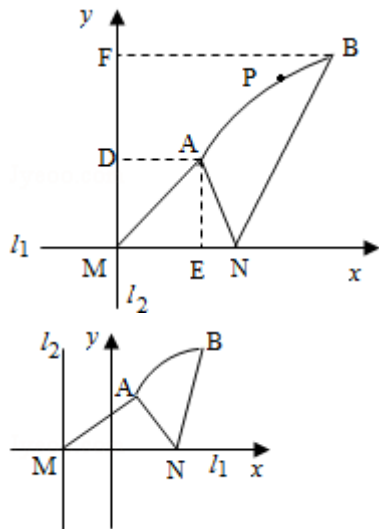
$$\begin{aligned} x_N &= |ME| + |EN| \\ &= |ME| + \sqrt{|AN|^2 - |AE|^2} = 4 \end{aligned}$$

$$x_B = |BF| = |BN| = 6.$$

设点  $P(x, y)$  是曲线段  $C$  上任一点, 则由题意知  $P$  属于集合

$$\{(x, y) \mid (x - x_N)^2 + y^2 = x^2, x_A \leq x \leq x_B, y > 0\}.$$

故曲线段  $C$  的方程为  $y^2 = 8(x - 2) \quad (3 \leq x \leq 6, y > 0)$ .



22. (12分) 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱,

污水从  $A$  孔流入，经沉淀后从  $B$  孔流出。设箱体的长度为  $a$  米，高度为  $b$  米。已知流出的水中该杂质的质量分数与  $a, b$  的乘积  $ab$  成反比。现有制箱材料 60 平方米。问当  $a, b$  各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（ $A, B$  孔的面积忽略不计）。



【解答】解法一：设  $y$  为流出的水中杂质的质量分数，

则  $y = \frac{k}{ab}$ ，其中  $k > 0$  为比例系数。依题意，即所求的  $a, b$  值使  $y$  值最小。

根据题设，有  $4b + 2ab + 2a = 60$  ( $a > 0, b > 0$ ),

$$\text{得 } b = \frac{30-a}{2+a} \quad (0 < a < 30). \quad \textcircled{1}$$

于是  $y = \frac{k}{ab}$

$$= \frac{k}{\frac{30a-a^2}{2+a}} = \frac{k}{-a+32-\frac{64}{a+2}} = \frac{k}{34-(a+2+\frac{64}{a+2})}$$

$$\geq \frac{k}{34-2\sqrt{(a+2)\frac{64}{a+2}}} = \frac{k}{18},$$

当  $a+2 = \frac{64}{a+2}$  时取等号， $y$  达到最小值。

这时  $a=6, a=-10$  (舍去)。

将  $a=6$  代入①式得  $b=3$ 。

故当  $a$  为 6 米， $b$  为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。

解法二：依题意，即所求的  $a, b$  的值使  $ab$  最大。

由题设知  $4b + 2ab + 2a = 60$  ( $a > 0, b > 0$ ),

即  $a + 2b + ab = 30$  ( $a > 0, b > 0$ )。

因为  $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$ ,

所以  $2\sqrt{2}\sqrt{ab} + ab \leq 30$ ,

当且仅当  $a=2b$  时, 上式取等号.

由  $a>0, b>0$ , 解得  $0 < ab \leq 18$ .

即当  $a=2b$  时,  $ab$  取得最大值, 其最大值为 18.

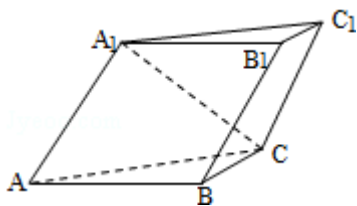
所以  $2b^2=18$ . 解得  $b=3, a=6$ .

故当  $a$  为 6 米,  $b$  为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

23. (12 分) 已知如图, 斜三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧面  $A_1ACC_1$  与底面  $ABC$  垂直,  $\angle ABC=90^\circ$

,  $BC=2, AC=2\sqrt{3}$ , 且  $AA_1 \perp A_1C, AA_1=A_1C$ .

- (1) 求侧棱  $A_1A$  与底面  $ABC$  所成角的大小;
- (2) 求侧面  $A_1ABB_1$  与底面  $ABC$  所成二面角的大小;
- (3) 求顶点  $C$  到侧面  $A_1ABB_1$  的距离.



【解答】(1) 解: 如图作  $A_1D \perp AC$ , 垂足为  $D$ , 由面  $A_1ACC_1 \perp$  面  $ABC$ , 得  $A_1D \perp$  面  $ABC$ , 所以  $\angle A_1AD$  为  $A_1A$  与面  $ABC$  所成的角.

因为  $AA_1 \perp A_1C, AA_1=A_1C$ ,

所以  $\angle A_1AD=45^\circ$  为所求.

(2) 解: 作  $DE \perp AB$ , 垂足为  $E$ , 连  $A_1E$ , 则由  $A_1D \perp$  面  $ABC$ , 得  $A_1E \perp AB$ .

所以  $\angle A_1ED$  是面  $A_1ABB_1$  与面  $ABC$  所成二面角的平面角.

由已知,  $AB \perp BC$ , 得  $ED \parallel BC$ .

又  $D$  是  $AC$  的中点,  $BC=2, AC=2\sqrt{3}$ ,

所以  $DE=1, AD=A_1D = \sqrt{3}$ ,  $\tan \angle A_1ED = \frac{A_1D}{DE} = \sqrt{3}$ .

故  $\angle A_1ED=60^\circ$  为所求.

(3) 解法一: 由点  $C$  作平面  $A_1ABB_1$  的垂线, 垂足为  $H$ ,

则  $CH$  的长是  $C$  到平面  $A_1ABB_1$  的距离.

连接  $HB$ , 由于  $AB \perp BC$ , 得  $AB \perp HB$ .

又  $A_1E \perp AB$ , 知  $HB \parallel A_1E$ , 且  $BC \parallel ED$ ,

所以  $\angle HBC = \angle A_1ED = 60^\circ$

所以  $CH = BC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$  为所求.

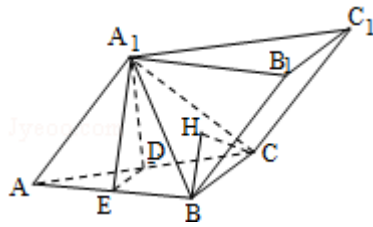
解法二: 连接  $A_1B$ .

根据定义, 点  $C$  到面  $A_1ABB_1$  的距离, 即为三棱锥  $C - A_1AB$  的高  $h$ .

由  $V_{\text{锥}C-A_1AB} = V_{\text{锥}A_1-ABC}$  得  $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B}h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}A_1D$ ,

即  $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2}h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

所以  $h = \sqrt{3}$  为所求.



24. (12分) 设曲线  $C$  的方程是  $y = x^3 - x$ , 将  $C$  沿  $x$  轴、 $y$  轴正向分别平行移动  $t$ 、 $s$  单位长度后得曲线  $C_1$ .

(1) 写出曲线  $C_1$  的方程;

(2) 证明曲线  $C$  与  $C_1$  关于点  $A(\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$  对称;

(3) 如果曲线  $C$  与  $C_1$  有且仅有一个公共点, 证明  $s = \frac{t^3}{4} - t$  且  $t \neq 0$ .

【解答】(1) 解: 曲线  $C_1$  的方程为  $y = (x - t)^3 - (x - t) + s$ .

(2) 证明: 在曲线  $C$  上任取一点  $B_1(x_1, y_1)$ . 设  $B_2(x_2, y_2)$  是  $B_1$  关于点  $A$  的对称点,

则有  $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{t}{2}$ ,  $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{s}{2}$ , 所以  $x_1 = t - x_2$ ,  $y_1 = s - y_2$ .

代入曲线  $C$  的方程, 得  $x_2$  和  $y_2$  满足方程:

$s - y_2 = (t - x_2)^3 - (t - x_2)$ , 即  $y_2 = (x_2 - t)^3 - (x_2 - t) + s$ , 可知点  $B_2(x_2, y_2)$  在

曲线  $C_1$  上.

反过来, 同样可以证明, 在曲线  $C_1$  上的点关于点  $A$  的对称点在曲线  $C$  上.

因此, 曲线  $C$  与  $C_1$  关于点  $A$  对称.

(3) 证明: 因为曲线  $C$  与  $C_1$  有且仅有一个公共点, 所以, 方程组

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (x-t)^3 - (x-t) + s \end{cases} \text{有且仅有一组解.}$$

消去  $y$ , 整理得  $3tx^2 - 3t^2x + (t^3 - t - s) = 0$ , 这个关于  $x$  的一元二次方程有且仅有一个根.

所以  $t \neq 0$  并且其根的判别式  $\Delta = 9t^4 - 12t(t^3 - t - s) = 0$ , 即 
$$\begin{cases} t \neq 0 \\ t(t^3 - 4t - 4s) = 0. \end{cases}$$

所以 
$$s = \frac{t^3}{4} - t \quad \text{且 } t \neq 0.$$

25. (12分) 已知数列  $\{b_n\}$  是等差数列,  $b_1 = 1$ ,  $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 145$ .

(1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n$ ;

(2) 设数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$  (其中  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ), 记  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的

前  $n$  项和. 试比较  $S_n$  与  $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$  的大小, 并证明你的结论.

【解答】解: (1) 设数列  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ , 由题意得 
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ 10b_1 + \frac{10(10-1)}{2}d = 145. \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

所以  $b_n = 3n - 2$ .

(2) 由  $b_n = 3n - 2$ , 知

$$\begin{aligned} S_n &= \log_a(1+1) + \log_a\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_a\left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) \\ &= \log_a\left[\left(1+1\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{3n-2}\right)\right], \quad \frac{1}{3} \log_a b_{n+1} = \log_a \sqrt[3]{3n+1}. \end{aligned}$$

因此要比较  $S_n$  与  $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$  的大小, 可先比较  $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{n-2}})$  与  $\sqrt[3]{3n+1}$  的大小.

取  $n=1$  有  $(1+\frac{1}{4}) > \sqrt[3]{3 \cdot 1+1}$ ,

取  $n=2$  有  $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{2-2}}) > \sqrt[3]{3 \cdot 2+1}$ ,

由此推测  $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{n-2}}) > \sqrt[3]{3n+1}$ . ①

若①式成立, 则由对数函数性质可断定:

当  $a > 1$  时,  $S_n > \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ .

当  $0 < a < 1$  时,  $S_n < \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ .

下面用数学归纳法证明①式.

(i) 当  $n=1$  时已验证①式成立.

(ii) 假设当  $n=k$  ( $k \geq 1$ ) 时, ①式成立, 即

$$(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}}) > \sqrt[3]{3k+1}.$$

那么, 当  $n=k+1$  时,

$$\begin{aligned} & (1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}})(1+\frac{1}{3^{(k+1)-2}}) > \sqrt[3]{3k+1} (1+\frac{1}{3^{k+1}}) \\ & = \frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1} (3k+2). \end{aligned}$$

因为  $[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)]^3 - [\sqrt[3]{3k+4}]^3 = \frac{(3k+2)^3 - (3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2} = \frac{9k+4}{(3k+1)^2} > 0$ ,

所以  $\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1} (3k+2) > \sqrt[3]{3k+4} = \sqrt[3]{3(k+1)+1}$ .

因而  $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}})(1+\frac{1}{3^{k+1}}) > \sqrt[3]{3(k+1)+1}$ .

这就是说①式当  $n=k+1$  时也成立.

由 ( i ), ( ii ) 知①式对任何正整数  $n$  都成立.

由此证得:

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } S_n > \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}.$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } S_n < \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}.$$

声明: 试题解析著作权属菁优网所有, 未经书面同意, 不得复制发布

日期: 2019/8/12 0:35:12; 用户: 黄熠; 邮箱: huangyi12388@163.com; 学号: 716378