绝密★启用前

2007年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．方程$3^{x-1}=\dfrac{1}{9}$的解是_________.

2．函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$的反函数$f^{-1}(x)=$_________.

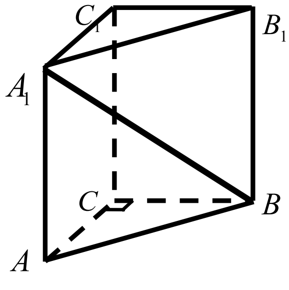
3．直线$4x+y-1=0$的倾斜角$\theta=$_________.

4．函数$y=\sec x\bullet\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$的最小正周期$T=$_________.

5．以双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的中心为顶点，且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是_______________.

6．若向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则$\vec{a}\bullet(\vec{a}-\vec{b})=$___.

7．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=2$，$AC=BC=1$，则异面直线A_1B与AC所成角的大小是_________（结果用反三角函数值表示）.



8．某工程由 A，B，C，D 四道工序组成，完成它们需用时间依次为 $2,5,x,4$ 天．四道工序的先后顺序及相互关系是：A，B 可以同时开工；A 完成后，C 可以开工；B，C 完成后，D 可以开工．若该工程总时数为9天，则完成工序 C 需要的天数 x 最大是____．

9．在五个数字 $1,2,3,4,5$ 中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是___________（结果用数值表示）．

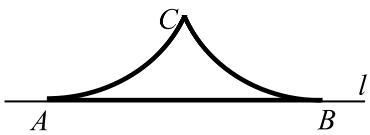
10．对于非零实数 a，b，以下四个命题都成立：

① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；　　④ 若 $a^2=ab$，则 $a=b$．

那么，对于非零复数 a，b，仍然成立的命题的所有序号是_________．

11．如图，A，B 是直线 l 上的两点，且 $AB=2$．两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 A，B 点，C 是这两个圆的公共点，则圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是______．



二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A，B，C，D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $2+a\mathrm{i}$，$b+3\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是一个实系数一元二次方程的两个根，那么 a，b 的值分别是（　　）

A．$a=-3$，$b=2$　　B．$a=3$，$b=-2$

C．$a=-3$，$b=-2$　　D．$a=3$，$b=2$

13．圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程是（　　）

A．$(x+3)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{2}$　　B．$(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{2}$

C．$(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　　　D．$(x-3)^2+(y+2)^2=2$

14．数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}，1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}, n\geqslant 1001,\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$的极限值（　　）

A．等于0　　B．等于1　　C．等于0或1　　D．不存在

15．设$f(x)$是定义在正整数集上的函数，且$f(x)$满足："当$f(k)\geqslant k^2$成立时，

总可推出$f(k+1)\geqslant (k+1)^2$成立"．那么，下列命题总成立的是（　　）

A．若$f(1)<1$成立，则$f(10)<100$成立

B．若$f(2)<4$成立，则$f(1)\geqslant 1$成立

C．若$f(3)\geqslant 9$成立，则当$k\geqslant 1$时，均有$f(k)\geqslant k^2$成立

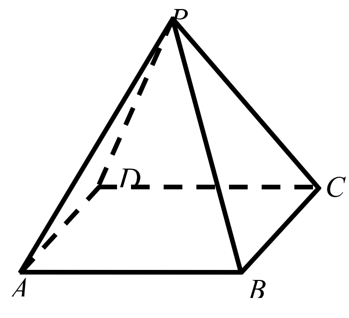
D．若$f(4)\geqslant 25$成立，则当$k\geqslant 4$时，均有$f(k)\geqslant k^2$成立

三．解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤．

16．（本题满分12分）

如图,在正四棱锥$P-ABCD$中，$PA=2$，直线PA与平面$ABCD$所成的角为60°，

求正四棱锥$P-ABCD$的体积V．



17. （本题满分14分）

在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是三个内角A，B，C的对边．若$a=2$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，

$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求$\triangle ABC$的面积$S$．

18. （本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分．

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快．2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦，年生产量的增长率为34%． 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%（如，2003年的年生产量的增长率为36%）．

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦．假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）？

19. （本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分．

已知函数$f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数$a\in\mathbf{R}$）．

（1）当$a=2$时，解不等式$f(x)-f(x-1)>2x-1$；

（2）讨论函数$f(x)$的奇偶性，并说明理由．

20．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如果有穷数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$（$m$为正整数）满足条件$a_1 = a_m$，$a_2 = a_{m-1}$，…，

$a_m = a_1$，

即$a_i = a_{m-i+1}$（$i = 1, 2, \cdots, m$），我们称其为“对称数列”.

例如，数列1，2，5，2，1与数列8，4，2，2，4，8都是“对称数列”.

（1）设$\{b_n\}$是7项的“对称数列”，其中b_1, b_2, b_3, b_4是等差数列，且$b_1 = 2$，$b_4 = 11$.

依次写出$\{b_n\}$的每一项；

（2）设$\{c_n\}$是49项的“对称数列”，其中$c_{25}, c_{26}, \cdots, c_{49}$是首项为1，

公比为2的等比数列，求$\{c_n\}$各项的和S；

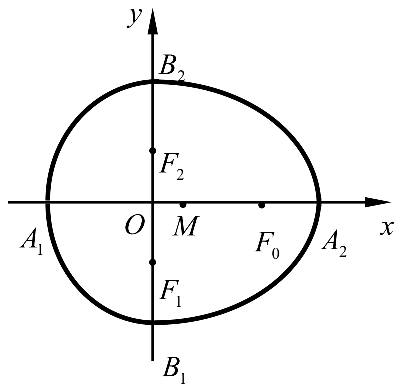
（3）设$\{d_n\}$是100项的“对称数列”，其中$d_{51}, d_{52}, \cdots, d_{100}$是首项为2，

公差为3的等差数列．求$\{d_n\}$前n项的和S_n（$n = 1, 2, \cdots, 100$）.

21．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分9分．

我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ (x\leqslant 0)$ 合成的曲线称作"果圆"，其中 $a^2=b^2+c^2$，$a>0$，$b>c>0$．

如图，设点 F_0，F_1，F_2 是相应椭圆的焦点，A_1，A_2 和 B_1，B_2 是"果圆"与 x，y 轴的交点，M 是线段 A_1A_2 的中点．



（1） 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为1的等边三角形，求该"果圆"的方程；

（2）设 P 是"果圆"的半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ $(x\leqslant 0)$ 上任意一点．求证：当 $|PM|$ 取得最小值时，P 在点 B_1，B_2 或 A_1 处；

（2） 若 P 是"果圆"上任意一点，求 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的横坐标．

绝密★启用前

2007年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．方程 $3^{x-1}=\frac{1}{9}$ 的解是__________.

【答案】$x=-1$

【解析】$3^{x-1}=\frac{1}{9}=3^{-2}\Rightarrow x-1=-2\Rightarrow x=-1$

2．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$__________.

【答案】$\dfrac{x+1}{x}$（$x\neq 0$）

【解析】由 $y=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{y}(y\neq 0)\Rightarrow f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x}$（$x\neq 0$）

3．直线 $4x+y-1=0$ 的倾斜角 $\theta=$__________.

【答案】$\pi-\arctan 4$

【解析】$\tan\theta=-4,\therefore\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)\Rightarrow\theta=\pi-\arctan 4$.

4．函数 $y=\sec x\bullet\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$__________.

【答案】π

【解析】$y=\sec x\bullet\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\cos x}\bullet(-\sin x)=-\tan x\Rightarrow T=\pi$.

5．以双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的中心为顶点，且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是__________________.

【答案】$y^2=12x$

【解析】双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的中心为O（0,0），该双曲线的右焦点为F（3,0），

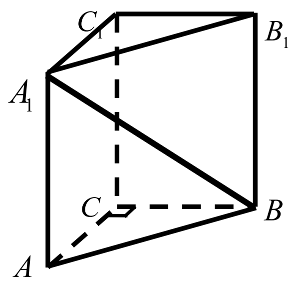
则抛物线的顶点为（0,0），焦点为（3,0），所以p=6，所以抛物线方程是) $y^2=12x$。

6．若向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，则$\vec{a}\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$___.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\vec{a}\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

7．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=2$，$AC=BC=1$，则异面直线A_1B与AC所成角的大小是________（结果用反三角函数值表示）.



【答案】$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】$\because A_1C_1 \parallel AC, \therefore$异面直线$A_1B$与$AC$所成角为$\angle BA_1C_1$，易求$A_1B=\sqrt{6}$，

$$\therefore \cos\angle BA_1C_1=\frac{A_1C_1}{A_1B}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\Rightarrow \angle BA_1C_1=arc\cos\frac{\sqrt{6}}{6}。$$

8．某工程由A，B，C，D四道工序组成，完成它们需用时间依次为$2,5,x,4$天．四道工序的先后顺序及相互关系是：A，B可以同时开工；A完成后，C可以开工；B，C完成后，D可以开工．若该工程总时数为9天，则完成工序C需要的天数x最大是____.

【答案】3

【解析】因为A完成后，C才可以开工，C完成后，D才可以开工，完成A、C、D需用时间依次为2，x,4天，且A，B可以同时开工，该工程总时数为9天，

$\therefore 2+x_{\max}+4=9\Rightarrow x_{\max}=3$。

9．在五个数字$1,2,3,4,5$中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是___________（结果用数值表示）.

【答案】0.3

【解析】剩下两个数字都是奇数，取出的三个数为两偶一奇，

所以剩下两个数字都是奇数的概率是 $P=\dfrac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}=0.3$。

10．对于非零实数 a，b，以下四个命题都成立：

① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；　　④ 若 $a^2=ab$，则 $a=b$．

那么，对于非零复数 a，b，仍然成立的命题的所有序号是_________．

【答案】②④

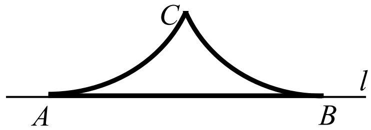
【解析】对于①：解方程 $a+\dfrac{1}{a}=0$ 得 $a=\pm i$，所以非零复数 $a=\pm i$ 使得 $a+\dfrac{1}{a}=0$，

①不成立；②显然成立；对于③：在复数集C中，$|1|=|i|$，则 $|a|=|b|$ ↲ $a=\pm b$

，

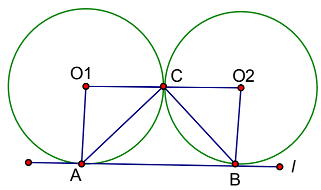
所以③不成立；④显然成立。则对于任意非零复数 a,b，上述命题仍然成立的所有序号是②④

11．如图，A，B 是直线 l 上的两点，且 $AB=2$．两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 A，B 点，C 是这两个圆的公共点，则圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是______．



【答案】$\left(0,2-\dfrac{\pi}{2}\right]$

【解析】如图，当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点C时，S 最大，



此时，两圆半径为1，S 等于矩形 ABO_2O_1 的面积减去两扇形面积，

$\therefore S_{\max}=2\times1-2\times(\dfrac{1}{4}\times\pi\times1^2)=2-\dfrac{\pi}{2}$，

随着圆半径的变化，C可以向直线 l 靠近，

当C到直线 l 的距离 $d\to 0$ 时，$S\to 0$，$\therefore S\in(0,2-\dfrac{\pi}{2}]$。

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A，B，C，D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $2+a\mathrm{i}$，$b+3\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是一个实系数一元二次方程

的两个根，那么a，b的值分别是（　　）

A．$a=-3$，$b=2$　　　　B．$a=3$，$b=-2$

C．$a=-3$，$b=-2$　　　　D．$a=3$，$b=2$

【答案】A

【解析】因为2+ai，b+3i（ i是虚数单位）是实系数一元二次方程的两个根，

所以2+ai与b+3i互为共轭复数，则a=－3，b=2。选A。

13．圆$x^2+y^2-2x-1=0$关于直线$2x-y+3=0$对称的圆的方程是（　　）

A．$(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$　　　　B．$(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{1}{2}$

C．$(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　　　D．$(x-3)^2+(y+2)^2=2$

【答案】C

【解析】圆$x^2+y^2-2x-1=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=2$，圆心（1，0），半径$\sqrt{2}$，关于直线$2x-y+3=0$对称的圆半径不变，排除A、B，两圆圆心连线段的中点在直线$2x-y+3=0$上，C中圆$(x+3)^2+(y-2)^2=2$的圆心为（－3，2），验证适合，故选C。

14．数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2}, & 1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \frac{n^2}{n^2-2n}, & n\geqslant 1001,\end{cases}$则数列$\{a_n\}$的极限值（　　）

A．等于0　　B．等于1　　C．等于0或1　　D．不存在

【答案】B

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{n}}=1$，选B。

15．设$f(x)$是定义在正整数集上的函数，且$f(x)$满足：“当$f(k)\geqslant k^2$成立时，总可推出$f(k+1)\geqslant(k+1)^2$成立”．那么，下列命题总成立的是（　　）

A．若$f(1)<1$成立，则$f(10)<100$成立

B．若$f(2)<4$成立，则$f(1)\geqslant 1$成立

C．若 $f(3)\geqslant 9$ 成立，则当 $k\geqslant 1$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

D．若 $f(4)\geqslant 25$ 成立，则当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

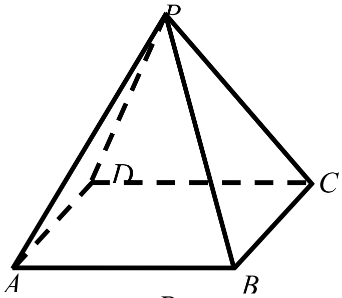
【答案】D

【解析】 对A，因为“原命题成立，否命题不一定成立”，所以若 $f(1)<1$ 成立，则不一定 $f(10)<100$ 成立；对B，因为“原命题成立，则逆否命题一定成立”，所以只能得出：若 $f(2)<4$ 成立，则 $f(1)<1$ 成立，不能得出：．若 $f(2)<4$ 成立，则 $f(1)\geqslant 1$ 成立；对C，当k=1或2时，不一定有 $f(k)\geq k^2$ 成立；对D，$\because f(4)\geq 25\geq 16, \therefore$ 对于任意的 $k\geq 4$，均有 $f(k)\geq k^2$ 成立。故选D。

三．解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤．

16．（本题满分12分）

如图,在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=2$，直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，求正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V．

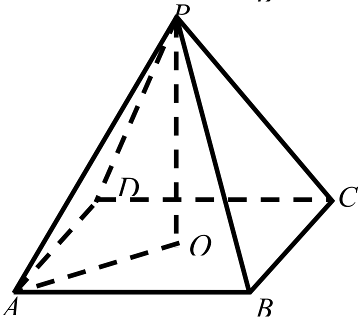


【解析】 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O．连接 AO，O 是正方形 $ABCD$ 的中心，$\angle PAO$ 是直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角．

$\angle PAO=60^\circ$，$PA=2$． $\therefore$ $PO=\sqrt{3}$．

$AO=1$，$AB=\sqrt{2}$，

$\therefore$ $V=\frac{1}{3}PO\bullet S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．



17．（本题满分14分）

在△ABC 中，a，b，c 分别是三个内角 A，B，C 的对边．若 $a=2$，$C=\frac{\pi}{4}$，$\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求△$ABC$ 的面积 S．

【解析】由题意，得 $\cos B=\frac{3}{5}$， B 为锐角， $\sin B=\frac{4}{5}$，

$$\sin A=\sin(\pi-B-C)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-B\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

由正弦定理得 $c=\frac{10}{7}$， $\therefore\ S=\frac{1}{2}ac\bullet\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{10}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{7}$.

18. （本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分．

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快．2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦，年生产量的增长率为34%． 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%（如，2003年的年生产量的增长率为36%）．

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦．假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）？

【解析】（1） 由已知得2003，2004，2005，2006年太阳电池的年生产量的增长率依次为 36%， 38%， 40%， 42%． 则2006年全球太阳电池的年生产量为

$670\times 1.36\times 1.38\times 1.40\times 1.42\approx 2499.8$ (兆瓦).

（2）设太阳电池的年安装量的平均增长率为 x， 则 $\frac{1420(1+x)^4}{2499.8(1+42\%)^4}\geqslant 95\%$.

解得 $x\geqslant 0.615$.

因此，这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到 61.5% .

19. （本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分．

已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）.

（1）当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由．

【解析】（1） $x^2+\frac{2}{x}-(x-1)^2-\frac{2}{x-1}>2x-1$， $\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}>0$，

$x(x-1)<0$． $\therefore$ 原不等式的解为 $0<x<1$.

（2）当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，$\therefore$ $f(x)$ 为偶函数.

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}\,(a\neq 0, x\neq 0)$，

取 $x=\pm 1$，得 $f(-1)+f(1)=2\neq 0$，$f(-1)-f(1)=-2a\neq 0$，

$\therefore$ $f(-1)\neq -f(1)$，$f(-1)\neq f(1)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

20．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$（m 为正整数）满足条件 $a_1=a_m$，$a_2=a_{m-1}$，…，$a_m=a_1$，

即 $a_i=a_{m-i+1}$（$i=1,2,\cdots,m$），我们称其为“对称数列”.

例如，数列1, 2, 5, 2, 1与数列8，4，2，2，4，8都是“对称数列”.

（1）设 $\{b_n\}$ 是7项的“对称数列”，其中 b_1,b_2,b_3,b_4 是等差数列，且 $b_1=2$，$b_4=11$.

依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项；

（2）设 $\{c_n\}$ 是49项的“对称数列”，其中 $c_{25},c_{26},\cdots,c_{49}$ 是首项为1，

公比为2的等比数列，求 $\{c_n\}$ 各项的和 S；

（3）设 $\{d_n\}$ 是100项的“对称数列”，其中 $d_{51},d_{52},\cdots,d_{100}$ 是首项为2，

公差为3的等差数列．求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 S_n（$n=1,2,\cdots,100$）.

【解析】（1）设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则 $b_4=b_1+3d=2+3d=11$，解得 $d=3$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为 $2,5,8,11,8,5,2$.

（2） $S=c_1+c_2+\cdots+c_{49}=2(c_{25}+c_{26}+\cdots+c_{49})-c_{25}$

$=2\left(1+2+2^2+\cdots+2^{24}\right)-1=2\left(2^{25}-1\right)-1=2^{26}-3=67108861$.

（3） $d_{51}=2$， $d_{100}=2+3\times(50-1)=149$.

由题意得 $d_1,d_2,\cdots,d_{50}$ 是首项为149，公差为 -3 的等差数列.

当 $n\leqslant 50$ 时， $S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=149n+\dfrac{n(n-1)}{2}(-3)=-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{301}{2}n$.

当 $51\leqslant n\leqslant 100$ 时， $S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=S_{50}+\left(d_{51}+d_{52}+\cdots+d_n\right)$

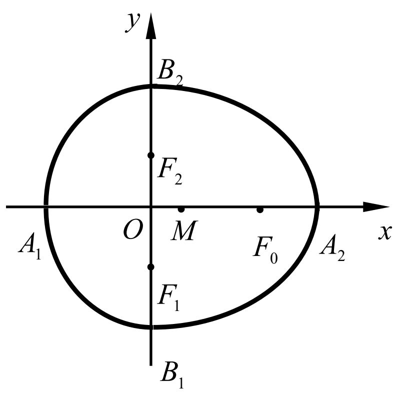
$$=3775+2\bullet(n-50)+\frac{(n-50)(n-51)}{2}\times 3=\frac{3}{2}n^2-\frac{299}{2}n+7500$$

综上所述， $S_n=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{301}{2}n, & 1\leqslant n\leqslant 50,\\ \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{299}{2}n+7500, & 51\leqslant n\leqslant 100.\end{cases}$

21．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分9分．

我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ $(x\leqslant 0)$ 合成的曲线称作“果圆”，其中 $a^2=b^2+c^2$， $a>0$， $b>c>0$.

如图，设点 F_0， F_1， F_2 是相应椭圆的焦点， A_1， A_2 和 B_1， B_2 是“果圆”与 x， y 轴的交点， M 是线段 A_1A_2 的中点.



（3） 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为1的等边三角形，求该“果圆”的方程；

（2）设 P 是“果圆”的半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ $(x\leqslant 0)$ 上任意一点．求证：当 $\left|PM\right|$ 取得最小值时， P 在点 B_1， B_2 或 A_1 处；

（4） 若 P 是"果圆"上任意一点，求 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的横坐标.

【解析】（1）$\because$ $F_0(c,0)$，$F_1\left(0,-\sqrt{b^2-c^2}\right)$，$F_2\left(0,\sqrt{b^2-c^2}\right)$，

$\therefore$ $|F_0F_2|=\sqrt{\left(b^2-c^2\right)+c^2}=b=1$，$|F_1F_2|=2\sqrt{b^2-c^2}=1$，于是 $c^2=\dfrac{3}{4}$，$a^2=b^2+c^2=\dfrac{7}{4}$，

所求"果圆"方程为 $\dfrac{4}{7}x^2+y^2=1\ \ (x\geqslant 0)$，$y^2+\dfrac{4}{3}x^2=1\ \ (x\leqslant 0)$.

（2）设 $P(x,y)$，则

$$|PM|^2=\left(x-\frac{a-c}{2}\right)^2+y^2=\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)x^2-(a-c)x+\frac{(a-c)^2}{4}+b^2,\quad -c\leqslant x\leqslant 0,$$

$\because$ $1-\dfrac{b^2}{c^2}<0$，$\therefore$ $|PM|^2$ 的最小值只能在 $x=0$ 或 $x=-c$ 处取到.

即当 $|PM|$ 取得最小值时，P 在点 B_1，B_2 或 A_1 处.

（3）$\because$ $|A_1M|=|MA_2|$，且 B_1 和 B_2 同时位于"果圆"的半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (x\geqslant 0)$ 和半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ \ (x\leqslant 0)$ 上，所以，由（2）知，只需研究 P 位于"果圆"的半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(x\geqslant 0)$ 上的情形即可.

$$|PM|^2=\left(x-\frac{a-c}{2}\right)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left[x-\frac{a^2(a-c)}{2c^2}\right]^2+b^2+\frac{(a-c)^2}{4}-\frac{a^2(a-c)^2}{4c^2}.$$

当 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}\leqslant a$，即 $a\leqslant 2c$ 时，$|PM|^2$ 的最小值在 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$ 时取到，

此时 P 的横坐标是 $\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$.

当 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}>a$，即 $a>2c$ 时，由于 $|PM|^2$ 在 $x<a$ 时是递减的，$|PM|^2$ 的最小值在 $x=a$ 时取到，此时 P 的横坐标是 a.

综上所述，若 $a\leqslant 2c$，当 $|PM|$ 取得最小值时，点 P 的横坐标是 $\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$；

若 $a>2c$，当 $|PM|$ 取得最小值时，点 P 的横坐标是 a 或 $-c$.