2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理 科 数 学

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷(非选择题)两部分, 共150分. 考试用时120分钟. 第I卷1至2页, 第II卷3至5页.

答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,
并在规定位置粘贴考试用条形码. 答卷时, 考生务必将答案涂写在答题卡上,
答在试卷上的无效. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

祝各位考生考试顺利!

第I卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后, 用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
2. 本卷共8小题, 每小题5分, 共40分.

参考公式:

·如果事件A, B互斥, 那么
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
·棱柱的体积公式$V=Sh$，
其中S表示棱柱的底面面积,
h表示棱柱的高.
·如果事件A, B相互独立, 那么
$P(AB)=P(A)P(B)$
·球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
其中R表示球的半径.

一．选择题: 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知集合$A=\{x\in \boldsymbol{R} \mid |x|\le 2\}$, $A=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x\le 1\}$, 则 $A\cap B=$

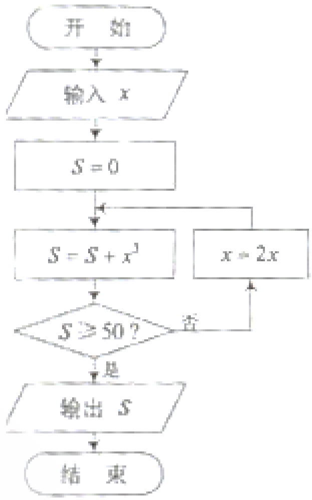
(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[-2,2]$　　(D) $[-2,1]$

(2) 设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}3x+y-6\ge 0,\\ x-y-2\le 0,\\ y-3\le 0,\end{cases}$ 则目标函数$z=y-2x$的最小值为

(A) -7　　(B) -4

(C) 1　　(D) 2

(3) 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 若输入x的值为1, 则输出S的值为



(A) 64　　(B) 73

(C) 512　　(D) 585

(4) 已知下列三个命题:

①若一个球的半径缩小到原来的$\frac{1}{2}$, 则其体积缩小到原来的$\frac{1}{8}$;

②若两组数据的平均数相等, 则它们的标准差也相等;

③直线$x+y+1=0$与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切.

其中真命题的序号是:

(A) ①②③　　(B) ①②

(C) ①③　　(D) ②③

(5) 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线与抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线分别交于$A$, B两点, O为坐标原点. 若双曲线的离心率为2, $\triangle AOB$的面积为$\sqrt{3}$, 则$p=$

(A) 1　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

(6) 在$\triangle ABC$中, $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$, $AB=\sqrt{2}$, $BC=3$, 则$\sin\angle BAC=$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　(C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(7) 函数$f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$的零点个数为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(8) 已知函数$f(x)=x(1+a|x|)$. 设关于x的不等式$f(x+a)<f(x)$的解集为A, 若$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$, 则实数$a$的取值范围是

(A) $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ (B) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$

(C) $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ (D) $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理 科 数 学

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.
2. 本卷共12小题, 共110分.

二．填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

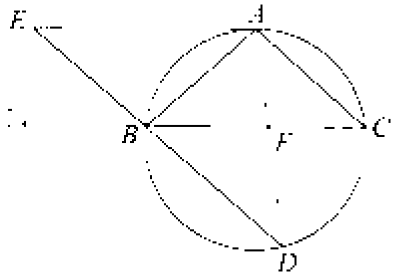
(9) 已知a, $b\in\boldsymbol{R}$, i是虚数单位. 若$(a+i)(1+i)=bi$, 则$a+bi=$ ___.

(10) $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为___.

(11) 已知圆的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$, 圆心为C, 点P的极坐标为$\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 则$|CP|=$ ___.

(12) 在平行四边形$ABCD$中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E为CD的中点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则$AB$的长为___.

(13) 如图, $\triangle ABC$为圆的内接三角形, BD为圆的弦, 且$BD//AC$. 过点A做圆的切线与DB的延长线交于点E, AD与BC交于点F. 若$AB=AC$, $AE=6$, $BD=5$, 则线段CF的长为___.



(14) 设$a+b=2$, $b>0$, 则当$a=$ ___时, $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$取得最小值.

三．解答题: 本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2 x+1, x\in\boldsymbol{R}$.

(I) 求$f(x)$的最小正周期;

(II) 求$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

(16) (本小题满分13分)

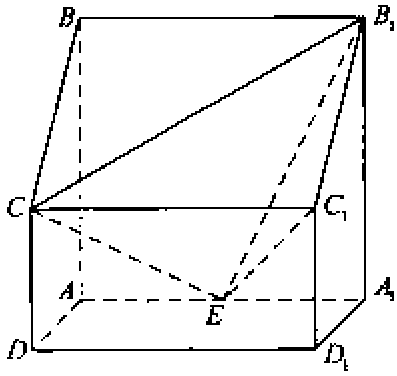
一个盒子里装有7张卡片， 其中有红色卡片4张， 编号分别为1, 2, 3, 4; 白色卡片3张, 编号分别为2, 3, 4. 从盒子中任取4张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).

(I) 求取出的4张卡片中, 含有编号为3的卡片的概率.

(II) 再取出的4张卡片中, 红色卡片编号的最大值设为X, 求随机变量X的分布列和数学期望.

(17) (本小题满分13分)

如图, 四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, 侧棱$A_1A\perp$底面$ABCD$, $AB//DC$, $AB\perp AD$, $AD = CD = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E为棱AA_1的中点.



(I) 证明$B_1C_1\perp CE$;

(II) 求二面角B_1-CE-C_1的正弦值.

(III) 设点M在线段C_1E上, 且直线AM与平面ADD_1A_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段AM的长.

(18) (本小题满分13分)

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$, 离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过点$F$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设A, B分别为椭圆的左右顶点, 过点F且斜率为k的直线与椭圆交于C, D两点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求$k$的值.

(19) (本小题满分14分)

已知首项为$\dfrac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$不是递减数列, 其前n项和为$S_n(n\in \boldsymbol{N}^*)$, 且$S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$成等差数列.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(II) 设$T_n=S_n-\dfrac{1}{S_n}(n\in \boldsymbol{N}^*)$, 求数列$\{T_n\}$的最大项的值与最小项的值.

(20) (本小题满分14分)

已知函数$f(x)=x^2\ln x$.

(I) 求函数$f(x)$的单调区间;

(II) 证明: 对任意的$t>0$, 存在唯一的s, 使$t=f(s)$.

(III) 设(II)中所确定的s关于t的函数为$s=g(t)$, 证明: 当$t>e^2$时, 有

$$\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}.$$

2013年普通高等学校夏季招生全国统一考试数学理工农医类（天津卷）

第Ⅰ卷

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．

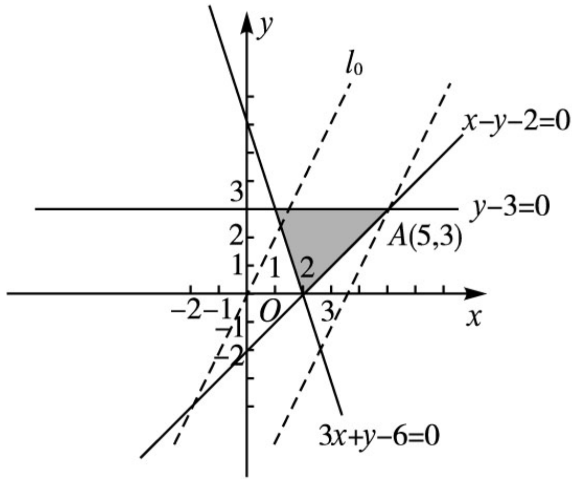
答案：D

解析：解不等式$|x|\leqslant 2$，得$-2\leqslant x\leqslant 2$，所以$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以$A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$. 故选D.

2．

答案：A

解析：作约束条件$\begin{cases}3x+y-6\geq 0,\\ x-y-2\leq 0,\\ y-3\leq 0\end{cases}$所表示的可行区域，



如图所示，$z=y-2x$可化为$y=2x+z$，z表示直线在y轴上的截距，截距越大z越大，作直线l_0：$y=2x$，平移l_0过点$A(5,3)$，此时z最小为-7，故选A.

3．

答案：B

解析：由程序框图，得$x=1$时，$S=1$；$x=2$时，$S=9$；$x=4$时，$S=9+64=73$，结束循环输出S的值为73，故选B.

4．

答案：C

解析：设球半径为R，缩小后半径为r，则$r=\frac{1}{2}R$，而$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，$V'=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^3=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi R^3$，所以该球体积缩小到原来的$\frac{1}{8}$，故①为真命题；两组数据的平均数相等，它们的方差可能不相等，故②为假命题；圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$的圆心到直线$x+y+1=0$的距离$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为该距离等于圆的半径，所以直线与圆相切，故③为真命题.

故选C.

5．

答案：C

解析：设A点坐标为$(x_0,\ y_0)$，则由题意，得$S_{\triangle AOB}=|x_0|\cdot|y_0|=\sqrt{3}$. 抛物线$y^2=2px$的准线为$x=-\dfrac{p}{2}$，所以$x_0=-\dfrac{p}{2}$，代入双曲线的渐近线的方程$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，得$|y_0|=\dfrac{bp}{2a}$. 由$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=2,\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}$得$b=\sqrt{3}a$，所以$|y_0|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}p$. 所以$S_{\triangle AOB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}p^2=\sqrt{3}$，解得$p=2$或$p=-2$(舍去).

6.

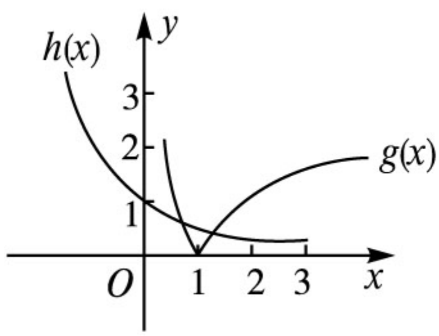
答案：C

解析：在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=2+9-2\times\sqrt{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$，即得$AC=\sqrt{5}$. 由正弦定理$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，即$\dfrac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3}{\sin\angle BAC}$，所以$\sin\angle BAC=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

7.

答案：B

解析：函数$f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$的零点也就是方程$2^x|\log_{0.5}x|-1=0$的根，即$2^x|\log_{0.5}x|=1$，整理得$|\log_{0.5}x|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. 令$g(x)=|\log_{0.5}x|$，$h(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，作$g(x)$，$h(x)$的图象如图所示. 因为两个函数图象有两个交点，所以$f(x)$有两个零点.



8.

答案：A

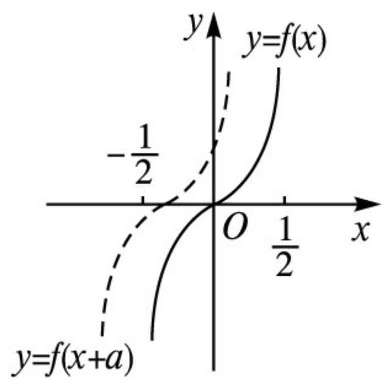
解析：$f(x)=x(1+a|x|)=\begin{cases}ax^2+x, x\geq 0,\\ -ax^2+x, x<0.\end{cases}$

若不等式$f(x+a)<f(x)$的解集为A，且$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq A$，

则在区间$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上，函数$y=f(x+a)$的图象应在函数$y=f(x)$的图象的下边.

(1)当$a=0$时，显然不符合条件.

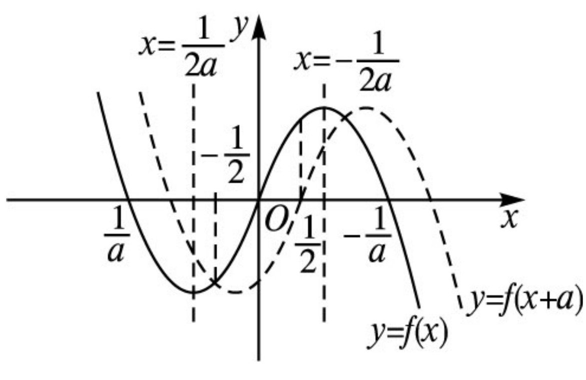
(2)当$a>0$时，画出函数$y=f(x)$和$y=f(x+a)$的图象大致如图.



由图可知，当$a>0$时，$y=f(x+a)$的图象在$y=f(x)$图象的上边，故$a>0$不符合条件.

(3)当$a<0$时，画出函数$y=f(x)$和$y=f(x+a)$的图象大致如图.

由图可知，若$f(x+a)<f(x)$的解集为A，且$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq A$，



只需 $f\left(-\frac{1}{2}+a\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 即可，

则有 $-a\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+a\right)<-a\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$（$a<0$），

整理，得 $a^2-a-1<0$，解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

∵$a<0$，∴$a\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

综上，可得 a 的取值范围是 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共12小题，共110分．

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9．**答案**：$1+2\mathrm{i}$

解析：由 $(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=a-1+(a+1)\mathrm{i}=b\mathrm{i}$，得 $\begin{cases}a-1=0,\\a+1=b,\end{cases}$ 解方程组，得 $a=1$，$b=2$，则 $a+b\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$.

10．**答案**：15

解析：二项展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}$，$6-\frac{3}{2}r=0$ 得 $r=4$，所以二项展开式的常数项为 $T_5=(-1)^4\mathrm{C}_6^4=15$.

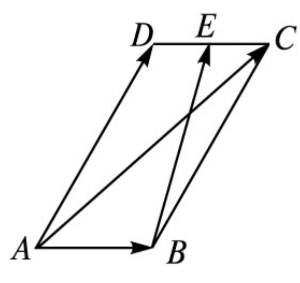
11．**答案**：$2\sqrt{3}$

解析：由圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，得圆心 C 的直角坐标为 $(2,0)$，点 P 的直角坐标为 $(2,2\sqrt{3})$，所以 $|CP|=2\sqrt{3}$.

12．**答案**：$\frac{1}{2}$

解析：如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|+1=1$，解方程得 $|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}$（舍去 $|\overrightarrow{AB}|=0$），所以线段 AB 的长为 $\frac{1}{2}$.



13．

答案：$\frac{8}{3}$

解析：∵AE 为圆的切线，

∴由切割线定理，得 $AE^2=EB\cdot ED$.

又$AE=6$，$BD=5$，可解得$EB=4$.
∵$\angle EAB$为弦切角，且$AB=AC$，
∴$\angle EAB=\angle ACB=\angle ABC$.
∴$EA\parallel BC$. 又$BD\parallel AC$，
∴四边形$EBCA$为平行四边形.
∴$BC=AE=6$，$AC=EB=4$.
由$BD\parallel AC$，得$\triangle ACF\backsim\triangle DBF$，
∴$\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{4}{5}$.
又$CF+BF=BC=6$，∴$CF=\dfrac{8}{3}$.
14．**答案**：-2
解析：因为$a+b=2$，所以

$$1=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{\frac{a+b}{2}}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{a}{4|a|}+\frac{b}{4|a|}+\frac{|a|}{b}$$

$$\geqslant\frac{a}{4|a|}+2\sqrt{\frac{b}{4|a|}\cdot\frac{|a|}{b}}=\frac{a}{4|a|}+1,$$

当$a>0$时，$\dfrac{a}{4|a|}+1=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}\geq\dfrac{5}{4}$；
当$a<0$时，$\dfrac{a}{4|a|}+1=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}\geq\dfrac{3}{4}$，当且仅当$b=2|a|$时等号成立.
因为$b>0$，所以原式取最小值时$b=-2a$.
又$a+b=2$，所以$a=-2$时，原式取得最小值.
三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．
15．
解：(1) $f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}+3\sin 2x-\cos 2x$

$$=2\sin 2x-2\cos 2x=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

所以，$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.
(2) 因为$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{3\pi}{8}\right]$上是增函数，在区间$\left[\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$上是减函数．又$f(0)=-2$，
$f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=2\sqrt{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$，故函数$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$2\sqrt{2}$，最小值为$-2$.
16．
解：(1) 设“取出的4张卡片中，含有编号为3的卡片”为事件A，则

$$P(A)=\frac{C_2^1C_5^3+C_2^2C_5^2}{C_7^4}=\frac{6}{7}.$$

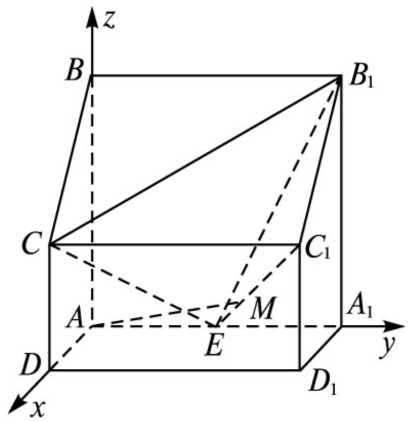
所以，取出的4张卡片中，含有编号为3的卡片的概率为$\dfrac{6}{7}$.
(2) 随机变量X的所有可能取值为1, 2, 3, 4.
$P(X=1)=\dfrac{C_3^3}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$，　$P(X=2)=\dfrac{C_4^3}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$，　$P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{C_7^4}=\dfrac{2}{7}$，　$P(X=4)=$

$\dfrac{C_6^3}{C_7^4}=\dfrac{4}{7}$.

所以随机变量X的分布列是

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$

随机变量X的数学期望$EX=1\times\dfrac{1}{35}+2\times\dfrac{4}{35}+3\times\dfrac{2}{7}+4\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{17}{5}$.



17．

解：(方法一)

(1)证明：如图，以点A为原点建立空间直角坐标系，依题意得$A(0,0,0)$，$B(0,0,2)$，$C(1,0,1)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(1,2,1)$，$E(0,1,0)$.

易得$\overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,1,-1)$，于是$\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0$

，

所以$B_1C_1\perp CE$.

(2) $\overrightarrow{B_1C}=(1,-2,-1)$.

设平面B_1CE的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x-2y-z=0,\\ -x+y-z=0.\end{cases}$

消去x，得$y+2z=0$，不妨令$z=1$，可得一个法向量为$\boldsymbol{m}=(-3,-2,1)$.

由(1)，$B_1C_1\perp CE$，又$CC_1\perp B_1C_1$，可得$B_1C_1\perp$平面CEC_1，

故$\overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,-1)$为平面$CEC_1$的一个法向量.

于是$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{B_1C_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{B_1C_1}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{14}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

从而$\sin\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{B_1C_1}\rangle=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

所以二面角B_1-CE-C_1的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(3) $\overrightarrow{AE}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(1,1,1)$.

设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EC_1}=(\lambda,\lambda,\lambda)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，有$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=(\lambda,\lambda+1,\lambda)$.

可取$\overrightarrow{AB}=(0,0,2)$为平面$ADD_1A_1$的一个法向量.

设θ为直线AM与平面ADD_1A_1所成的角，则

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\rangle|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

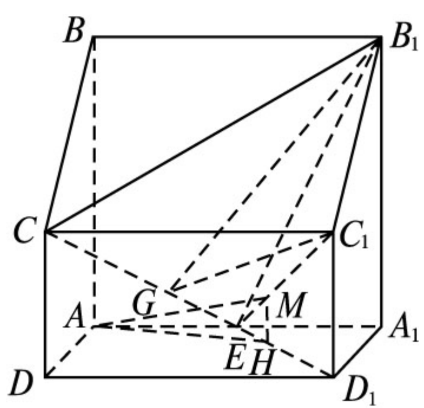
$=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(\lambda+1)^2+\lambda^2}\times2}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}}$.

于是$\dfrac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$，

所以$AM=\sqrt{2}$.

(方法二)

(1)证明：因为侧棱$CC_1\perp$底面$A_1B_1C_1D_1$，$B_1C_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，



所以$CC_1 \perp B_1C_1$.

经计算可得$B_1E=\sqrt{5}$，$B_1C_1=\sqrt{2}$，$EC_1=\sqrt{3}$，
从而$B_1E^2=B_1{C_1}^2+E{C_1}^2$，
所以在$\triangle B_1EC_1$中，$B_1C_1 \perp C_1E$，
又CC_1，$C_1E \subset$平面CC_1E，$CC_1 \cap C_1E=C_1$，
所以$B_1C_1 \perp$平面CC_1E，
又$CE \subset$平面CC_1E，故$B_1C_1 \perp CE$.
(2)过B_1作$B_1G \perp CE$于点G，连接C_1G.
由(1)，$B_1C_1 \perp CE$，故$CE \perp$平面B_1C_1G，得$CE \perp C_1G$，
所以$\angle B_1GC_1$为二面角B_1-CE-C_1的平面角.

在$\triangle CC_1E$中，由$CE=C_1E=\sqrt{3}$，$CC_1=2$，可得$C_1G=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle B_1C_1G$中，$B_1G=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$，

所以$\sin\angle B_1GC_1=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

即二面角B_1-CE-C_1的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(3)连接D_1E，过点M作$MH \perp ED_1$于点H，可得$MH \perp$平面ADD_1A_1，连接AH，AM，则$\angle MAH$为直线AM与平面ADD_1A_1所成的角.

设$AM=x$，从而在$\mathrm{Rt}\triangle AHM$中，有$MH=\dfrac{\sqrt{2}}{6}x$，$AH=\dfrac{\sqrt{34}}{6}x$.

在$\mathrm{Rt}\triangle C_1D_1E$中，$C_1D_1=1$，$ED_1=\sqrt{2}$，得$EH=\sqrt{2}MH=\dfrac{1}{3}x$.

在$\triangle AEH$中，$\angle AEH=135°$，$AE=1$，

由$AH^2=AE^2+EH^2-2AE\cdot EH\cos 135°$，得$\dfrac{17}{18}x^2=1+\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{3}x$，

整理得$5x^2-2\sqrt{2}x-6=0$，解得$x=\sqrt{2}$.
所以线段AM的长为$\sqrt{2}$.
18.

解：(1)设$F(-c,0)$，由$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，知$a=\sqrt{3}c$.过点$F$且与$x$轴垂直的直线为$x=-c$，代入椭圆方程有$\dfrac{(-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

解得$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}b}{3}$，于是$\dfrac{2\sqrt{6}b}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，解得$b=\sqrt{2}$，

又$a^2-c^2=b^2$，从而$a=\sqrt{3}$，$c=1$，

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)设点$C(x_1, y_1)$，$D(x_2, y_2)$，由$F(-1,0)$得直线CD的方程为$y=k(x+1)$，

由方程组$\begin{cases} y=k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消去$y$，整理得$(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

求解可得$x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k^2-6}{2+3k^2}$.

因为$A(-\sqrt{3}，0)$，$B(\sqrt{3}，0)$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=(x_1+\sqrt{3}，y_1)\cdot(\sqrt{3}-x_2，-y_2)+(x_2+\sqrt{3}，y_2)\cdot(\sqrt{3}-x_1，-y_1)$

$=6-2x_1x_2-2y_1y_2=6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$=6-(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2$

$=6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}$.

由已知得$6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$，解得$k=\pm\sqrt{2}$.

19.

解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列，

所以$S_5+a_5-S_3-a_3=S_4+a_4-S_5-a_5$，

即$4a_5=a_3$，于是$q^2=\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{1}{4}$.

又$\{a_n\}$不是递减数列且$a_1=\dfrac{3}{2}$，所以$q=-\dfrac{1}{2}$.

故等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3}{2^n}$.

(2)由(1)得$S_n=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{2^n}, n\text{为奇数}, \\ 1-\dfrac{1}{2^n}, n\text{为偶数}. \end{cases}$

当n为奇数时，S_n随n的增大而减小，所以$1<S_n\leqslant S_1=\dfrac{3}{2}$，

故$0<S_n-\dfrac{1}{S_n}\le S_1-\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$.

当n为偶数时，S_n随n的增大而增大，所以$\dfrac{3}{4}=S_2\leqslant S_n<1$，

故$0>S_n-\dfrac{1}{S_n}\ge S_2-\dfrac{1}{S_2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{7}{12}$.

综上，对于$n\in\mathbf{N}^*$，总有$-\dfrac{7}{12}\le S_n-\dfrac{1}{S_n}\le\dfrac{5}{6}$.

所以数列$\{T_n\}$最大项的值为$\dfrac{5}{6}$，最小项的值为$-\dfrac{7}{12}$.

20.

解：(1)函数$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.

$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数$f(x)$的单调递减区间是$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，单调递增区间是$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.

(2)证明：当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)\leqslant 0$.

设$t>0$，令$h(x)=f(x)-t$，$x\in[1,+\infty)$.

由(1)知，$h(x)$在区间$(1,+\infty)$内单调递增.

$h(1)=-t<0$，$h(e^t)=e^{2t}\ln e^t-t=t(e^{2t}-1)>0$.

故存在唯一的$s\in(1,+\infty)$，使得$t=f(s)$成立.

(3)证明：因为$s=g(t)$，由(2)知，$t=f(s)$，且$s>1$，从而

$$\frac{\ln g(t)}{\ln t}=\frac{\ln s}{\ln f(s)}=\frac{\ln s}{\ln(s^2\ln s)}=\frac{\ln s}{2\ln s+\ln(\ln s)}=\frac{u}{2u+\ln u},$$

其中$u=\ln s$.

要使$\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}$成立，只需$0<\ln u<\frac{u}{2}$.

当$t>e^2$时，若$s=g(t)\leqslant e$，则由$f(s)$的单调性，有$t=f(s)\leqslant f(e)=e^2$，矛盾.

所以$s>e$，即$u>1$，从而$\ln u>0$成立.

另一方面，令$F(u)=\ln u-\frac{u}{2}$，$u>1$. $F'(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}$，令$F'(u)=0$，得$u=2$.

当$1<u<2$时，$F'(u)>0$；当$u>2$时，$F'(u)<0$.

故对$u>1$，$F(u)\leqslant F(2)<0$.

因此$\ln u<\frac{u}{2}$成立.

综上，当$t>e^2$时，有$\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}$.