2014年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.

1．（5分）设集合M={0，1，2}，N={x|x^2﹣3x+2≤0}，则M∩N=（　　）

A．{1}　　B．{2}　　C．{0，1}　　D．{1，2}

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】求出集合N的元素，利用集合的基本运算即可得到结论．

【解答】解：∵N={x|x^2﹣3x+2≤0}={x|（x﹣1）（x﹣2）≤0}={x|1≤x≤2}，

∴M∩N={1，2}，

故选：D．

【点评】本题主要考查集合的基本运算，比较基础．

2．（5分）设复数z_1，z_2在复平面内的对应点关于虚轴对称，z_1=2+i，则z_1z_2=（　　）

A．﹣5　　B．5　　C．﹣4+i　　D．﹣4﹣i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】根据复数的几何意义求出z_2，即可得到结论．

【解答】解：z_1=2+i对应的点的坐标为（2，1），

∵复数z_1，z_2在复平面内的对应点关于虚轴对称，

∴（2，1）关于虚轴对称的点的坐标为（﹣2，1），

则对应的复数，z_2=﹣2+i，

则z_1z_2=（2+i）（﹣2+i）=i^2﹣4=﹣1﹣4=﹣5，

故选：A．

【点评】本题主要考查复数的基本运算，利用复数的几何意义是解决本题的关键，比较基础．

3．（5分）设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$，则$\vec{a}\bullet\vec{b}=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．5

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】将等式进行平方，相加即可得到结论．

【解答】解：∵$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$，

∴分别平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2=10$，$\vec{a}^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2=6$，

两式相减得$4\vec{a}\bullet\vec{b}=10-6=4$，

即$\vec{a}\bullet\vec{b}=1$，

故选：A．

【点评】本题主要考查向量的基本运算，利用平方进行相加是解决本题的关键，比较基础．

4．（5分）钝角三角形ABC的面积是$\frac{1}{2}$，AB=1，BC=$\sqrt{2}$，则AC=（　　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．1

【考点】HR：余弦定理．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】利用三角形面积公式列出关系式，将已知面积，AB，BC的值代入求出sinB的值，分两种情况考虑：当B为钝角时；当B为锐角时，利用同角三角函数间的基本关系求出cosB的值，利用余弦定理求出AC的值即可．

【解答】解：∵钝角三角形ABC的面积是$\frac{1}{2}$，AB=c=1，BC=a=$\sqrt{2}$，

∴$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}$，即$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当B为钝角时，cosB=﹣$\sqrt{1-\sin^2B}$=﹣$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

利用余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\bullet \cos B=1+2+2=5$，即$AC=\sqrt{5}$，

当B为锐角时，cosB=$\sqrt{1-\sin^2B}$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

利用余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\bullet \cos B=1+2-2=1$，即AC=1，

此时$AB^2+AC^2=BC^2$，即△ABC为直角三角形，不合题意，舍去，

则$AC=\sqrt{5}$.

故选：B.

【点评】此题考查了余弦定理，三角形面积公式，以及同角三角函数间的基本关系，熟练掌握余弦定理是解本题的关键.

5．（5分）某地区空气质量监测资料表明，一天的空气质量为优良的概率是0.75，连续两天为优良的概率是0.6，已知某天的空气质量为优良，则随后一天的空气质量为优良的概率是（　　）

A．0.8　　B．0.75　　C．0.6　　D．0.45

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】设随后一天的空气质量为优良的概率为p，则由题意可得0.75×p=0.6，由此解得p的值.

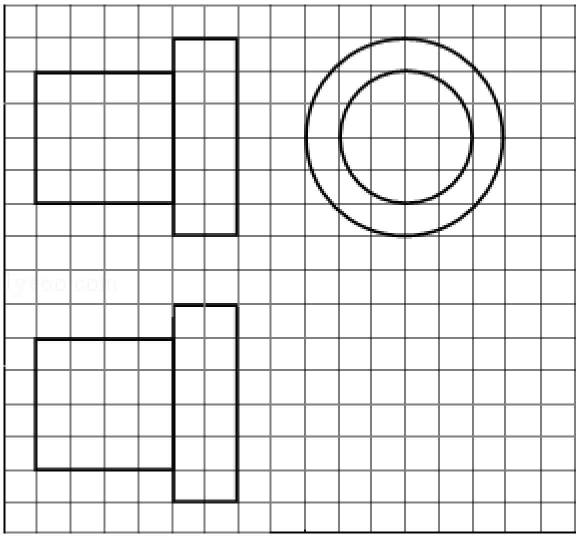
【解答】解：设随后一天的空气质量为优良的概率为p，则由题意可得0.75×p=0.6，

解得p=0.8，

故选：A.

【点评】本题主要考查相互独立事件的概率乘法公式的应用，属于基础题.

6．（5分）如图，网格纸上正方形小格的边长为1（表示1cm），图中粗线画出的是某零件的三视图，该零件由一个底面半径为3cm，高为6cm的圆柱体毛坯切削得到，则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为（　　）



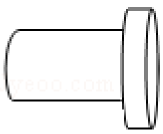
A. $\frac{17}{27}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{10}{27}$　　D. $\frac{1}{3}$

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】由三视图判断几何体的形状，通过三视图的数据求解几何体的体积即可．

【解答】解：几何体是由两个圆柱组成，一个是底面半径为3高为2，一个是底面半径为2，高为4，



组合体体积是：$3^2\pi\bullet 2+2^2\pi\bullet 4=34\pi$．

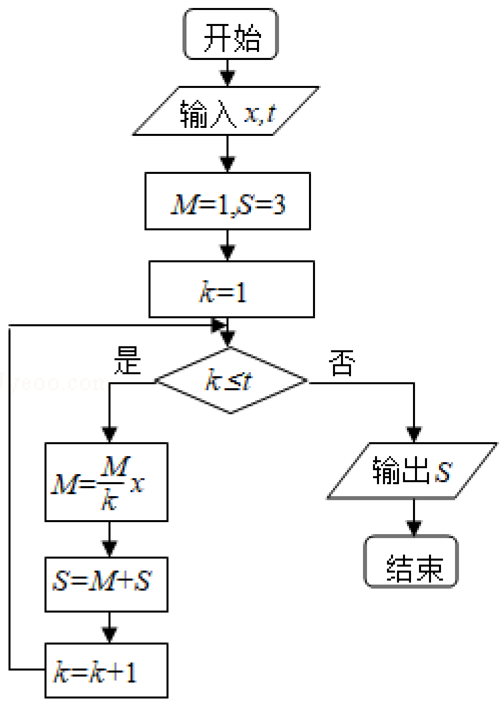
底面半径为3cm，高为6cm的圆柱体毛坯的体积为：$3^2\pi\times 6=54\pi$

切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为：$\frac{54\pi-34\pi}{54\pi}=\frac{10}{27}$．

故选：C．

【点评】本题考查三视图与几何体的关系，几何体的体积的求法，考查空间想象能力以及计算能力．

7．（5分）执行如图所示的程序框图，若输入的x，t均为2，则输出的S=（　　）



A．4　　　　B．5　　　　C．6　　　　D．7

【考点】EF：程序框图．

【专题】5K：算法和程序框图．

【分析】根据条件，依次运行程序，即可得到结论．

【解答】解：若x=t=2，

则第一次循环，1≤2成立，则M=$\frac{1}{1}\times 2=2$，S=2+3=5，k=2，

第二次循环，2≤2成立，则M=$\frac{2}{2}\times 2=2$，S=2+5=7，k=3，

此时3≤2不成立，输出S=7，

故选：D．

【点评】本题主要考查程序框图的识别和判断，比较基础．

8．（5分）设曲线y=ax﹣ln（x+1）在点（0，0）处的切线方程为y=2x，则a=（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】52：导数的概念及应用．

【分析】根据导数的几何意义，即$f'(x_0)$表示曲线$f(x)$在$x=x_0$处的切线斜率，再代入计算．

【解答】解：$y'=a-\frac{1}{x+1}$，

∴$y'(0)=a-1=2$，

∴$a=3$．

故选：D．

【点评】本题是基础题，考查的是导数的几何意义，这个知识点在高考中是经常考查的内容，一般只要求导正确，就能够求解该题．在高考中，导数作为一个非常好的研究工具，经常会被考查到，特别是用导数研究最值，证明不等式，研究零点问题等等经常以大题的形式出现，学生在复习时要引起重视．

9．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y-7\leqslant 0\\ x-3y+1\leqslant 0\\ 3x-y-5\geqslant 0\end{cases}$，则$z=2x-y$的最大值为（　　）

A．10　　B．8　　C．3　　D．2

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合确定z的最大值．

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分ABC）．

由$z=2x-y$得$y=2x-z$，

平移直线$y=2x-z$，

由图象可知当直线$y=2x-z$经过点C时，直线$y=2x-z$的截距最小，

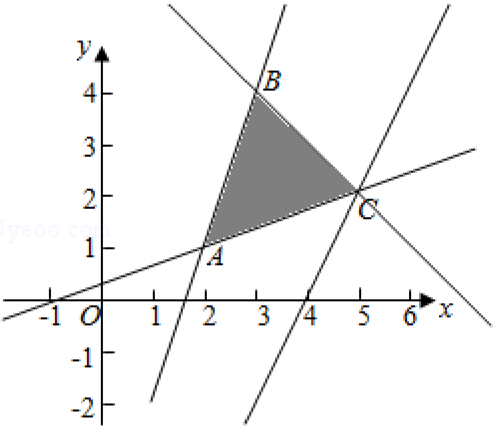
此时z最大．

由$\begin{cases}x+y-7=0\\ x-3y+1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$，即C（5，2）

代入目标函数$z=2x-y$，

得$z=2\times5-2=8$.

故选：B.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，结合目标函数的几何意义，利用数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

10．（5分）设F为抛物线C：$y^2=3x$的焦点，过F且倾斜角为30°的直线交C于A，B两点，O为坐标原点，则△OAB的面积为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C．$\frac{63}{32}$　　D．$\frac{9}{4}$

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由抛物线方程求出焦点坐标，由直线的倾斜角求出斜率，写出过A，B两点的直线方程，和抛物线方程联立后化为关于y的一元二次方程，由根与系数关系得到A，B两点纵坐标的和与积，把△OAB的面积表示为两个小三角形AOF与BOF的面积和得答案.

【解答】解：由$y^2=2px$，得$2p=3$，$p=\frac{3}{2}$，

则F（$\frac{3}{4}$，0）.

∴过A，B的直线方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，

即$x=\sqrt{3}y+\frac{3}{4}$.

联立$\begin{cases}y^2=3x\\x=\sqrt{3}y+\frac{3}{4}\end{cases}$，得$4y^2-12\sqrt{3}y-9=0$.

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则$y_1+y_2=3\sqrt{3}$，$y_1y_2=-\frac{9}{4}$.

∴$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OFB}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}|y_1-y_2|=\frac{3}{8}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{3}{8}\times\sqrt{(3\sqrt{3})^2+9}=\frac{9}{4}$.

故选：D.

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查数学转化思想方法，涉及直线和圆锥曲线关系问题，常采用联立直线和圆锥曲线，然后利用一元二次方程的根与系数关系解题，是中档题.

11.（5分）直三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，∠BCA=90°，M，N分别是A_1B_1，A_1C_1的中点，BC=CA=CC_1，则BM与AN所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】画出图形，找出BM与AN所成角的平面角，利用解三角形求出BM与AN所成角的余弦值.

【解答】解：直三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，∠BCA=90°，M，N分别是A_1B_1，A_1C_1的中点，如图：BC 的中点为O，连结ON，

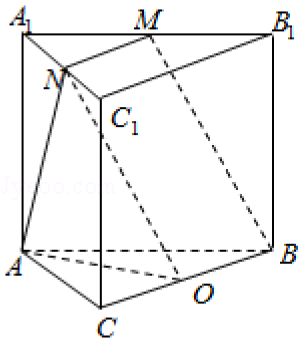
$MN\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}B_1C_1=OB$，则MN0B是平行四边形，BM与AN所成角就是∠ANO，

∵BC=CA=CC_1，

设BC=CA=CC_1=2，∴CO=1，AO=$\sqrt{5}$，AN=$\sqrt{5}$，MB=$\sqrt{B_1M^2+BB_1^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$，

在△ANO中，由余弦定理可得：cos∠ANO=$\frac{AN^2+NO^2-AO^2}{2AN\cdot NO}=\frac{6}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

故选：C.



【点评】本题考查异面直线对称角的求法，作出异面直线所成角的平面角是解题的关键，同时考查余弦定理的应用.

12．（5分）设函数f（x）=$\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{m}$，若存在f（x）的极值点$x_0$满足$x_0^2$+[f（$x_0$）]^2＜$m^2$，则m的取值范围是（　　）

A．（﹣∞，﹣6）∪（6，+∞）　　B．（﹣∞，﹣4）∪（4，+∞）

C．（﹣∞，﹣2）∪（2，+∞）　　D．（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）

【考点】H4：正弦函数的定义域和值域.

【专题】57：三角函数的图像与性质.

【分析】由题意可得，f（x_0）=±$\sqrt{3}$，且$\frac{\pi x_0}{m}$=kπ+$\frac{\pi}{2}$，k∈Z，再由题意可得当m^2最小时，|x_0|最小，而|x_0|最小为$\frac{1}{2}$|m|，可得m^2＞$\frac{1}{4}m^2+3$，由此求得m的取值范围.

【解答】解：由题意可得，f（x_0）=±$\sqrt{3}$，即$\frac{\pi x_0}{m}$=kπ+$\frac{\pi}{2}$，k∈z，即$x_0=\frac{2k+1}{2}m$.

再由x_0^2+[f（x_0）]^2＜m^2，即x_0^2+3＜m^2，可得当m^2最小时，|x_0|最小，而|x_0|最小为$\frac{1}{2}$|m|，

∴m^2＞$\frac{1}{4}m^2+3$，∴m^2＞4.

求得 m＞2，或m＜﹣2，

故选：C.

【点评】本题主要正弦函数的图象和性质，函数的零点的定义，体现了转化的

数学思想，属于中档题．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分．（第13题~第21题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22题~第24题为选考题，考生根据要求作答）

13．（5分）（x+a）^{10}的展开式中，x^7的系数为15，则a=__$\frac{1}{2}$__．

【考点】DA：二项式定理．

【专题】5P：二项式定理．

【分析】在二项展开式的通项公式中，令x的幂指数等于3，求出r的值，即可求得x^7的系数，再根据x^7的系数为15，求得a的值．

【解答】解：（x+a）^{10}的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_{10}^{r}\bullet x^{10-r}\bullet a^r$，

令10﹣r=7，求得r=3，可得x^7的系数为$a^3\bullet C_{10}^{3}=120a^3=15$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$．

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，二项式系数的性质，属于中档题．

14．（5分）函数f（x）=sin（x+2ϕ）﹣2sinϕcos（x+ϕ）的最大值为__1__．

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HW：三角函数的最值．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】由条件利用两角和差的正弦公式、余弦公式化简函数的解析式为f（x）=sinx，从而求得函数的最大值．

【解答】解：函数f（x）=sin（x+2ϕ）﹣2sinϕcos（x+ϕ）=sin[（x+ϕ）+ϕ]﹣2sinϕcos（x+ϕ）

=sin（x+ϕ）cosϕ+cos（x+ϕ）sinϕ﹣2sinϕcos（x+ϕ）=sin（x+ϕ）cosϕ﹣cos（x+ϕ）sinϕ

=sin[（x+ϕ）﹣ϕ]=sinx，

故函数f（x）的最大值为1，

故答案为：1．

【点评】本题主要考查两角和差的正弦公式、余弦公式的应用，正弦函数的最值，属于中档题．

15．（5分）已知偶函数f（x）在[0，+∞）单调递减，f（2）=0，若f（x﹣1）＞0，则x的取值范围是<u>（﹣1，3）</u>．

【考点】3N：奇偶性与单调性的综合．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】根据函数奇偶性和单调性之间的关系将不等式等价转化为f（|x﹣1|）＞f（2），即可得到结论．

【解答】解：∵偶函数f（x）在[0，+∞）单调递减，f（2）=0，

∴不等式f（x﹣1）＞0等价为f（x﹣1）＞f（2），

即f（|x﹣1|）＞f（2），

∴|x﹣1|＜2，

解得﹣1＜x＜3，

故答案为：（﹣1，3）

【点评】本题主要考查函数奇偶性和单调性之间的关系的应用，将不等式等价转化为f（|x﹣1|）＞f（2）是解决本题的关键．

16．（5分）设点M（x_0，1），若在圆O：$x^2+y^2=1$上存在点N，使得∠OMN=45°，则x_0的取值范围是<u>[﹣1，1]</u>．

【考点】J9：直线与圆的位置关系．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】根据直线和圆的位置关系，画出图形，利用数形结合即可得到结论．

【解答】解：由题意画出图形如图：点M（x_0，1），

要使圆O：$x^2+y^2=1$上存在点N，使得∠OMN=45°，

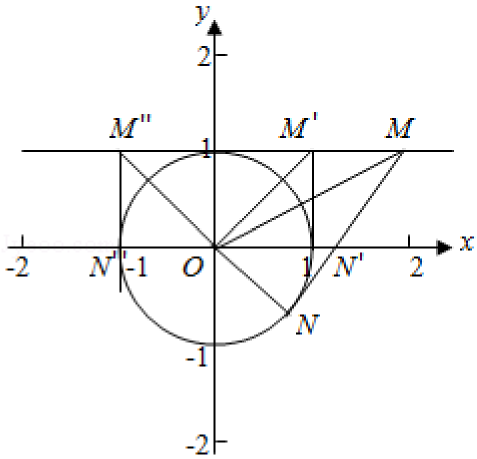
则∠OMN的最大值大于或等于45°时一定存在点N，使得∠OMN=45°，

而当MN与圆相切时∠OMN取得最大值，

此时MN=1，

图中只有M′到M″之间的区域满足MN≤1，

∴x_0的取值范围是[－1，1].



【点评】本题考查直线与圆的位置关系，直线与直线设出角的求法，数形结合是快速解得本题的策略之一.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或验算步骤.

17. （12分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

（Ⅰ）证明$\{a_n+\frac{1}{2}\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

【考点】87：等比数列的性质；8E：数列的求和.

【专题】14：证明题；54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）根据等比数列的定义，后一项与前一项的比是常数，即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=$常数，又首项不为0，所以为等比数列；

再根据等比数列的通项化式，求出$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）将$\frac{1}{a_n}$进行放大，即将分母缩小，使得构成一个等比数列，从而求和，证

明不等式．

【解答】证明（Ⅰ）$\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{2}}=\frac{3a_n+1+\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{2}}=\frac{3(a_n+\frac{1}{2})}{a_n+\frac{1}{2}}=3$，

$\because a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq 0$，

$\therefore$数列$\{a_n+\frac{1}{2}\}$是以首项为$\frac{3}{2}$，公比为3的等比数列；

$\therefore a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，即$a_n=\frac{3^n-1}{2}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，

当$n\geq 2$时，$\because 3^n-1>3^n-3^{n-1}$，$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}<\frac{2}{3^n-3^{n-1}}=\frac{1}{3^{n-1}}$，

$\therefore$当$n=1$时，$\frac{1}{a_1}=1<\frac{3}{2}$成立，

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})<\frac{3}{2}$．

$\therefore$对$n\in N_+$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$．

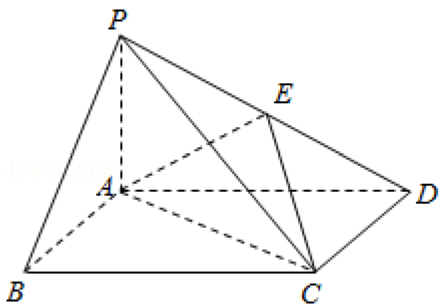
【点评】本题考查的是等比数列，用放缩法证明不等式，证明数列为等比数列，只需要根据等比数列的定义就行；数列与不等式常结合在一起考，放缩法是常用的方法之一，

通过放大或缩小，使原数列变成一个等比数列，或可以用裂项相消法求和的新数列．属于中档题．

18．（12分）如图，四棱锥P﹣ABCD中，底面ABCD为矩形，PA⊥平面ABCD，E为PD的中点．

（Ⅰ）证明：PB∥平面AEC；

（Ⅱ）设二面角D﹣AE﹣C为60°，AP=1，AD=$\sqrt{3}$，求三棱锥E﹣ACD的体积．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LS：直线与平面平行；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（Ⅰ）连接BD交AC于O点，连接EO，只要证明EO∥PB，即可证明PB∥平面AEC；

（Ⅱ）延长AE至M连结DM，使得AM⊥DM，说明∠CMD=60°，是二面角的平面角，求出CD，即可三棱锥E﹣ACD的体积．

【解答】（Ⅰ）证明：连接BD交AC于O点，连接EO，

∵O为BD中点，E为PD中点，

∴EO∥PB，（2分）

EO⊂平面AEC，PB⊄平面AEC，所以PB∥平面AEC；（6分）

（Ⅱ）解：延长AE至M连结DM，使得AM⊥DM，

∵四棱锥P﹣ABCD中，底面ABCD为矩形，PA⊥平面ABCD，

∴CD⊥平面AMD，

∴CD⊥MD．

∵二面角D﹣AE﹣C为60°，

∴∠CMD=60°，

∵AP=1，AD=$\sqrt{3}$，∠ADP=30°，

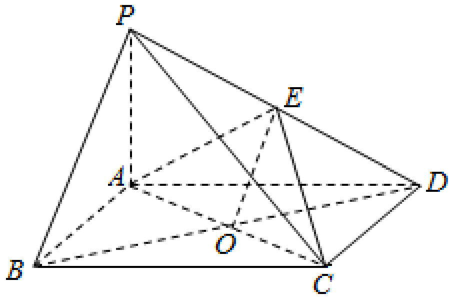
∴PD=2，

E为PD的中点．AE=1，

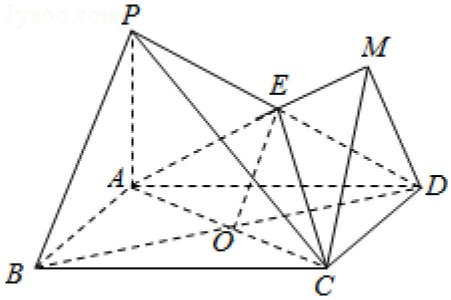
∴DM=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

CD=$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\tan60^\circ=\frac{3}{2}$．

三棱锥E﹣ACD的体积为：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\frac{1}{2}PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{8}$.



I



II

【点评】本题考查直线与平面平行的判定，几何体的体积的求法，二面角等指数的应用，考查逻辑思维能力，是中档题.

19. （12分）某地区2007年至2013年农村居民家庭人均纯收入y（单位：千元）的数据如表：

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

（Ⅰ）求y关于t的线性回归方程；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）中的回归方程，分析2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况，并预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入.

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

【考点】BK：线性回归方程．

【专题】11：计算题；5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）根据所给的数据，利用最小二乘法可得横标和纵标的平均数，横标和纵标的积的和，与横标的平方和，代入公式求出b的值，再求出a的值，写出线性回归方程．

（Ⅱ）根据上一问做出的线性回归方程，代入所给的t的值，预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入，这是一个估计值．

【解答】解：（Ⅰ）由题意，$\overline{t}=\frac{1}{7}\times$（1+2+3+4+5+6+7）=4，

$\overline{y}=\frac{1}{7}\times$（2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9）=4.3，

$\therefore\hat{b}=\frac{(-3)\times(-1.4)+(-2)\times(-1)+(-1)\times(-0.7)+0\times0.1+1\times0.5+2\times0.9+3\times1.}{9+4+1+0+1+4+9}$

$=\frac{14}{28}=0.5$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=4.3-0.5\times4=2.3$．

∴y关于t的线性回归方程为$\hat{y}=0.5t+2.3$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，b=0.5＞0，故2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入逐年增加，平均每年增加0.5千元．

将2015年的年份代号t=9代入$\hat{y}=0.5t+2.3$，得：

$\hat{y}=0.5\times9+2.3=6.8$，

故预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入为6.8千元．

【点评】本题考查线性回归分析的应用，本题解题的关键是利用最小二乘法认真做出线性回归方程的系数，这是整个题目做对的必备条件，本题是一个基础题．

20．（12分）设F_1，F_2分别是C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左，右焦点，M是C上一点且$MF_2$与x轴垂直，直线$MF_1$与C的另一个交点为N．

（1）若直线MN的斜率为$\frac{3}{4}$，求C的离心率；

（2）若直线MN在y轴上的截距为2，且$|MN|=5|F_1N|$，求a，b．

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】5E：圆锥曲线中的最值与范围问题．

【分析】（1）根据条件求出M的坐标，利用直线MN的斜率为$\frac{3}{4}$，建立关于a，c的方程即可求C的离心率；

（2）根据直线MN在y轴上的截距为2，以及$|MN|=5|F_1N|$，建立方程组关系，求出N的坐标，代入椭圆方程即可得到结论．

【解答】解：（1）∵M是C上一点且MF_2与x轴垂直，

∴M的横坐标为c，当x=c时，$y=\frac{b^2}{a}$，即M（c，$\frac{b^2}{a}$），

若直线MN的斜率为$\frac{3}{4}$，

即$\tan\angle MF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{3}{4}$，

即$b^2=\frac{3}{2}ac=a^2-c^2$，

即$c^2+\frac{3}{2}ac-a^2=0$，

则$e^2+\frac{3}{2}e-1=0$，

即$2e^2+3e-2=0$

解得$e=\frac{1}{2}$或$e=-2$（舍去），

即$e=\frac{1}{2}$．

（Ⅱ）由题意，原点O是F_1F_2的中点，则直线MF_1与y轴的交点D（0，2）是线段MF_1的中点，

设M（c，y），（y＞0），

则$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即$y^2=\frac{b^4}{a^2}$，解得$y=\frac{b^2}{a}$，

∵OD是$\triangle MF_1F_2$的中位线，

$\therefore\frac{b^2}{a}=4$，即$b^2=4a$，

由$|MN|=5|F_1N|$，

则$|MF_1|=4|F_1N|$，

解得$|DF_1|=2|F_1N|$，

即$\overrightarrow{DF_1}=2\overrightarrow{F_1N}$

设N（x_1，y_1），由题意知$y_1<0$，

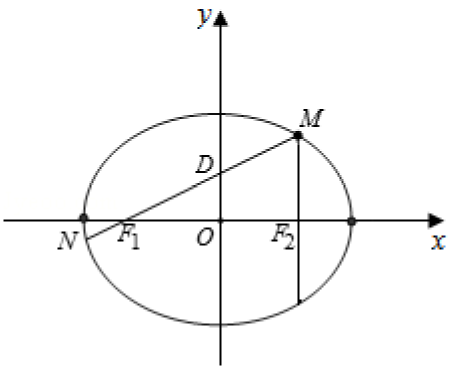
则（－c，－2）=2（x_1+c，y_1）．

即$\begin{cases}2(x_1+c)=-c\\2y_1=-2\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}c\\y_1=-1\end{cases}$

代入椭圆方程得$\frac{9c^2}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

将$b^2=4a$代入得$\frac{9(a^2-4a)}{4a^2}+\frac{1}{4a}=1$，

解得a=7，b=$2\sqrt{7}$.



【点评】本题主要考查椭圆的性质，利用条件建立方程组，利用待定系数法是解决本题的关键，综合性较强，运算量较大，有一定的难度.

21．（12分）已知函数f（x）=$e^x-e^{-x}-2x$.

（Ⅰ）讨论f（x）的单调性；

（Ⅱ）设g（x）=f（2x）－4bf（x），当x>0时，g（x）>0，求b的最大值；

（Ⅲ）已知$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计ln2的近似值（精确到0.001）.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用．

【分析】对第（Ⅰ）问，直接求导后，利用基本不等式可达到目的；

对第（Ⅱ）问，先验证g（0）=0，只需说明g（x）在[0+∞）上为增函数即可，

从而问题转化为"判断g′（x）＞0是否成立"的问题；

对第（Ⅲ）问，根据第（Ⅱ）问的结论，设法利用$\sqrt{2}$的近似值，并寻求ln2，

于是在b=2及b＞2的情况下分别计算$g(\ln\sqrt{2})$，最后可估计ln2的近似值．

【解答】解：（Ⅰ）由f（x）得f′（x）=$e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，

即f′（x）≥0，当且仅当$e^x=e^{-x}$即x=0时，f′（x）=0，

∴函数f（x）在R上为增函数．

（Ⅱ）g（x）=f（2x）﹣4bf（x）=$e^{2x}-e^{-2x}-4b(e^x-e^{-x})+(8b-4)x$，

则g′（x）=$2[e^{2x}+e^{-2x}-2b(e^x+e^{-x})+(4b-2)]$

$=2[(e^x+e^{-x})^2-2b(e^x+e^{-x})+(4b-4)]$

$=2(e^x+e^{-x}-2)(e^x+e^{-x}+2-2b)$．

①∵$e^x+e^{-x}>2$，$e^x+e^{-x}+2>4$，

∴当2b≤4，即b≤2时，g′（x）≥0，当且仅当x=0时取等号，

从而g（x）在R上为增函数，而g（0）=0，

∴x＞0时，g（x）＞0，符合题意．

②当b＞2时，若x满足$2<e^x+e^{-x}<2b-2$即$\begin{cases}2<e^x+e^{-x}\\e^x+e^{-x}<2b-2\end{cases}$，得

$\ln(b-1-\sqrt{b^2-2b})<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$，此时，g′（x）＜0，

又由g（0）=0知，当$0<x\leqslant\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$时，g（x）＜0，不符合题意．

综合①、②知，b≤2，得b的最大值为2．

（Ⅲ）∵$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，根据（Ⅱ）中g（x）=$e^{2x}-e^{-2x}-4b(e^x-e^{-x})+(8b-4)x$，

为了凑配ln2，并利用$\sqrt{2}$的近似值，故将$\ln\sqrt{2}$即$\frac{1}{2}\ln 2$代入g（x）的解析式中，

得$g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-2\sqrt{2}b+2(2b-1)\ln 2$.

当b=2时，由g（x）>0，得$g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-4\sqrt{2}+6\ln 2>0$，

从而$\ln 2>\frac{8\sqrt{2}-3}{12}>\frac{8\times 1.4142-3}{12}=0.6928$；

令$\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})=\ln\sqrt{2}$，得$b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+1>2$，当$0<x\leqslant\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$时，

由g（x）<0，得$g(\ln\sqrt{2})=-\frac{3}{2}-2\sqrt{2}+(3\sqrt{2}+2)\ln 2<0$，得

$$\ln 2<\frac{18+\sqrt{2}}{28}<\frac{18+1.4143}{28}<0.6934.$$

所以ln2的近似值为0.693.

【点评】1．本题三个小题的难度逐步增大，考查了学生对函数单调性深层次的把握能力，对思维的要求较高，属压轴题．

2．从求解过程来看，对导函数解析式的合理变形至关重要，因为这直接影响到对导数符号的判断，是解决本题的一个重要突破口．

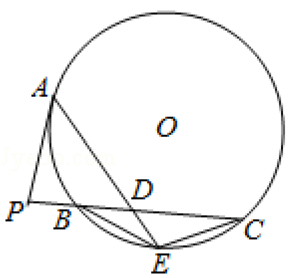
3．本题的难点在于如何寻求ln2，关键是根据第（2）问中g（x）的解析式探究b的值，从而获得不等式，这样自然地将不等式放缩为$\sqrt{2}$的范围的端点值，达到了估值的目的．

请考生在第22、23、24三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，作答时请写清题号.【选修4-1：几何证明选讲】

22．（10分）如图，P是⊙O外一点，PA是切线，A为切点，割线PBC与⊙O相交于点B，C，PC=2PA，D为PC的中点，AD的延长线交⊙O于点E，证明：

（Ⅰ）BE=EC；

（Ⅱ）AD•DE=2PB^2.



【考点】N4：相似三角形的判定；NC：与圆有关的比例线段．

【专题】17：选作题；5Q：立体几何．

【分析】（Ⅰ）连接OE，OA，证明OE⊥BC，可得E是$\overset{\frown}{BC}$的中点，从而BE=EC；

（Ⅱ）利用切割线定理证明PD=2PB，PB=BD，结合相交弦定理可得AD•DE=$2PB^2$.

【解答】证明：（Ⅰ）连接OE，OA，则∠OAE=∠OEA，∠OAP=90°，

∵PC=2PA，D为PC的中点，

∴PA=PD，

∴∠PAD=∠PDA，

∵∠PDA=∠CDE，

∴∠OEA+∠CDE=∠OAE+∠PAD=90°，

∴OE⊥BC，

∴E是$\overset{\frown}{BC}$的中点，

∴BE=EC；

（Ⅱ）∵PA是切线，A为切点，割线PBC与⊙O相交于点B，C，

∴PA^2=PB•PC，

∵PC=2PA，

∴PA=2PB，

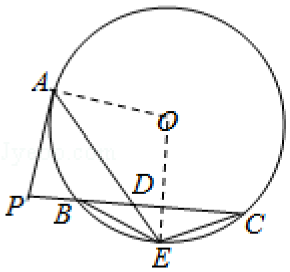
∴PD=2PB，

∴PB=BD，

∴BD•DC=PB•2PB，

∵AD•DE=BD•DC，

∴AD•DE=$2PB^2$.



【点评】本题考查与圆有关的比例线段，考查切割线定理、相交弦定理，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

【选修4-4：坐标系与参数方程】

23．在直角坐标系xOy中，以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，半圆C的极坐标方程为ρ=2cosθ，θ∈$[0，\frac{\pi}{2}]$

（Ⅰ）求C的参数方程；

（Ⅱ）设点D在半圆C上，半圆C在D处的切线与直线l：$y=\sqrt{3}x+2$垂直，根据（1）中你得到的参数方程，求直线CD的倾斜角及D的坐标．

【考点】QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（1）利用$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\x=\rho\cos\theta\end{cases}$即可得出直角坐标方程，利用$\cos^2t+\sin^2t=1$进而得出参数方程．

（2）利用半圆C在D处的切线与直线l：$y=\sqrt{3}x+2$垂直，则直线CD的斜率与直线l的斜率相等，即可得出直线CD的倾斜角及D的坐标．

【解答】解：（1）由半圆C的极坐标方程为ρ=2cosθ，θ∈$[0，\frac{\pi}{2}]$，即$\rho^2=2\rho\cos\theta$，可得C的普通方程为$(x-1)^2+y^2=1$（$0\le y\le1$）．

可得C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos t\\y=\sin t\end{cases}$（t为参数，$0\le t\le\pi$）．

（2）设D（1+cos t，sin t），由（1）知C是以C（1，0）为圆心，1为半径的上半圆，

∵直线CD的斜率与直线l的斜率相等，∴$\tan t=\sqrt{3}$，$t=\frac{\pi}{3}$．

故D的直角坐标为$(1+\cos\frac{\pi}{3}，\sin\frac{\pi}{3})$，即$(\frac{3}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$．

【点评】本题考查了把极坐标方程化为直角坐标方程、参数方程化为普通方程、直线与圆的位置关系，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

六、解答题（共1小题，满分0分）

24．设函数$f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|$（a>0）．

（Ⅰ）证明：f（x）≥2；

（Ⅱ）若f（3）<5，求a的取值范围．

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）由a>0，$f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|$，利用绝对值三角不等式、基本不等式证得f（x）≥2成立．

（Ⅱ）由$f(3)=|3+\frac{1}{a}|+|3-a|<5$，分当a>3时和当0<a≤3时两种情况，分别去掉绝对值，求得不等式的解集，再取并集，即得所求．

【解答】解：（Ⅰ）证明：∵a>0，$f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|\geq|(x+\frac{1}{a})-(x-a)|=|a+\frac{1}{a}|=a+\frac{1}{a}\geq2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$，

故不等式f（x）≥2成立．

（Ⅱ）∵$f(3)=|3+\frac{1}{a}|+|3-a|<5$，

∴当a>3时，不等式即$a+\frac{1}{a}<5$，即$a^2-5a+1<0$，解得$3<a<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$．

当0<a≤3时，不等式即$6-a+\frac{1}{a}<5$，即$a^2-a-1>0$，求得$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<a\leq3$．

综上可得，a的取值范围$(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2})$．

【点评】本题主要考查绝对值三角不等式，绝对值不等式的解法，体现了转化、分类讨论的数学思想，属于中档题．