2000年江西高考理科数学真题及答案

一、 选择题：本大题共12小题；第每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1） 设集合A和B都是坐标平面上的点集$\{(x,y)|x\in R,y\in R\}$，映射$f:A\to B$把集合A中的元素(x,y)映射成集合B中的元素$(x+y,x-y)$，则在映射f下，象$(2,1)$的原象是

（A）$(3,1)$ （B）$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ （C）$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ （D）$(1,3)$

（2） 在复平面内，把复数$3-\sqrt{3}i$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，所得向量对应的复数是

（A）$2\sqrt{3}$ （B）$-2\sqrt{3}i$ （C）$\sqrt{3}-3i$ （D）$3+\sqrt{3}i$

（3） 一个长方体共一项点的三个面的面积分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是

（A）$2\sqrt{3}$ （B）$3\sqrt{2}$ （C）6 （D）$\sqrt{6}$

（4）设a、b、c是任意的非零平面向量，且相互不共线，则

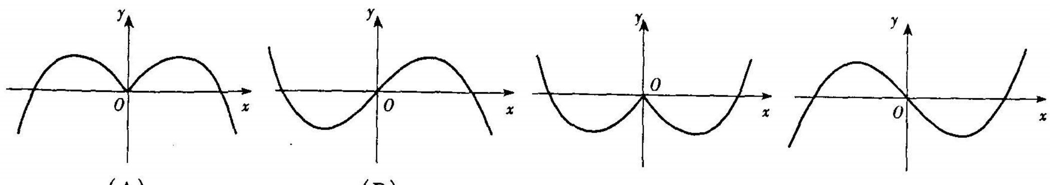
①$(a\cdot b)c-(c\cdot a)b=0$； ②$|a|-|b|<|a-b|$

③$(b\cdot c)a-(c\cdot a)b$不与c垂直 ④$(3a+2b)\cdot(3a-2b)=9|a|^2=4|b|^2$

中，是真命题的有

（A）①② （B）②③ （C）③④ （D）②④

（5）函数$y=-x\cos x$的部分图象是



(A) (B) (C) (D)

（6）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过800元的部分不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额。此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过500元的部分	5%

超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

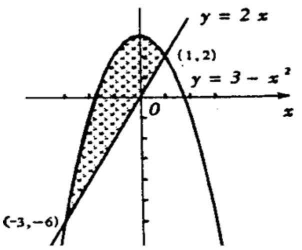
（A） 800~900 元　　（B）900~1200 元

（C）1200~1500 元　　（D）1500~2800 元

（7）若 $a>b>1$，P=$\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，Q=$\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，R=$\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则

（A）R＜P＜Q　　（B）P＜Q ＜R

（C）Q ＜P＜R　　（D）P ＜R＜Q



（8）右图中阴影部分的面积是

（A） $2\sqrt{3}$　　（B） $9-2\sqrt{3}$

（C） $\frac{32}{3}$　　（D） $\frac{35}{3}$

（9）一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是

（A） $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　（B） $\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　（C） $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　（D） $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

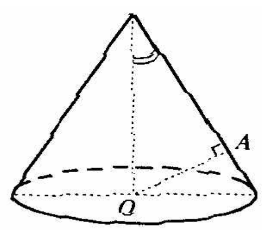
（10）过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是

（A） $y=\sqrt{3}x$　　（B） $y=-\sqrt{3}x$　　（C） $\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　（D） $-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

（11）过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一条直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于

（A） $2a$　　（B） $\frac{1}{2a}$　　（C） $4a$　　（D） $\frac{4}{a}$

（12）如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为



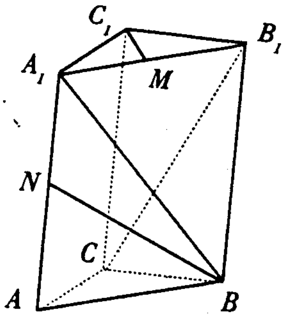
（A） $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　（B） $\arccos\frac{1}{2}$

（C） $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　（D） $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

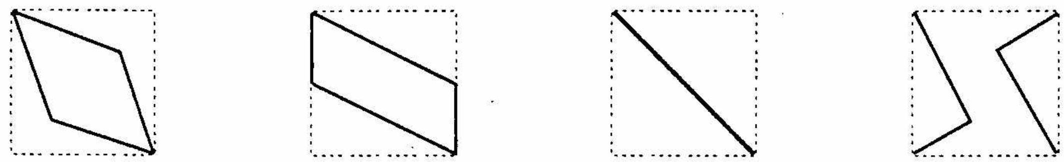
二、填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

（13）某厂生产电子元件，其产品的次品率为 5%，现从一批产品中任意地连续取出 2 件，其中次品 ξ 的概率分布是

ξ	0	1	2
p			



（14）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角



①　　　　②　　　　③　　　　④

（16）如图，E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_______。（要求：把可能的图的　　序号都填上）

三、解答题：本大题共 6 小题；共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 10 分）

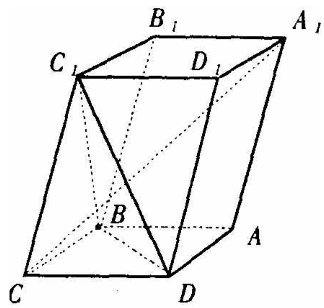
甲、乙二人参加普法知识竞答，共有 10 个不同的题目，其中选择题 6 个，判断题 4 个。甲、乙二人依次各抽一题。

（I）甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少？

（II）甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少？

（18 甲）（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$，底面 Δ ABC 中，CA=CB=1，BCA=90°，棱 AA_1=2，M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点。



（I）求 $\overrightarrow{BN}$ 的长；

（II）求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{CB_1}>$ 的值；

（III）求证 $A_1B\perp C_1M$。

（18 乙）（本小题满分 12 分）

如图,已知平行六面体 ABCD- $A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD

是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle BCD=60^\circ$。

（I）证明：$C_1C\perp$BD;

（II）假定 CD=2，$C_1C=\frac{3}{2}$，记面C_1BD为α，面

CBD 为β，求二面角 $\alpha-BD-\beta$的平面角的余弦值;

（III）当$\frac{CD}{CC_1}$的值为多少时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD？请给出证明。

（19）（本小题满分 12 分）

设函数$f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中$a>0$。

（I）解不等式$f(x)\le 1$;

（II）求a的取值范围，使函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数。

（20）（本小题满分 12 分）

用总长 14.8m 的钢条制成一个长方体容器的框架，如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5m，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积。

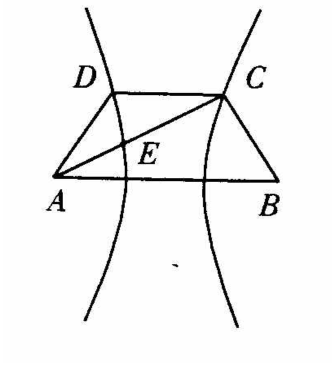
（21）（本小题满分 12 分）

（I）已知数列$\{c_n\}$，其中$c_n=2^n+3^n$，且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列，求常数p。

（II）设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明数列$\{c_n\}$不是等比数列。

（22）（本小题满分 14 分）

如图，已知梯形 ABCD 中$|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段$\overline{AC}$所成的比为λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点。当$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$时，求双曲线离心率$e$的取值范围。



参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 60 分。

（1）B　（2）B　（3）C　（4）D　（5）D
（6）C　（7）B　（8）C　（9）A　（10）C
（11）C　（12）D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 16 分。

（13）

ξ	0	1	2
P	0.9025	0.095	0.0025

（14）$-\frac{3}{\sqrt{5}}<x<\frac{3}{\sqrt{5}}$　（15）$\frac{1}{n}$　（16）②③

三、解答题

（5）本小题主要考查等可能事件的概率计算及分析和解决实际问题的能力。满分 10 分。

解：(I) 甲从选择题中抽到一题的可能结果有 C_6^1 个，乙依次从判断题中抽到一题的可能结果有 C_4^1 个，故甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的可能结果有 $C_6^1\ C_4^1$ 个；又甲、乙依次抽一题的可能结果有概率为 $C_{10}^1\ C_9^1$ 个，所以甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的概率为 $\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{4}{15}$，所求概率为 $\frac{4}{15}$；

——5 分

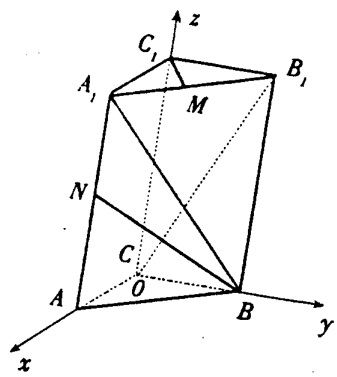
（II）甲、乙二人依次都抽到判断题的概率为$\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}$，故甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率为$1-\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{13}{15}$，所求概率为$\dfrac{13}{15}$。

或 $\dfrac{C_6^1C_5^1}{C_{10}^1C_9^1}+\dfrac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}+\dfrac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{13}{15}$，所求概率为$\dfrac{13}{15}$。

——10 分

（18 甲）本小题主要考查空间向量及运算的基本知识。满分 12 分。

如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$。



（I）解：依题意得 B$(0,1,0)$，N$(1,0,1)$，

$\therefore\ \left|\overrightarrow{BN}\right|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$ ——2 分

（II）解：依题意得 $A_1(1,0,2)$，B$(0,1,0)$，C$(0,0,0)$，$B_1(0,1,2)$。

$\therefore\ \overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$。

$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=3$。$\left|\overrightarrow{BA_1}\right|=\sqrt{6}$，$\left|\overrightarrow{CB_1}\right|=\sqrt{5}$ ——5 分

$\therefore\ \cos<\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}>=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{\left|\overrightarrow{BA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB_1}\right|}=\dfrac{1}{10}\sqrt{30}$ ——9 分

（III）证明：依题意得 $C_1(0,0,2)$，M$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2\right)$

$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{C_1M}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，

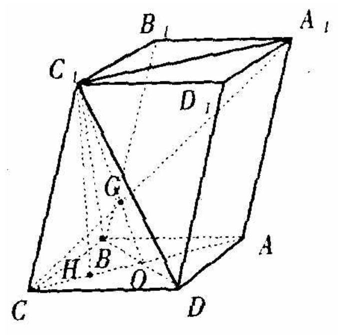
$\therefore\ \overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+0=0$，$\therefore\ \overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{C_1M}$ ——12 分

（18 乙）本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系，逻辑推理能力。满分

12 分。

（I）证明：连结 A_1C_1、AC，AC 和 BD 交于 O，连结 C_1O。

∵ 四边形 ABCD 是菱形，



∴ AC⊥BD，BC=CD。

又∵ $\angle BCC_1 = \angle DCC_1, C_1C = C_1C$，

∴ $\Delta C_1BC \cong \Delta C_1DC$，

∴ $C_1B = C_1D$，

∵ DO=OB，

∴ $C_1O \perp$ BD，——2 分

但 AC⊥BD，AC∩C_1O=O，

∴ BD⊥平面 AC_1。

又 $C_1C \subset$ 平面 AC_1，

∴ $C_1C \perp$ BD。——4 分

（II）解：由（I）知 AC⊥BD，$C_1O \perp$ BD，

∴ $\angle C_1OC$ 是平面角 $\alpha - BD - \beta$ 的平面角。

在 ΔC_1BC 中，BC=2，$C_1C = \frac{3}{2}$，$\angle BCC_1 = 60^\circ$，

∴ $C_1B^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times 2\times\frac{3}{2}\times\cos 60^\circ = \frac{13}{4}$。——6 分

∵ ∠OCB=30°，

∴ OB=$\frac{1}{2}$BC=1。

∴ $C_1O^2 = C_1B^2 - OB^2 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4}$，

∴ $C_1O = \frac{3}{2}$ 即 $C_1O = C_1C$。

作 $C_1H \perp$ OC，垂足为 H。

∴ 点 H 是 OC 的中点，且 OH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\cos\angle C_1OC=\frac{OH}{C_1O}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。 ——8 分

（III）当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD。

证明一：

∵ $\frac{CD}{CC_1}=1$，

∴ BC=CD=C_1C，

又 $\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD$，

由此可推得 BD=$C_1B=C_1D$。

∴ 三棱锥 C- C_1BD 是正三棱锥。 ——10 分

设 A_1C 与 C_1O 相交于 G。

∵ A_1C_1 ∥AC，且 A_1C_1 ∶OC=2∶1，

∴ A_1G ∶GO=2∶1。

又 C_1O 是正三角形 C_1BD 的 BD 边上的高和中线，

∴ 点 G 是正三角形 C_1BD 的中心，

∴ CG⊥平面 C_1BD。

即 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD。 ——12 分

证明二：

由（I）知，BD⊥平面 AC_1，

∵ $A_1C\subset$ 平面 AC_1，∴ BD⊥ A_1C。 ——10 分

当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，平行六面体的六个面是全等的菱形，

同 BD⊥ A_1C 的证法可得 $BC_1\perp A_1C$。

又 BD∩ BC_1 =B，

∴ $A_1C\perp$平面C_1BD。 ——12 分

（19）本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识、分类讨论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：（I）不等式$f(x)\le 1$即

$$\sqrt{x^2+1}\le 1+ax,$$

由此可得$1\le 1+ax$，即$ax\ge 0$，其中常数$a>0$。

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\le (1+ax)^2,\\ x\ge 0\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x\ge 0\\ (a^2-1)x+2a\ge 0\end{cases}$$ ——3 分

所以，当$0<a<1$时，所给不等式的解集为$\left\{x\mid 0\le x\le \dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$；

当$a\ge 1$时，所给不等式的解集为$\{x\mid x\ge 0\}$。 ——6 分

（II）在区间$[0,+\infty)$上任取x_1，x_2，使得$x_1<x_2$。

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right)。$$ ——8 分

（i） 当$a\ge 1$时，

∵ $$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1,$$

∴ $$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0\ ,$$

又 $x_1-x_2<0$，

∴ $f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$。

所以，当 $a \ge 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数。 ——10 分

（ii）当 $0 < a < 1$ 时，在区间 $[0,+\infty)$ 上存在两点 $x_1 = 0$，$x_2 = \dfrac{2a}{1-a^2}$，满足

$f(x_1)=1$，$f(x_2)=1$，即 $f(x_1)=f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数。

综上，当且仅当 $a \ge 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数。——12 分

（20）本小题主要考查应用所学导数的知识、思想和方法解决实际问题的能力，建立函数式、解方程、不等式、最大值等基础知识。满分 12 分。

解：设容器底面短边长为 x m，则另一边长为 $(x+0.5)$ m，高为

$$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$$

由 $3.2-2x>0$ 和 $x>0$，得 $0<x<1.6$，

设容器的容积为 ym^3，则有

$$y=x(x+0.5)(3.2-2x) \quad (0<x<1.6)$$

整理，得

$y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$， ——4 分

$\therefore\ y'=-6x^2+4.4x+1.6$ ——6 分

令 $y'=0$，有

$$-6x^2+4.4x+1.6=0,$$

即 $15x^2-11x-4=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{4}{15}$（不合题意，舍去）。 ——8 分

从而，在定义域（0，1，6）内只有在 $x=1$ 处使 $y'=0$。由题意，若 x 过小（接近 0）或过大（接受 1.6）时，y 值很小（接近 0)，因此，当 $x=1$ 时 y 取得最大值

$$y_{\text{最大值}}=-2+2.2+1.6=1.8,$$

这时，高为 $3.2-2\times1=1.2$。

答：容器的高为 1.2m 时容积最大，最大容积为 $1.8m^3$。 ——12 分

（21）本小题主要考查等比数列的概念和基本性质，推理和运算能力。满分 12 分。

解：（I）因为$\{c_{n+1}-pc_n\}$是等比数列，故有

$$(c_{n+1}-pc_n)^2=(c_{n+2}-pc_{n+1})(c_n-pc_{n-1}),$$

将$c_n=2^n+3^n$代入上式，得

$$\left[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)\right]^2$$

$$=\left[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^{n+1}+3^{n+1})\right]^2\cdot\left[2^n+3^n-p(2^{n-1}+3^{n-1})\right], \qquad ——3 分$$

即 $$\left[(2-p)2^n+(3-p)3^n\right]^2$$

$$=\left[(2-p)2^{n+1}+(3-p)3^{n+1}\right]\left[(2-p)2^{n-1}+(3-p)3^{n-1}\right],$$

整理得 $\frac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot 2^n\cdot 3^n=0$，

解得 p=2 或 p=3。 ——6 分

（II）设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的公比分别为p、q，$c_n=a_n+b_n$

为证$\{c_n\}$不是等比数列只需证$c_2^2\neq c_1\cdot c_3$。

事实上， $c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$，

$$c_1\cdot c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)。$$

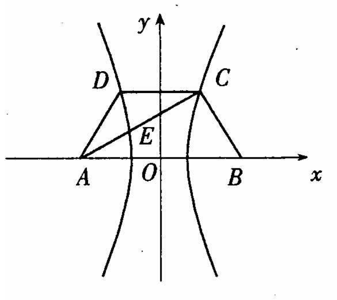
由于 $p\neq q$，$p^2+q^2>2pq$，又a_1、b_1不为零，

因此，$c_2^2\neq c_1\cdot c_3$，故$\{c_n\}$不是等比数列。 ——12 分

（22）本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合运用数学知识解决问题的能力。满分 14 分。

解：如图，以 AB 为垂直平分线为y轴，直线 AB 为x轴，建立直角坐标系xOy，则 CD ⊥y轴。因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于y轴对称。 ——2 分

依题意，记 A$(-c,0)$，C$\left(\frac{c}{2},h\right)$，E$(x_0,y_0)$，其中$c=\frac{1}{2}|AB|$为双曲线的半焦距，$h$是梯形的高。



由定比分点坐标公式得

$$x_0=\frac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)},$$

$$y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}$$

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则离心率$e=\frac{c}{a}$。

由点 C、E 在双曲线上，将点 C、E 的坐标和$e=\frac{c}{a}$代入双曲线方程得

$$\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{e^2}{4}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

——7 分

由①式得 $$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1, \qquad ③$$

将③式代入②式，整理得

$$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda,$$

故 $$\lambda=1-\frac{3}{e^2+1}。$$ ——10 分

由题设$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$得，$\frac{2}{3}\le 1-\frac{3}{e^2+2}\le\frac{3}{4}$。

解得 $$\sqrt{7}\le e\le\sqrt{10}$$

所以双曲线的离心率的取值范围为$\left[\sqrt{7},\sqrt{10}\right]$。 ——14 分