

绝密★启用前

2005年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（ $4 \times 12 = 48$ ）

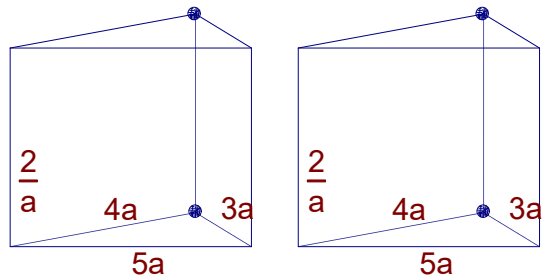
1. 函数 $f(x) = \log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____
2. 方程 $4^x + 2^x - 2 = 0$ 的解是 _____
3. 直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overline{OP} \cdot \overline{OA} = 4$ ，则点P的轨迹方程是 _____
4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中， x^7 的系数是15，则实数 $a =$ _____
5. 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 3x$ ，它的一个焦点是 $(\sqrt{10}, 0)$ ，则双曲线的方程是 _____
6. 将参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程，所得方程是 _____
7. 计算： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 2^{n+1}} =$ _____
8. 某班有50名学生，其15人选修A课程，另外35人选修B课程从班级中任选两名学生，他们是选修不同课程的学生的概率是 _____（结果用分数表示）
9. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 120^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 7$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S =$ _____
10. 函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$ $x \in [0, 2\pi]$ 的图像与直线 $y = k$ 又且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是 _____

11. 有两个相同的直三棱柱，高为 $\frac{2}{a}$ ，底面三

角形的三边长分别为 $3a$ 、 $4a$ 、 $5a$ ($a > 0$)

用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的一个是四棱柱，

则 a 的取值范围是 _____



12. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, \dots, a_n 可得到 $n!$ 个

不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵对第 i 行 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ，记

$$b_i = -a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} + \dots + (-1)^n na_{in}$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n!$) 例如：用 1, 2, 3 可得数阵如下，由于此数阵中每一列各数之

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

和都是12, 所以, $b_1 + b_2 + \dots + b_6 = -12 + 2 \times 12 - 3 \times 12 = -24$ 那么, 在用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中, $b_1 + b_2 + \dots + b_{120} =$ _____

二、选择题 (4×4=16)

13. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$, 则该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上是

- (A) 单调递减无最小值 (B) 单调递减有最小值
(C) 单调递增无最大值 (D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M = \{x \mid |x-1| \leq 2, x \in R\}$, $P = \left\{x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in Z\right\}$, 则 $M \cap P$ 等于

- (A) $\{x \mid 0 < x \leq 3, x \in Z\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in Z\}$
(C) $\{x \mid -1 \leq x \leq 0, x \in Z\}$ (D) $\{x \mid -1 \leq x < 0, x \in Z\}$

15. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于A、B两点, 它们的横坐标之和等于5, 则这样的直线

- (A) 又且仅有一条 (B) 有且仅有两条
(C) 有无穷多条 (D) 不存在

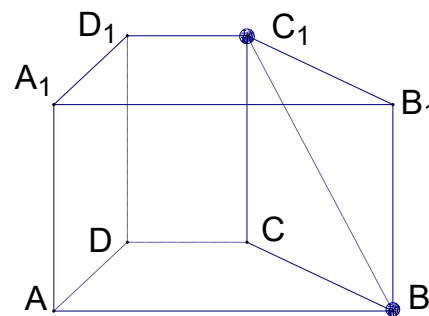
16. 设定义域为 R 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 则关于 x 的方程

$f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有7个不同的实数解得充要条件是

- (A) $b < 0$ 且 $c > 0$ (B) $b > 0$ 且 $c < 0$
(C) $b < 0$ 且 $c = 0$ (D) $b \geq 0$ 且 $c = 0$

三、解答题

17. 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 2$, $DC = 1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成的角的大小 (结果用反三角函数表示)



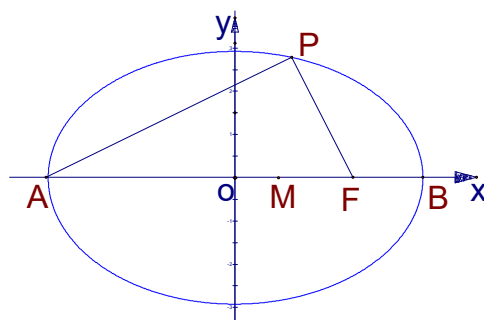
18. 证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2 + (1-i)\bar{z} - (1+i)z = \frac{5-5i}{2+i}$ (i 为虚数单位) 无解

19. 点A、B分别是椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 长轴的左、右焦点, 点F是椭圆的右焦点点P在椭圆上,

且位于x轴上方, $PA \perp PF$

(1) 求P点的坐标;

(2) 设M是椭圆长轴AB上的一点，M到直线AP的距离等于 $|MB|$ ，求椭圆上的点到点M的距离d的最小值



20. 假设某市2004年新建住房400万平方米，其中有250万平方米是中低价房预计在今后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长8%，另外，每年新建住房中，中低价房的面积均比上一年增加50万平方米那么，到那一年底，

- (1) 该市历年所建中低价房的累计面积（以2004年为累计的第一年）将首次不少于4750万平方米？
- (2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%？

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分6分

对定义域是 $D_f \cdot D_g$ 的函数 $y = f(x) \cdot y = g(x)$,

$$\text{规定: 函数 } h(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \in D_g \\ f(x), & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \notin D_g \\ g(x), & \text{当 } x \notin D_f \text{ 且 } x \in D_g \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题(1)中函数 $h(x)$ 的值域;

(3) 若 $g(x) = f(x + \alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 \mathbb{R} 的

函数 $y = f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x) = \cos 4x$, 并予以证明

22.在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\dots, P_n(n,2^n)$, 其中 n 是正整数对平面上任一点 A_0 , 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, \dots, A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点

(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标;

(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时, 点 A_2 的轨迹是函数 $y = f(x)$ 的图像, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x \in (0,3]$ 时, $f(x) = \lg x$ 求以曲线 C 为图像的函数在 $(1,4]$ 上的解析式;

(3) 对任意偶数 n , 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标

