

2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B = ()$

- A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 2]$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z = 2$, 则 $z = ()$

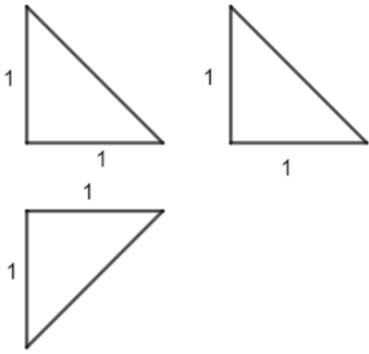
- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1-i$ D. $1+i$

3.

已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 $()$

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为 $()$



- A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ B. 4 C. $3+\sqrt{3}$ D. 2

5. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 且离心率为 2, 则该双曲线的标准方程为 $()$

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{\sqrt{3}y^2}{3} = 1$ D. $\frac{\sqrt{3}x^2}{3} - y^2 = 1$

6. $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，其中 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 为常值, $a_1 = 288$, $a_5 = 96$, $b_1 = 192$, 则 $b_3 = ()$

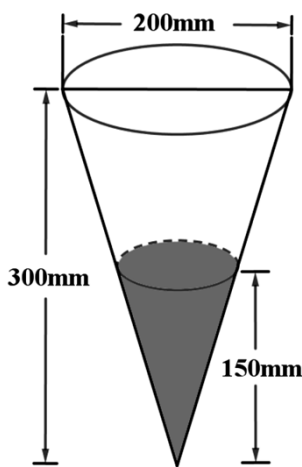
)

- A. 64 B. 128 C. 256 D. 512

7. 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$ ，试判断函数的奇偶性及最大值 ()

- A. 奇函数，最大值为2 B. 偶函数，最大值为2
C. 奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$ D. 偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度 (mm) 来判断降雨程度。其中小雨 (<10mm)，中雨 (10mm-25mm)，大雨 (25mm-50mm)，暴雨 (50mm-100mm)，小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级 ()



- A. 小雨 B. 中雨 C. 大雨 D. 暴雨

9. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ ，直线 $l: y = kx + m$ ，当 k 变化时， l 截得圆 C 弦长的最小值为2，则 $m =$ ()

- A. ± 2 B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{5}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列，且 $a_1 \geq 3$ ， $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 100$ ，则 n 的最大值为 ()

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

第二部分 (非选择题共110分)

二、填空题5小题，每小题5分，共25分.

11. $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为_____.

12.

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，焦点为 F ，点 M 为抛物线 C 上的点，且 $|FM| = 6$ ，则 M 的横坐标是_____；

作 $MN \perp x$ 轴于 N ，则 $S_{\triangle FMN} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$, $\vec{c} = (0, 1)$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称, 写出一个符合题意的 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

- ①若 $k = 0$, 则 $f(x)$ 有两个零点;
- ② $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有一个零点;
- ③ $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点;
- ④ $\exists k > 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论得序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共6小题，共85分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

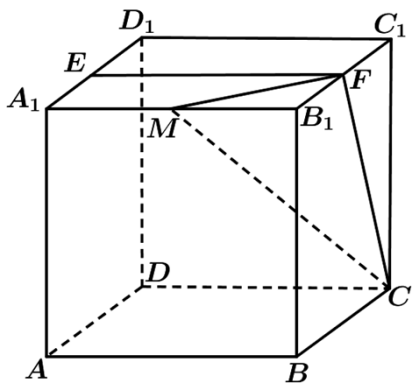
16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $C = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求出 BC 边上的中线的长度.

- ① $c = \sqrt{2}b$; ② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$;

17. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 为 A_1D_1 中点, 直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .



(1) 证明：点 F 为 B_1C_1 的中点；

(2) 若点 M 为棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

18.

为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“ k 合1检测法”，即将 k 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测. 现有100人，已知其中2人感染病毒.

(1) ①若采用“10合1检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知10人分成一组，分10组，两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$ ，定义随机变量 X 为总检测次数，求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(2) 若采用“5合1检测法”，检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$ ，试比较 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小(直接写出结果).

19. 已知函数 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$ ，求 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间，以及最大值和最小值.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(0, -2)$ ，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 过点 $P(0, -3)$ 的直线 l 斜率为 k ，交椭圆 E 于不同的两点 B, C ，直线 AB, AC 交 $y=-3$ 于点 M, N ，直线 AC 交 $y=-3$ 于点 N ，若 $|PM|+|PN| \leq 15$ ，求 k 的取值范围.

21. 定义 R_p 数列 $\{a_n\}$ ：对实数 p ，满足：① $a_1 + p \geq 0, a_2 + p = 0$ ；② $\forall n \in N^*, a_{4n-1} < a_{4n}$ ；③

$$a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}, m, n \in N^*.$$

(1) 对于前4项2, -2, 0, 1的数列，可以是 R_2 数列吗？说明理由；

(2) 若 $\{a_n\}$ 是 R_0 数列，求 a_5 的值；

(3) 是否存在 p ，使得存在 R_p 数列 $\{a_n\}$ ，对 $\forall n \in N^*, S_n \geq S_{10}$ ？若存在，求出所有这样的 p ；若不存在，说明理由.