

绝密★启用前

## 2009年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

### 数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

#### 一. 真空题

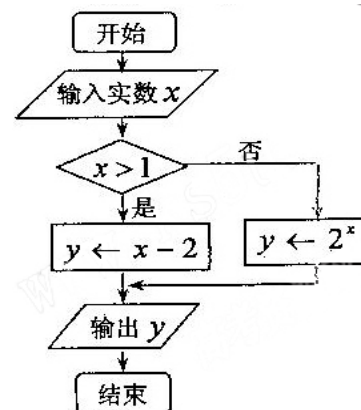
（本大题满分56分）本大题有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 若复数  $z$  满足  $z(1+i)=1-i$  ( $i$  是虚数单位), 则其共轭复数  $\bar{z} =$  \_\_\_\_\_.
2. 已知集合  $A = \{x | x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x \geq a\}$ , 且  $A \cup B = R$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

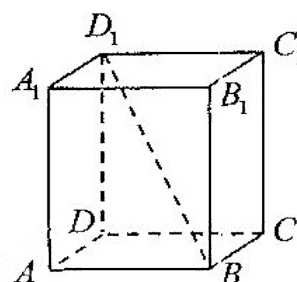
3. 若行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  中, 元素4的代数余子式大于0,

则  $x$  满足的条件是 \_\_\_\_\_.

4. 某算法的程序框如右图所示, 则输出量  $y$  与输入量  $x$  满足的关系式是 \_\_\_\_\_.



5. 如图, 若正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为2, 高为4, 则异面直线  $BD_1$  与  $AD$  所成角的大小是 \_\_\_\_\_ (结果



用反三角函数表示)。

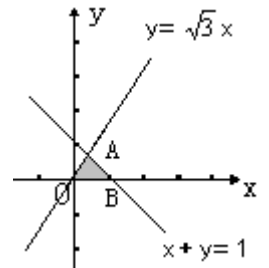
6. 函数  $y = 2 \cos^2 x + \sin 2x$  的最小值是\_\_\_\_\_。

7. 某学校要从5名男生和2名女生中选出2人作为上海世博会志愿者，若用随机变量  $\xi$  表示选出的志愿者中女生的人数，则数学期望  $E\xi$  \_\_\_\_\_ (结果用最简分数表示)。

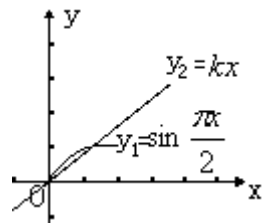
8. 已知三个球的半径  $R_1, R_2, R_3$  满足  $R_1 + 2R_2 = 3R_3$ ，则它们的表面积  $S_1, S_2, S_3$ ，满足的等量关系是\_\_\_\_\_。

9. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点， $P$  为椭圆  $C$  上一点，且  $\overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$ 。若  $\Delta PF_1F_2$  的面积为9，则  $b =$ \_\_\_\_\_。

10. 在极坐标系中，由三条直线  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$  围成图形的面积是\_\_\_\_\_。



11. 当  $0 \leq x \leq 1$  时，不等式  $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$  成立，则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_。



12. 已知函数  $f(x) = \sin x + \tan x$ . 项数为27的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且公差  $d \neq 0$ . 若  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{27}) = 0$ ，则当  $k =$ \_\_\_\_\_是， $f(a_k) = 0$ .

13. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状，相邻街距都为1. 两街道相交的点称为格点。若以互相垂直的两条街道为轴

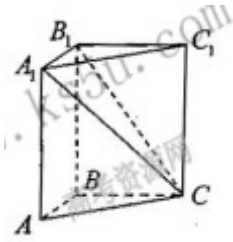


三. 解答题 (本大题满分78分) 本大题共5题, 解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤

19 (本题满分14分)

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = BC = AB = 2$ ,

$AB \perp BC$ , 求二面角  $B_1 - A_1C - C_1$  的大小.



20 (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分。

有时可用函数

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 + 15 \ln \frac{a}{a-x}, & (x \leq 6) \\ \frac{x-4.4}{x-4}, & (x > 6) \end{cases}$$

描述学习某学科知识的掌握程度, 其中  $x$  表示某学科知识的学习次数 ( $x \in \mathbb{N}^*$ ),  $f(x)$  表示对该学科知识的掌握程度, 正实数  $a$  与学科知识有关。

- (1) 证明: 当  $x \geq 7$  时, 掌握程度的增加量  $f(x+1) - f(x)$  总是下降;
- (2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的  $a$  的取值区间分别为  $(115, 121]$ ,  $(121, 127]$ ,  $(121, 133]$ 。当学习某学科知识6次时, 掌握程度是85%, 请确定相应的学科。

21. (本题满分16分) 本题共有2个小题, 第1小题满分8分, 第2小题满分8分。

已知双曲线  $c: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , 设过点  $A(-3\sqrt{2}, 0)$  的直线  $l$  的方向向量  $\vec{e} = (1, k)$  . . .

- (1) 当直线  $l$  与双曲线  $C$  的一条渐近线  $m$  平行时, 求直线  $l$  的方程及  $l$  与  $m$  的距离; .
- (2) 证明: 当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 在双曲线  $C$  的右支上不存在点  $Q$ , 使之到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ 。

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分。

已知函数  $y = f(x)$  的反函数。定义: 若对给定的实数  $a(a \neq 0)$ , 函数  $y = f(x+a)$  与  $y = f^{-1}(x+a)$  互为反函数, 则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  和性质”; 若函数  $y = f(ax)$  与  $y = f^{-1}(ax)$  互为反函数, 则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  积性质”。

- (1) 判断函数  $g(x) = x^2 + 1(x > 0)$  是否满足“1和性质”, 并说明理由; . . .

- (2) 求所有满足“2和性质”的一次函数；
- (3) 设函数  $y = f(x)(x > 0)$  对任何  $a > 0$ ，满足“ $a$ 积性质”。求  $y = f(x)$  的表达式。

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列， $\{b_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列。

- (1) 若  $a_n = 3n + 1$ ，是否存在  $m, k \in \mathbb{N}^*$ ，有  $a_m + a_{m+1} = a_k$ ？说明理由；
- (2) 找出所有数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ ，使对一切  $n \in \mathbb{N}^*$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ ，并说明理由；
- (3) 若  $a_1 = 5, d = 4, b_1 = q = 3$ ，试确定所有的  $p$ ，使数列  $\{a_n\}$  中存在某个连续  $p$  项的和是数列  $\{b_n\}$  中的一项，请证明。

# 2009年全国普通高等学校招生统一考试

## 上海 数学试卷（理工农医类）

考生注意：

1. 答卷前，考生务必在答题纸上将姓名、高考准考证号填写清楚，并在规定的区域内贴上条形码。

2. 本试卷共有23道试题，满分150分。考试时间20分钟。

一. 真空题

（本大题满分56分）本大题有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

4. 若复数  $z$  满足  $z(1+i)=1-i$  ( $i$  是虚数单位)，则其共轭复数  $\bar{z} =$  \_\_\_\_\_。

1. 【答案】  $i$

【解析】 设  $z=a+bi$ ，则  $(a+bi)(1+i)=1-i$

$i$ ，即  $a-b+(a+b)i=1-i$ ，由  $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-1 \end{cases}$ ，解得  $a=0$ ， $b=-1$ ，所以  $z=-i$ ， $\bar{z}=i$

5. 已知集合  $A=\{x|x \leq 1\}$ ， $B=\{x|x \geq a\}$ ，且  $A \cup B = R$ ，则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

2. 【答案】  $a \leq 1$

【解析】 因为  $A \cup B = R$ ，画数轴可知，实数  $a$  必须在点 1 上或在 1 的左边，所以，有  $a \leq 1$ 。

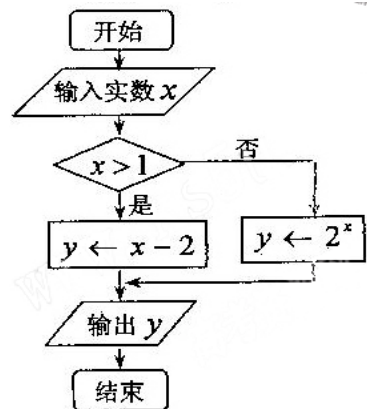
6. 若行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  中，元素 4 的代数余子式大于 0，

则  $x$  满足的条件是 \_\_\_\_\_。

3. 【答案】  $x > \frac{8}{3}$

【解析】 依题意，得： $(-1)^2 \times (9x-24) > 0$ ，解得： $x > \frac{8}{3}$

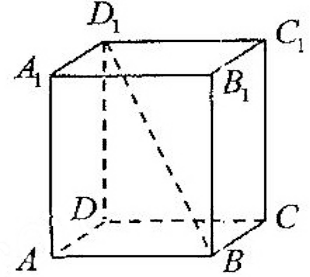
4. 某算法的程序框如右图所示，则输出量  $y$  与输入量  $x$  满足的关系式是 \_\_\_\_\_。



4. 【答案】  $y = \begin{cases} 2^x, & x < 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$

【解析】当  $x > 1$  时，有  $y = x - 2$ ，当  $x < 1$  时有  $y = 2^x$ ，所以，有分段函数。

5. 如图，若正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为2，高为4，则异面直线  $BD_1$  与  $AD$  所成角的大小是\_\_\_\_\_（结果用反三角函数表示）。



5. 【答案】  $\arctan \sqrt{5}$

【解析】因为  $AD \parallel A_1D_1$ ，异面直线  $BD_1$  与  $AD$  所成角就是  $BD_1$  与  $A_1D_1$  所在角，即  $\angle A_1D_1B$ ，由勾股定理，得  $A_1B = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle A_1D_1B = \sqrt{5}$ ，所以， $\angle A_1D_1B = \arctan \sqrt{5}$ 。

6. 函数  $y = 2 \cos^2 x + \sin 2x$  的最小值是\_\_\_\_\_。

6. 【答案】  $1 - \sqrt{2}$

【解析】  $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 1 = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$ ，所以最小值为： $1 - \sqrt{2}$

7. 某学校要从5名男生和2名女生中选出2人作为上海世博会志愿者，若用随机变量  $\xi$  表示选出的志愿者中女生的人数，则数学期望  $E\xi$  \_\_\_\_\_（结果用最简分数表示）。

7. 【答案】  $\frac{4}{7}$

【解析】  $\xi$  可取0, 1, 2，因此  $P(\xi = 0) = \frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{10}{21}$ ， $P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{10}{21}$ ，

$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$ ， $E\xi = 0 \times \frac{10}{21} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$

8. 已知三个球的半径  $R_1, R_2, R_3$  满足  $R_1 + 2R_2 = 3R_3$ ，则它们的表面积  $S_1, S_2, S_3$ ，满足的等量关系是\_\_\_\_\_。

8. 【答案】  $\sqrt{S_1} + 2\sqrt{S_2} = 3\sqrt{S_3}$

【解析】  $S_1 = 4\pi R_1^2$ ， $\sqrt{S_1} = 2\sqrt{\pi} R_1$ ，同理： $\sqrt{S_2} = 2\sqrt{\pi} R_2$ ， $\sqrt{S_3} = 2\sqrt{\pi} R_3$ ，即  $R_1 =$

$\frac{\sqrt{S_1}}{2\sqrt{\pi}}$ ， $R_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{2\sqrt{\pi}}$ ， $R_3 = \frac{\sqrt{S_3}}{2\sqrt{\pi}}$ ，由  $R_1 + 2R_2 = 3R_3$  得  $\sqrt{S_1} + 2\sqrt{S_2} = 3\sqrt{S_3}$

9. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点,  $P$  为椭圆  $C$  上一点, 且

$\overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$ . 若  $\Delta PF_1F_2$  的面积为 9, 则  $b =$  \_\_\_\_\_.

9. 【答案】 3

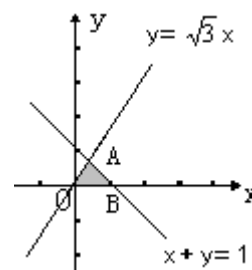
【解析】依题意, 有 
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a \\ |PF_1| \cdot |PF_2| = 18 \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2 \end{cases}$$
, 可得  $4c^2 + 36 = 4a^2$ , 即  $a^2 - c^2 = 9$ , 故有  $b =$

3.

10. 在极坐标系中, 由三条直线  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$  围成图形的面积是 \_\_\_\_\_.

10. 【答案】  $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

【解析】化为普通方程, 分别为:  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x + y = 1$ , 画出三条直



线的图象如右图, 可求得  $A\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B(1,0)$ , 三角形  $AOB$

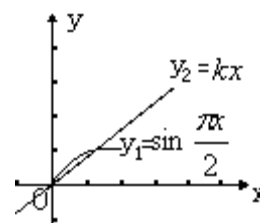
的面积为:  $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

11. 当  $0 \leq x \leq 1$  时, 不等式  $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$  成立, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

11. 【答案】  $k \leq 1$

【解析】作出  $y_1 = \sin \frac{\pi x}{2}$  与  $y_2 = kx$  的图象, 要使不等式

$\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$  成立, 由图可知须  $k \leq 1$ .



12. 已知函数  $f(x) = \sin x + \tan x$ . 项数为 27 的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且公

差  $d \neq 0$ . 若  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{27}) = 0$ , 则当  $k =$  \_\_\_\_\_ 是,  $f(a_k) = 0$ .

12. 【答案】 14

【解析】函数  $f(x) = \sin x + \tan x$  在

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  是增函数, 显然又为奇函数, 函数图象关于原点对称, 因为

$$a_1 + a_{27} = a_2 + a_{26} = \dots = 2a_{14},$$

所以  $f(a_1) + f(a_{27}) = f(a_2) + f(a_{26}) = \dots = f(a_{14}) = 0$ ，所以当  $k = 14$  时， $f(a_k) = 0$

13. 某地街道呈现东—西、南—

北向的网格状，相邻街距都为1. 两街道相交的点称为格点。若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系，现有下述格点  $(-2,2)$ ， $(3,1)$ ， $(3,4)$ ， $(-2,3)$ ， $(4,5)$ ， $(6,6)$  为报刊零售点. 请确定一个格点（除零售点外）\_\_\_\_\_为发行站，使6个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

13. 【答案】  $(3, 3)$

【解析】 设发行站的位置为  $(x, y)$ ，零售点到发行站的距离为

$$z = 2|x+2| + |y-2| + 2|x-3| + |y-1| + |y-4| + |y-3| + |x-4| + |y-5| + |x-6| + |y-6|$$

，这六个点的横纵坐标的平均值为  $\frac{-2+3+3-2+4+6}{6} = 2$ ， $\frac{2+1+4+3+5+6}{6} = \frac{7}{2}$ ，

记

$A(2, \frac{7}{2})$ ，画出图形可知，发行站的位置应该在点A附近，代入附近的点的坐标进行比较可知，在  $(3,3)$  处  $z$  取得最小值。

14. 将函数  $y = \sqrt{4 + 6x - x^2} - 2$  ( $x \in [0,6]$ ) 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角  $\theta$

( $0 \leq \theta \leq \alpha$ )，得到曲线  $C$ . 若对于每一个旋转角  $\theta$ ，曲线  $C$  都是一个函数的图像，则  $\alpha$  的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 【答案】  $\arctan \frac{2}{3}$

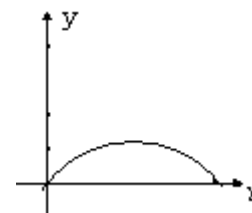
【解析】 由  $y = \sqrt{4 + 6x - x^2} - 2$  得：  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$ ， ( $x \in [0,6]$ )，它的图

象是以  $(3, -2)$  为圆心，  $\sqrt{13}$  为半径的一段圆弧，

设过原点且与曲线C相切的直线为  $y = kx$ ，当  $\theta = 0$  时，  $k = -\frac{1}{k_{OC}} = \frac{3}{2}$

，此时直线的倾斜角为  $\beta$ ，即  $\tan \beta = \frac{3}{2}$ ，当切线与  $y$  轴重合时，曲线上的

点满足函数的定义，即是一个函数的图像，再逆时针旋转时，曲线不再是一个函数的图



象，旋转角为 $90^\circ - \beta$ ，则 $\tan(90^\circ - \beta) = \frac{3}{2}$ ，即 $\theta = \arctan \frac{2}{3}$

二. 选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得4分，否则一律得零分。

15. “ $-2 \leq a \leq 2$ ”是“实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有虚根”的

- (A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

15、【答案】A

【解析】 $\Delta = a^2 - 4 < 0$ 时， $-2 < a < 2$ ，因为“ $-2 \leq a \leq 2$ ”是“ $-2 < a < 2$ ”的必要不充分条件，故选A。

16. 若事件 $E$ 与 $F$ 相互独立，且 $P(E) = P(F) = \frac{1}{4}$ ，则 $P(E|F)$ 的值等于

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{16}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$

16、【答案】B

【解析】 $P(E|F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

17. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续10天，每天新增疑似病例不超过7人”。根据过去10天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据，一定符合该标志的是

- (A) 甲地：总体均值为3，中位数为4 (B) 乙地：总体均值为1，总体方差大于0  
(C) 丙地：中位数为2，众数为3 (D) 丁地：总体均值为2，总体方差为3

17、【答案】D

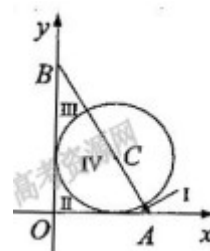
【解析】根据信息可知，连续10天内，每天的新增疑似病例不能有超过7的数，选项A中，中位数为4，可能存在大于7的数；同理，在选项C中也有可能；选项B中的总体方差大于0，叙述不明确，如果数目太大，也有可能存在大于7的数；选项D中，根据方差公式，如果有大于7的数存在，那么方差不会为3，故答案选D。

18. 过圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心，作直线分别交 $x$ 、 $y$ 正半轴于点 $A$ 、 $B$

， $\Delta AOB$ 被圆分成四部分（如图），若这四部分图形面积满足

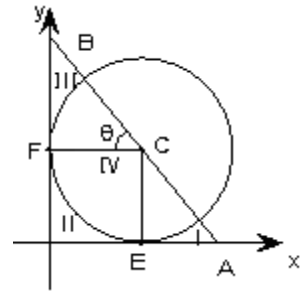
$S_I + S_{\text{IV}} = S_{\text{II}} + S_{\text{III}}$ ，则直线 $AB$ 有（ ）

- (A) 0条 (B) 1条 (C) 2条 (D) 3条



18、【答案】B

【解析】由已知，得： $S_{IV} - S_{II} = S_{III} - S_I$ ，第II，IV部分的面积是定值，所以， $S_{IV} - S_{II}$ 为定值，即 $S_{III} - S_I$ 为定值，当直线AB绕着圆心C移动时，只可能有一个位置符合题意，即直线AB只有一条，故选B。

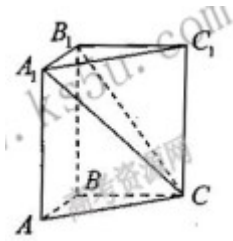


三. 解答题（本大题满分78分）本大题共5题，解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤

19（本题满分14分）

如图，在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AA_1 = BC = AB = 2$ ，

$AB \perp BC$ ，求二面角  $B_1 - A_1C - C_1$  的大小。



19，【解】如图，建立空间直角坐标系

则A (2, 0, 0)、 C (0, 2, 0) A1 (2, 0, 2)，

B1 (0, 0, 2)、 C1 (0, 2, 2) .....2分

设AC的中点为M， $\therefore BM \perp AC$ ， $BM \perp CC_1$ ；

$\therefore BM \perp$ 平面A1C1C，即  $\overrightarrow{BM} = (1, 1, 0)$  是平面A1C1C的一个法向量。.....5分

设平面  $A_1B_1C_1$  的一个法向量是  $\vec{n} = (x, y, z)$  = (x, y, z)，

$\overrightarrow{A_1C} = (-2, 2, -2)$ ，  $\overrightarrow{A_1B_1} = (-2, 0, 0)$  .....7分

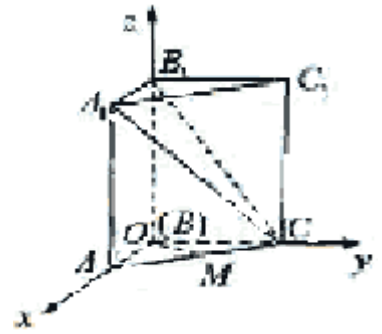
$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = -2x = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = -2x + 2y - 2z = 0$ ，令  $z = 1$ ，解得  $x = 0, y = 1$

$\therefore \vec{n} = (0, 1, 1)$ .....10分

设法向量  $\vec{n}$  与  $\overrightarrow{BM}$  的夹角为  $\varphi$ ，二面角  $B_1 - A_1C - C_1$  的大小为  $\theta$ ，显然  $\theta$  为锐角

$$\therefore \cos \theta = |\cos \varphi| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{1}{2}, \text{解得 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ .....14分}$$

$\therefore$  二面角  $B_1 - A_1C - C_1$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$



20（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

有时可用函数

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 + 15 \ln \frac{a}{a-x}, & (x \leq 6) \\ \frac{x-4.4}{x-4}, & (x > 6) \end{cases}$$

描述学习某学科知识的掌握程度，其中  $x$  表示某学科知识的学习次数 ( $x \in N^*$ )， $f(x)$  表示对该学科知识的掌握程度，正实数  $a$  与学科知识有关。

- (3) 证明：当  $x \geq 7$  时，掌握程度的增加量  $f(x+1) - f(x)$  总是下降；
- (4) 根据经验，学科甲、乙、丙对应的  $a$  的取值区间分别为  $(115, 121]$ ,  $(121, 127]$ ,  $(121, 133]$ 。当学习某学科知识 6 次时，掌握程度是 85%，请确定相应的学科。

20. 证明 (1) 当  $x \geq 7$  时， $f(x+1) - f(x) = \frac{0.4}{(x-3)(x-4)}$

而当  $x \geq 7$  时，函数  $y = (x-3)(x-4)$  单调递增，且  $(x-3)(x-4) > 0$ .....3分

故  $f(x+1) - f(x)$  单调递减。

$\therefore$  当  $x \geq 7$  时，掌握程度的增长量  $f(x+1) - f(x)$  总是下降.....6分

(2) 由题意可知  $0.1 + 15 \ln \frac{a}{a-6} = 0.85$ .....9分

整理得  $\frac{a}{a-6} = e^{0.05}$

解得  $a = \frac{e^{0.05}}{e^{0.05} - 1} \cdot 6 = 20.50 \times 6 = 123.0, 123.0 \in (121, 127]$ .....13分

由此可知，该学科是乙学科.....14分

21. (本题满分16分) 本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分。

已知双曲线  $c: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ，设过点  $A(-3\sqrt{2}, 0)$  的直线  $l$  的方向向量  $\vec{e} = (1, k)$  .....

- (3) 当直线  $l$  与双曲线  $c$  的一条渐近线  $m$  平行时，求直线  $l$  的方程及  $l$  与  $m$  的距离；
- (4) 证明：当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时，在双曲线  $c$  的右支上不存在点  $Q$ ，使之到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ 。

21. (1) 双曲线  $c$  的渐近线  $m: \frac{x}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{2}y = 0$ .....2分

∴ 直线  $l$  的方程  $x \pm \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} = 0$  .....6分

直线  $l$  与  $m$  的距离  $d = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}} = \sqrt{6}$  .....8分

(2) 设过原点且平行与  $l$  的直线  $b: kx - y = 0$

则直线  $l$  与  $b$  的距离  $d = \frac{3\sqrt{2}|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时,  $d > \sqrt{6}$

又双曲线  $C$  的渐近线为  $x \pm \sqrt{2}y = 0$

∴ 双曲线  $C$  的右支在直线  $b$  的右下方,

∴ 双曲线  $C$  右支上的任意点到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ 。

故在双曲线  $C$  的右支上不存在点  $Q$ , 使之到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ 。

[证法二] 双曲线  $C$  的右支上存在点  $Q(x_0, y_0)$  到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{|kx_0 - y_0 + 3\sqrt{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{6}, (1) \\ x_0 - 2y_0 = 2, (2) \end{cases}$$

由 (1) 得  $y_0 = kx_0 + 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \cdot \sqrt{1+k^2}$ ,

设  $t = 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \cdot \sqrt{1+k^2}$

当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $t = 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \cdot \sqrt{1+k^2} > 0$  .....13分

将  $y_0 = kx_0 + t$  代入 (2) 得  $(1-2k^2)x_0^2 - 4ktx_0 - 2(t^2+1) = 0$  (\*)

∵  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}, t > 0, \therefore 1-2k^2 < 0, -4kt < 0, -2(t^2+1) < 0$

∴ 方程 (\*) 不存在正根, 即假设不成立

故在双曲线  $C$  的右支上不存在  $Q$ , 使之到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$  .....16分

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分。

已知函数  $y = f(x)$  的反函数。定义：若对给定的实数  $a(a \neq 0)$ ，函数  $y = f(x+a)$  与  $y = f^{-1}(x+a)$  互为反函数，则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  和性质”；若函数  $y = f(ax)$  与  $y = f^{-1}(ax)$  互为反函数，则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  积性质”。

- (4) 判断函数  $g(x) = x^2 + 1(x > 0)$  是否满足“1和性质”，并说明理由；
- (5) 求所有满足“2和性质”的一次函数；
- (6) 设函数  $y = f(x)(x > 0)$  对任何  $a > 0$ ，满足“ $a$  积性质”。求  $y = f(x)$  的表达式。

22 (1) 解，函数  $g(x) = x^2 + 1(x > 0)$  的反函数是  $g^{-1}(x) = \sqrt{x-1}(x > 1)$

$$\therefore g^{-1}(x+1) = \sqrt{x}(x > 0)$$

而  $g(x+1) = (x+1)^2 + 1(x > -1)$ ，其反函数为  $y = \sqrt{x-1} - 1(x > 1)$

故函数  $g(x) = x^2 + 1(x > 0)$  不满足“1和性质”

(2) 设函数  $f(x) = kx + b(x \in R)$  满足“2和性质”， $k \neq 0$ 。

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-b}{k}(x \in R), \therefore f^{-1}(x+2) = \frac{x+2-b}{k} \dots\dots\dots 6分$$

而  $f(x+2) = k(x+2) + b(x \in R)$ ，得反函数  $y = \frac{x-b-2k}{k} \dots\dots\dots 8分$

由“2和性质”定义可知  $\frac{x+2-b}{k} = \frac{x-b-2k}{k}$  对  $x \in R$  恒成立

$\therefore k = -1, b \in R$ ，即所求一次函数为  $f(x) = -x + b(b \in R) \dots\dots\dots 10分$

(3) 设  $a > 0$ ， $x_0 > 0$ ，且点  $(x_0, y_0)$  在  $y = f(ax)$  图像上，则  $(y_0, x_0)$  在函数

$y = f^{-1}(ax)$  图象上，

故 
$$\begin{cases} f(ax_0) = y_0, & \text{可得 } ay_0 = f(x_0) = af(ax_0), & \dots\dots\dots 12分 \\ f^{-1}(ay_0) = x_0, & \end{cases}$$

令  $ax_0 = x$ ，则  $a = \frac{x}{x_0}$ 。  $\therefore f(x_0) = \frac{x}{x_0} f(x)$ ，即  $f(x) = \frac{x_0 f(x_0)}{x}$ 。

$\dots\dots\dots 14分$

综上所述,  $1 = b_1 q^{n-1} = b_n f(x) = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ , 此时  $f(ax) = \frac{k}{ax}$ , 其反函数就是  $y = \frac{k}{ax}$ , 而  $f^{-1}(ax) = \frac{k}{ax}$ , 故  $y = f(ax)$  与  $y = f^{-1}(ax)$  互为反函数。 . . . . . 16分

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分。

已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列。

- (4) 若  $a_n = 3n + 1$ , 是否存在  $m, k \in N^*$ , 有  $a_m + a_{m+1} = a_k$ ? 说明理由; . . . . .
- (5) 找出所有数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ , 使对一切  $n \in N^*$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ , 并说明理由;
- (6) 若  $a_1 = 5, d = 4, b_1 = q = 3$ , 试确定所有的  $p$ , 使数列  $\{a_n\}$  中存在某个连续  $p$  项的和是数列  $\{b_n\}$  中的一项, 请证明。

23. [解法一] (1) 由  $a_m + a_{m+1} = a_k$ , 得  $6m + 5 = 3k + 1$ , . . . . . 2分

整理后, 可得  $k - 2m = \frac{4}{3}$ ,  $\because m, k \in N^*$ ,  $\therefore k - 2m$  为整数, . . . . .

$\therefore$  不存在  $m, k \in N^*$ , 使等式成立。 . . . . . 5分

(2) 若  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ , 即  $\frac{a_1 + nd}{a_1 + (n-1)d} = b_1 q^{n-1}$ , (\*)

(i) 若  $d = 0$ , 则  $1 = b_1 q^{n-1} = b_n$  . . . . .

当  $\{a_n\}$  为非零常数列,  $\{b_n\}$  为恒等于1的常数列, 满足要求。

. . . . . 7分

(ii) 若  $d \neq 0$ , (\*) 式等号左边取极限得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + nd}{a_1 + (n-1)d} = 1$ , (\*) 式等号右边的极限

只有当  $q = 1$  时, 才能等于1。此时等号左边是常数,  $\therefore d = 0$ , 矛盾。

综上所述, 只有当  $\{a_n\}$  为非零常数列,  $\{b_n\}$  为恒等于1的常数列, 满足要求。 . . . . .

. 10分

【解法二】 设  $a_n = nd + c$ , 若  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ , 且  $\{b_n\}$  为等比数列

则  $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} / \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , 对  $n \in N^*$  都成立, 即  $a_n a_{n+2} = q a_{n+1}^2$

$\therefore (dn+c)(dn+2d+c) - q(dn+d+c)^2$  对  $n \in N^*$  都成立,  $\therefore a^2 = qd^2 \dots 7$ 分

(i) 若  $d=0$ , 则  $a_n = c \neq 0, \therefore b_n = 1, n \in N^*$

(ii) 若  $d \neq 0$ , 则  $q=1, \therefore b_n = m$  (常数) 即  $\frac{dn+d+c}{dn+c} = m$ , 则  $d=0$ , 矛盾

综上所述, 有  $a_n = c \neq 0, b_n = 1$ , 使对一切  $n \in N^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ , 10分

(3)  $a_n = 4n+1, b_n = 3^n, n \in N^*$

设  $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+p} = b_k = 3^k, p, k \in N^*, m \in N$ .

$$\frac{4(m+1)+1+4(m+p)+1}{2} p = 3^k,$$

$$\therefore 4m+2p+3 = \frac{3^k}{p}, \therefore p, k \in N^*, \therefore p = 3^s, s \in N. \quad 13$$
分

取  $k = 3s + 2, 4m = 3^{2s+2} - 2 \times 3^s - 3 = (4-1)^{2s+2} - 2 \times (4-1)^s - 3 > 0$ , 15分

由二项展开式可得正整数  $M_1, M_2$ , 使得  $(4-1)^{2s+2} = 4M_1 + 1$ ,

$$2 \times (4-1)^s = 8M_2 + (-1)^s 2,$$

$\therefore 4m = 4(M_1 - 2M_2) - ((-1)^s + 1)2, \therefore$  存在整数  $m$  满足要求.

故当且仅当  $p=3^s, s \in N$  时, 命题成立.

说明: 第(3)题若学生从以下角度解题, 可分别得部分分(即分步得分)

若  $p$  为偶数, 则  $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+p}$  为偶数, 但  $3^k$  为奇数

故此等式不成立, 所以,  $p$  一定为奇数.

当  $p=1$  时, 则  $a_{m+1} = b_k$ , 即  $4m+5 = 3^k$ ,

而  $3^k = (4-1)^k$

$$= C_k^0 \cdot 4^k + C_k^1 \cdot 4^{k-1} \cdot (-1) + \dots + C_k^{k-1} \cdot 4 \cdot (-1)^{k-1} + C_k^k \cdot (-1)^k = 4M + (-1)^k, M \in Z,$$

当  $k$  为偶数时, 存在  $m$ , 使  $4m+5 = 3^k$  成立 1分

当  $p=3$  时, 则  $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} = b_k$ , 即  $3a_{m+2} = b_k$ ,

也即  $3(4m+9) = 3^k$ , 所以  $4m+9 = 3^{k-1}, 4(m+1)+5 = 3^{k-1}$

由已证可知，当 $k-1$ 为偶数即 $k$ 为奇数时，存在 $m$ ， $4m+9=3^k$ 成立 2分

当 $p=5$ 时，则 $a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_{m+5}=b_k$ ，即 $5a_{m+3}=b_k$

也即 $5(4m+13)=3^k$ ，而 $3^k$ 不是5的倍数，所以，当 $p=5$ 时，所要求的 $m$ 不存在

故不是所有奇数都成立. 2分