绝密★启用前

2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

第I卷　（共110分）

一、填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．函数 $y=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{4})+\cos x\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期T=____________ .

2．若 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解，其中 $\alpha\in(0,2\pi)$，则 $\alpha=$____________ .

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=3$，$a_6=-2$，则 $a_4+a_5+\ldots+a_{10}=$____________ .

4．在极坐标系中，定点A $(1,\frac{\pi}{2})$，点B在直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$ 上运动，当线段AB最短时，点B的极坐标是____________ .

5．在正四棱锥P—ABCD中，若侧面与底面所成二面角的大小为60°，则异面直线PA与BC所成角的大小等于____________ .（结果用反三角函数值表示.）

6．设集合A={x| |x|<4}，B={x| $x^2-4x+3>0$}， 则集合{x| x∈A且 $x\notin A\cap B$}=____________ .

7．在△ABC中，sinA;sinB:sinC=2:3:4，则∠ABC=____________ .（结果用反三角函数值表示）

8．若首项为a_1，公比为q的等比数列 $\{a_n\}$ 的前n项和总小于这个数列的各项和，则首项a_1，公比q的一组取值可以是（a_1，q）=____________ .

9．某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成.现从中随机选出两位作为成果发布人，则此两人不属于同一个国家的概率为____________ .（结果用分数表示）

10．方程$x^3+\lg x=18$的根x≈____________ .（结果精确到0.1）

11．已知点 $A(0,\frac{2}{n}),B(0,-\frac{2}{n}),C(4+\frac{2}{n},0)$，其中n的为正整数.设$S_n$表示△ABC外接圆的面积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ =____________ .

12．给出问题：F_1、F_2是双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$的焦点，点P在双曲线上.若点P到焦点$F_1$的距离等于9，求点P到焦点$F_2$的距离.某学生的解答如下：双曲线的实轴长为8，由

$||PF_1|-|PF_2||=8$，即$|9-|PF_2||=8$，得$|PF_2|=1$或17.

该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内，若不正确，将正确的结果填在下面空格内.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13．下列函数中，既为偶函数又在（0，π）上单调递增的是（　　）

A．$y=tg|x|$.　　　　B．$y=\cos(-x)$.

C．$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$.　　　　D．$y=|ctg\dfrac{x}{2}|$.

14．在下列条件中，可判断平面α与β平行的是（　　）

A．α、β都垂直于平面r.

B．α内存在不共线的三点到β的距离相等.

C．l，m是α内两条直线，且l∥β，m∥β.

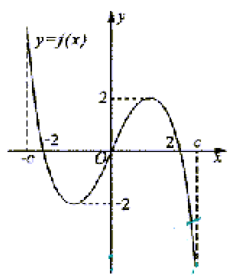
D．l，m是两条异面直线，且l∥α，m∥α，l∥β，m∥β.

15．a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2均为非零实数，不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0$和$a_2x^2+b_2x+c_2>0$的解集分别为集合M和N，那么“$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$”是“M=N”的（　　）

A．充分非必要条件.　　　　B．必要非充分条件.

C．充要条件　　　　D．既非充分又非必要条件.

16．$f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数，其图象如图所示：令$g(x)=af(x)+b$，则下列关于函数$g(x)$的叙述正确的是（　　）.



A．若$a<0$，则函数$g(x)$的图象关于原点对称.

B．若$a=-1$，$-2<b<0$，则方程$g(x)=0$有大于2的实根.

C．若$a\neq 0$, b=2, 则方程g（x）=0有两个实根.

D．若a≥1, b<2, 则方程g（x）=0有三个实根.

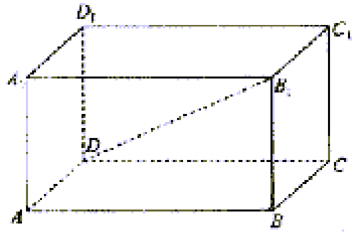
三、解答题（本大题满分86分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

17．（本题满分12分）

已知复数$z_1=\cos\theta-i$，$z_2=\sin\theta+i$，求$|z_1\cdot z_2|$的最大值和最小值.

18．（本题满分12分）

已知平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$中，$A_1A\perp$平面ABCD，AB=4，AD=2.若$B_1D\perp BC$，直线B_1D与平面ABCD所成的角等于30°，求平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的体积.



19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分9分.

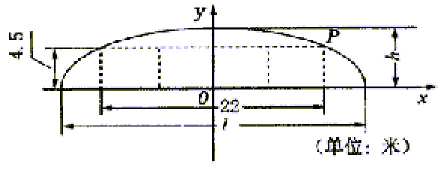
已知数列$\{a_n\}$（n为正整数）是首项是a_1，公比为q的等比数列.

（1）求和：$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2, a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$；

（2）由（1）的结果归纳概括出关于正整数n的一个结论，并加以证明.

20．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽22米，要求通行车辆限高4.5米，隧道全长2.5千米，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



（1）若最大拱高h为6米，则隧道设计的拱宽l是多少？

（2）若最大拱高h不小于6米，则应如何设

计拱高h和拱宽l，才能使半个椭圆形隧
道的土方工程量最最小？

（半个椭圆的面积公式为$S=\frac{\pi}{4}lh$，柱体体积为：底面积乘以高.本题结果精确到0.1米）

21．（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分.

在以O为原点的直角坐标系中，点A（4，－3）为△OAB的直角顶点.已知|AB|=2|OA|，且点B的纵坐标大于零.

（1）求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标；

（2）求圆$x^2-6x+y^2+2y=0$关于直线OB对称的圆的方程；

（3）是否存在实数a，使抛物线$y = ax^2 - 1$上总有关于直线OB对称的两个点？若不存在，说明理由：若存在，求a的取值范围.

22．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分6分，第3小题满分7分.

已知集合M是满足下列性质的函数$f(x)$的全体：存在非零常数T，对任意$x\in R$，有$f(x+T)=T f(x)$成立.

（1）函数$f(x)= x$ 是否属于集合M？说明理由；

（2）设函数$f(x)=a^x$（$a>0$，且$a\neq1$）的图象与$y=x$的图象有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

（3）若函数$f(x)=\sin kx\in M$，求实数k的取值范围.

2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理工农医类）答案

一、（第1题至第12题）

1．π.　2．$\frac{4}{3}\pi$.　3．－49．　4．$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4}\pi)$.　5．arctg2.　6．[1,3].

7．$\arccos\frac{11}{6}$.　8．$(1,\frac{1}{2})(a_1>0,0<q<1$的一组数）．9．$\frac{119}{190}$

10．2.6．　11．4π　12．$|PF_2|=17$.

二、（第13题至第16题）

题　号	13	14	15	16
代　号	C	D	D	B

三、（第17题至第22题）

17．[解]

$$|z_1\cdot z_2|=|1+\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)i|$$
$$=\sqrt{(1+\sin\theta\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}.$$

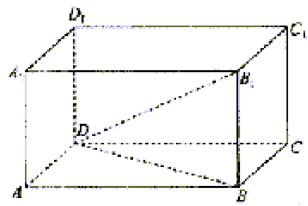
故$|z_1\cdot z_2|$的最大值为$\frac{3}{2}$，最小值为$\sqrt{2}$.

18．[解]连结BD，因为$B_1B\perp$平面ABCD，$B_1D\perp BC$，所以$BC\perp BD$.

在△BCD中，BC=2，CD=4，所以BD=$2\sqrt{3}$.

又因为直线B_1D与平面ABCD所成的角等于30°，所以

$\angle B_1DB=30°$，于是$BB_1=\frac{1}{\sqrt{3}}BD=2$.



故平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的体积为$S_{ABCD}\cdot BB_1=8\sqrt{3}$.

19．[解]（1）

$$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2,$$
$$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3.$$

（2）归纳概括的结论为：

若数列$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为q的等比数列，则

$$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\ldots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n, n\text{为正整数}.$$

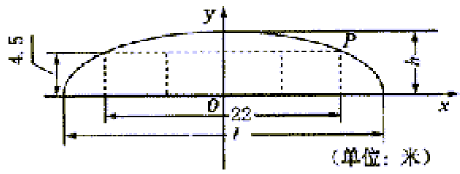
证明：$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\ldots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n$

$$=a_1C_n^0-a_1qC_n^1+a_1q^2C_n^2-a_1q^3C_n^3+\ldots+(-1)^n a_1q^nC_n^n$$
$$=a_1[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\ldots+(-1)^n q^nC_n^n]=a_1(1-q)^n$$

20．[解]（1）如图建立直角坐标系，则点P（11，4.5），　椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

将b=h=6与点P坐标代入椭圆方程，得$a=\frac{44\sqrt{7}}{7}$,此时$l=2a=\frac{88\sqrt{7}}{7}\approx 33.3$.因此隧道的拱宽约为33.3米.

（2）[解一]



由椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$.

因为$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}\geq\frac{2\times 11\times 4.5}{ab}$即$ab\geq 99$,且$l=2a,h=b$,

所以$S=\frac{\pi}{4}lh=\frac{\pi ab}{2}\geq\frac{99\pi}{2}$.

当S取最小值时,有$\frac{11^2}{a^2}=\frac{4.5^2}{b^2}=\frac{1}{2}$,得$a=11\sqrt{2},b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

此时$l=2a=22\sqrt{2}\approx 31.1,h=b\approx 6.4$

故当拱高约为6.4米、拱宽约为31.1米时，土方工程量最小.

[解二]由椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$. 于是$b^2=\frac{81}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2-121}$,

$$a^2b^2=\frac{81}{4}(a^2-121+\frac{121^2}{a^2-121}+242)\geq\frac{81}{4}(2\sqrt{121^2}+242)=81\times 121,$$

即$ab\geq 99$,当S取最小值时,有$a^2-121=\frac{121^2}{a^2-121}$,

得$a=11\sqrt{2},b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.以下同解一.

21．[解]（1）设$\overrightarrow{AB}=\{u,v\}$,则由$\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{OA}|\\|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OA}|=0\end{cases}$,即$\begin{cases}u^2+v^2=100\\4u-3v=0,\end{cases}$得

$\begin{cases}u=6\\v=8\end{cases}$,或$\begin{cases}u=-6\\v=-8\end{cases}$.因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\{u+4,v-3\}$,

所以$v-3>0$,得$v=8$,故$\overrightarrow{AB}=\{6，8\}$.

（2）由$\overrightarrow{OB}$={10，5}，得B（10，5），于是直线OB方程：$y=\frac{1}{2}x.$

由条件可知圆的标准方程为：$(x-3)^2+y(y+1)^2=10$,

得圆心（3，－1），半径为$\sqrt{10}$.

设圆心（3，－1）关于直线OB的对称点为（x ,y）则

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}-2\cdot\dfrac{y-1}{2}=0\\ \dfrac{y+1}{x-3}=-2\end{cases},得\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases},$$故所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-3)^2=10$.

（3）设P（x_1, y_1），Q（x_2, y_2）为抛物线上关于直线OB对称两点，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}-2\dfrac{y_1+y_2}{2}=0\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-2\end{cases},得\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}\\ x_1x_2=\dfrac{5-2a}{2a^2}\end{cases},$$

即x_1,x_2为方程$x^2+\frac{2}{a}x+\frac{5-2a}{2a^2}=0$的两个相异实根,

于是由$\Delta=\frac{4}{a^2}-4\cdot\frac{5-2a}{2a^2}>0$,得$a>\frac{3}{2}$.

故当$a>\frac{3}{2}$时，抛物线$y=ax^2-1$上总有关于直线OB对称的两点.

22．[解]（1）对于非零常数T，$f(x+T)=x+T$，　　$Tf(x)=Tx$.　　因为对任意x∈R，$x+T=Tx$不能恒成立，所以$f(x)=x\notin M$.

（2）因为函数$f(x)=a^x$（a>0且a≠1）的图象与函数$y=x$的图象有公共点，

所以方程组：$\begin{cases}y=a^x\\ y=x\end{cases}$有解，消去y得$a^x=x$,

显然x=0不是方程$a^x=x$的解，所以存在非零常数T，使$a^T=T$.

于是对于$f(x)=a^x$有$f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$ 故$f(x)=a^x$∈M.

（3）当k=0时，$f(x)=0$，显然$f(x)=0$∈M.

当k≠0时，因为$f(x)=\sin kx$∈M，所以存在非零常数T，对任意x∈R，有

$f(x+T)=T\ f(x)$成立，即$\sin(kx+kT)=T\sin kx$.

因为k≠0，且x∈R，所以kx∈R，$kx+kT$∈R，

于是$\sin kx$ ∈[－1，1]，$\sin(kx+kT)$ ∈[－1，1]，

故要使$\sin(kx+kT)=T\sin kx$.成立，

只有$T=\pm1$，当$T=1$时，$\sin(kx+k)=\sin kx$ 成立，则$k=2m\pi$，$m\in Z$.

当$T=-1$时，$\sin(kx-k)=-\sin kx$ 成立，

即$\sin(kx-k+\pi)=\sin kx$ 成立，

则$-k+\pi=2m\pi$，$m\in Z$ ，即$k=-2(m-1)\pi$，$m\in Z$.

综合得，实数k的取值范围是$\{k|k=m\pi, m\in Z\}$