

## 2015 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）文

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.  $i$  为虚数单位， $i^{607} = ( \quad )$

- A.  $-i$                       B.  $i$                       C.  $-1$                       D.  $1$

2. 我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为 ( )

- A. 134 石    B. 169 石    C. 338 石    D. 1365 石

3. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ ， $\ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是 ( )

- A.  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ ， $\ln x_0 \neq x_0 - 1$                       B.  $\exists x_0 \notin (0, +\infty)$ ， $\ln x_0 = x_0 - 1$   
C.  $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x \neq x - 1$                       D.  $\forall x \notin (0, +\infty)$ ， $\ln x = x - 1$

4. 已知变量  $x$  和  $y$  满足关系  $y = -0.1x + 1$ ，变量  $y$  与  $z$  正相关. 下列结论中正确的是 ( )

- A.  $x$  与  $y$  负相关， $x$  与  $z$  负相关                      B.  $x$  与  $y$  正相关， $x$  与  $z$  正相关  
C.  $x$  与  $y$  正相关， $x$  与  $z$  负相关                      D.  $x$  与  $y$  负相关， $x$  与  $z$  正相关

5.  $l_1, l_2$  表示空间中的两条直线，若  $p: l_1, l_2$  是异面直线； $q: l_1, l_2$  不相交，则 ( )

- A.  $p$  是  $q$  的充分条件，但不是  $q$  的必要条件  
B.  $p$  是  $q$  的必要条件，但不是  $q$  的充分条件  
C.  $p$  是  $q$  的充分必要条件  
D.  $p$  既不是  $q$  的充分条件，也不是  $q$  的必要条件

6. 函数  $f(x) = \sqrt{4-|x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}$  的定义域为 ( )

- A.  $(2, 3)$                       B.  $(2, 4]$   
C.  $(2, 3) \cup (3, 4]$                       D.  $(-1, 3) \cup (3, 6]$

7. 设  $x \in \mathbf{R}$ ，定义符号函数  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$  则 ( )

- A.  $|x| = x |\operatorname{sgn} x|$                       B.  $|x| = x \operatorname{sgn} |x|$   
C.  $|x| = |x| \operatorname{sgn} x$                       D.  $|x| = x \operatorname{sgn} x$

8. 在区间  $[0, 1]$  上随机取两个数  $x, y$ ，记  $p_1$  为事件“ $x + y \leq \frac{1}{2}$ ”的概率， $p_2$  为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”

的概率，则 ( )

A.  $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$

B.  $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$

C.  $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$

D.  $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$

9. 将离心率为  $e_1$  的双曲线  $C_1$  的实半轴长  $a$  和虚半轴长  $b$  ( $a \neq b$ ) 同时增加  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位长度, 得到离心率为  $e_2$  的双曲线  $C_2$ , 则 ( )

A. 对任意的  $a, b$ ,  $e_1 > e_2$

B. 当  $a > b$  时,  $e_1 > e_2$ ; 当  $a < b$  时,  $e_1 < e_2$

C. 对任意的  $a, b$ ,  $e_1 < e_2$

D. 当  $a > b$  时,  $e_1 < e_2$ ; 当  $a < b$  时,  $e_1 > e_2$

10. 已知集合  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$ , 定义集合

$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$ , 则  $A \oplus B$  中元素的个数为 ( )

A. 77

B. 49

C. 45

D. 30

第II卷 (共110分) (非选择题共110分)

二、填空题 (每题7分, 满分36分, 将答案填在答题纸上)

11. 已知向量  $\vec{OA} \perp \vec{AB}$ ,  $|\vec{OA}| = 3$ , 则  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$  \_\_\_\_\_.

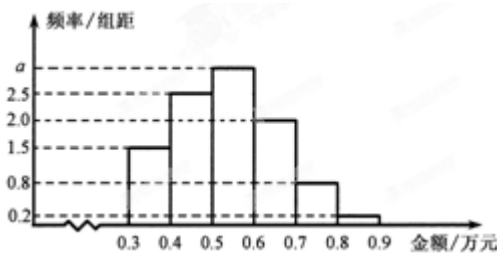
12. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 4, \\ x - y \leq 2, \\ 3x - y \geq 0, \end{cases}$  则  $3x + y$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x) = 2 \sin x \sin(x + \frac{\pi}{2}) - x^2$  的零点个数为 \_\_\_\_\_.

14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间  $[0.3, 0.9]$  内, 其频率分布直方图如图所示.

(I) 直方图中的  $a =$  \_\_\_\_\_;

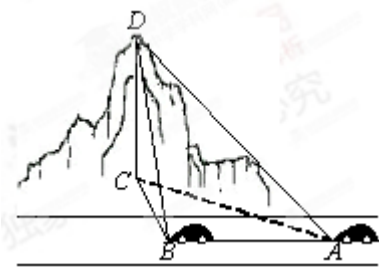
(II) 在这些购物者中, 消费金额在区间  $[0.5, 0.9]$  内的购物者的人数为 \_\_\_\_\_.



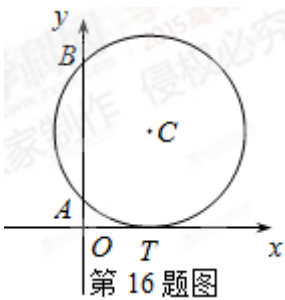
15. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到  $A$  处时测得公路北侧一山顶  $D$  在西偏北  $30^\circ$

的方向上，行驶 600m 后到达  $B$  处，测得此山顶在西偏北  $75^\circ$  的方向上，仰角为  $30^\circ$ ，则此山的高度

$CD =$  \_\_\_\_\_ m.



16. 如图，已知圆  $C$  与  $x$  轴相切于点  $T(1, 0)$ ，与  $y$  轴正半轴交于两点  $A, B$  ( $B$  在  $A$  的上方)，且  $|AB|=2$ .



(I) 圆  $C$  的标准方程为 \_\_\_\_\_;

(II) 圆  $C$  在点  $B$  处的切线在  $x$  轴上的截距为 \_\_\_\_\_.

17.  $a$  为实数，函数  $f(x) = |x^2 - ax|$  在区间  $[0, 1]$  上的最大值记为  $g(a)$ . 当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时， $g(a)$  的值最小.

### 三、解答题 (本大题共 5 小题，共 65 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

18. (本小题满分 12 分)

某同学用“五点法”画函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在某一个周期内的图象

时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(I) 请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数  $f(x)$  的解

析式;

- (II) 将  $y=f(x)$  图象上所有点向左平行移动  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 得到  $y=g(x)$  图象, 求  $y=g(x)$  的图象离原点  $O$  最近的对称中心.

19. (本小题满分 12 分)

设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ . 已知  $b_1=a_1$ ,  $b_2=2$ ,  $q=d$ ,  $S_{10}=100$ .

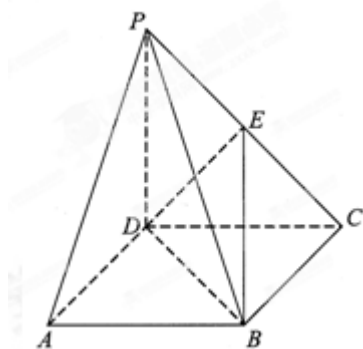
(I) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 当  $d>1$  时, 记  $c_n=\frac{a_n}{b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. (本小题满分 13 分)

《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

在如图所示的阳马  $P-ABCD$  中, 侧棱  $PD\perp$  底面  $ABCD$ , 且  $PD=CD$ , 点  $E$  是  $PC$  的中点, 连接  $DE, BD, BE$ .



(I) 证明:  $DE\perp$  平面  $PBC$ . 试判断四面体  $EBCD$  是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;

(II) 记阳马  $P-ABCD$  的体积为  $V_1$ , 四面体  $EBCD$  的体积为  $V_2$ , 求  $\frac{V_1}{V_2}$  的值.

21. (本小题满分 14 分)

设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数,

$f(x)+g(x)=e^x$ , 其中  $e$  为自然对数的底数.

(I) 求  $f(x)$ ,  $g(x)$  的解析式, 并证明: 当  $x>0$  时,  $f(x)>0$ ,  $g(x)>1$ ;

(II) 设  $a\leq 0$ ,  $b\geq 1$ , 证明: 当  $x>0$  时,  $ag(x)+(1-a)<\frac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$ .

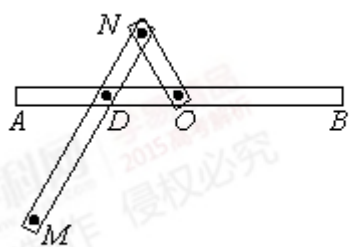
22. (本小题满分 14 分)

一种画椭圆的工具如图 1 所示.  $O$  是滑槽  $AB$  的中点, 短杆  $ON$  可绕  $O$  转动, 长杆  $MN$  通过  $N$  处铰链

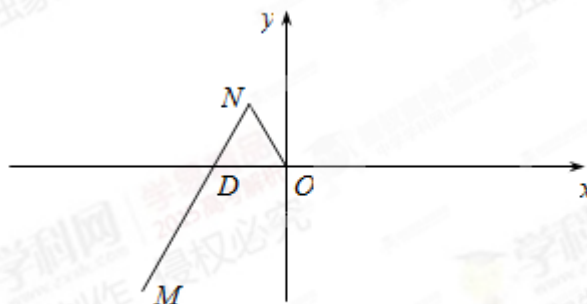
与  $ON$  连接,  $MN$  上的栓子  $D$  可沿滑槽  $AB$  滑动, 且  $DN = ON = 1$ ,  $MN = 3$ . 当栓子  $D$  在滑槽  $AB$  内作往复运动时, 带动  $N$  绕  $O$  转动,  $M$  处的笔尖画出的椭圆记为  $C$ . 以  $O$  为原点,  $AB$  所在的直线为  $x$  轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设动直线  $l$  与两定直线  $l_1: x - 2y = 0$  和  $l_2: x + 2y = 0$  分别交于  $P, Q$  两点. 若直线  $l$  总与椭圆  $C$  有且只有一个公共点, 试探究:  $\Delta OPQ$  的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



第 22 题图 1



第 22 题图 2