2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II 卷）

数学

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由复数模的计算公式直接计算即可.

【详解】若 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：C.

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　　）

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【解析】

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x=-1$、$x=1$，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解.

【详解】对于 p 而言，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x=1$，则有 $x^3=1^3=1=x$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题，

综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选：B.

3. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$ 得 $\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，结合 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，得 $1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，由此即可得解.

【详解】因为 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，所以 $(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}=0$，即 $\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，

又因为 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，

所以 $1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，

从而 $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900，950）	[950，1000）	[1000，1050）	[1100，1150）	[1150，1200）
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是（　　）

A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

【答案】C

【解析】

【分析】计算出前三段频数即可判断 A；计算出低于 1100kg的频数，再计算比例即可判断 B；根据极差计

算方法即可判断 C；根据平均值计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A, 根据频数分布表可知, $6+12+18=36<50$,

所以亩产量的中位数不小于 1050kg, 故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于1100kg的频数为$24+10=34$，

所以低于1100kg的稻田占比为$\dfrac{100-34}{100}=66\%$，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为$1200-900=300$，最小为$1150-950=200$，故 C 正确；

对于 D，由频数分布表可得，亩产量在$[1050,1100)$的频数为$100-(6+12+18+24+10)=30$，

所以平均值为$\dfrac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故 D 错误.

故选：C.

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16$（$y>0$），从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$（$y>0$）　　B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$（$y>0$）

C. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$（$y>0$）　　D. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1$（$y>0$）

【答案】A

【解析】

【分析】设点$M(x,y)$，由题意，根据中点的坐标表示可得$P(x,2y)$，代入圆的方程即可求解.

【详解】设点$M(x,y)$，则$P(x,y_0),P'(x,0)$，

因为M为PP'的中点，所以$y_0=2y$，即$P(x,2y)$，

又P在圆$x^2+y^2=16(y>0)$上，

所以$x^2+4y^2=16(y>0)$，即$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$，

即点M的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$.

故选：A

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：令 $F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x$，分析可知曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上，即可得 $a=2$，并代入检验即可；解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x), x\in(-1,1)$，可知 $h(x)$ 为偶函数，根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，即可得 $a=2$，并代入检验即可.

【详解】解法一：令 $f(x)=g(x)$，即 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得 $ax^2+a-1=\cos x$，

令 $F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x$，

原题意等价于当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

注意到 $F(x), G(x)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上，

可得 $F(0)=G(0)$，即 $a-1=1$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，令 $F(x)=G(x)$，可得 $2x^2+1-\cos x=0$

因为 $x\in(-1,1)$，则 $2x^2\ge 0, 1-\cos x\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $2x^2+1-\cos x\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

则方程 $2x^2+1-\cos x=0$ 有且仅有一个实根 0，即曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

所以 $a=2$ 符合题意；

综上所述：$a=2$.

解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x, x\in(-1,1)$，

原题意等价于 $h(x)$ 有且仅有一个零点，

因为 $h(-x)=a(-x)^2+a-1-\cos(-x)=ax^2+a-1-\cos x=h(x)$，

则 $h(x)$ 为偶函数，

根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，

即 $h(0)=a-2=0$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，则 $h(x)=2x^2+1-\cos x, x\in(-1,1)$，

又因为 $2x^2\ge 0, 1-\cos x\ge 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $h(x)\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意；

故选：D.

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】解法一：根据台体的体积公式可得三棱台的高 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，做辅助线，结合正三棱台的结构特征求得 $AM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，进而根据线面夹角的定义分析求解；解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，根据比例关系可得 $V_{P-ABC}=18$，进而可求正三棱锥 $P-ABC$ 的高，即可得结果.

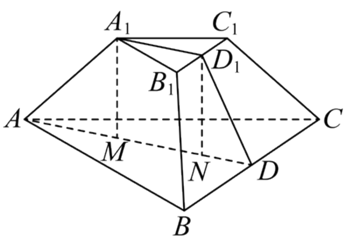
【详解】解法一：分别取 BC, B_1C_1 的中点 D, D_1，则 $AD=3\sqrt{3}, A_1D_1=\sqrt{3}$，

可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的为 h，

则 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\left(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right)h=\frac{52}{3}$，解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

如图，分别过 A_1, D_1 作底面垂线，垂足为 M, N，设 $AM=x$，



则 $AA_1=\sqrt{AM^2+A_1M^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}}$， $DN=AD-AM-MN=2\sqrt{3}-x$，

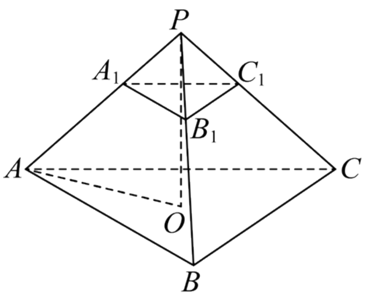
可得 $DD_1=\sqrt{DN^2+D_1N^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}}$，

结合等腰梯形 BCC_1B_1 可得 $BB_1^2=\left(\frac{6-2}{2}\right)^2+DD_1^2$，

即 $x^2+\frac{16}{3}=\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}+4$，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\tan\angle A_1AD=\frac{A_1M}{AM}=1$；

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

因为 $\frac{PA_1}{PA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}}=\frac{1}{27}$，

可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{26}{27}V_{P-ABC}=\frac{52}{3}$，则 $V_{P-ABC}=18$，

设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}d\times\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得 $d=2\sqrt{3}$，

取底面 ABC 的中心为 O，则 $PO\perp$ 底面 ABC，且 $AO=2\sqrt{3}$，

所以 PA 与平面 ABC 所成角的正切值 $\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}=1$.

故选：B.

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\ge0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为$\left(-b,+\infty\right)$，分类讨论$-a$与$-b,1-b$的大小关系，结合符号分析判断，即可得$b=a+1$，代入可得最值；解法二：根据对数函数的性质分析$\ln(x+b)$的符号，进而可得$x+a$的符号，即可得$b=a+1$，代入可得最值.

【详解】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为$\left(-b,+\infty\right)$，

令$x+a=0$解得$x=-a$；令$\ln(x+b)=0$解得$x=1-b$；

若$-a\le -b$，当$x\in\left(-b,1-b\right)$时，可知$x+a>0,\ln\left(x+b\right)<0$，

此时$f(x)<0$，不合题意；

若$-b<-a<1-b$，当$x\in\left(-a,1-b\right)$时，可知$x+a>0,\ln\left(x+b\right)<0$，

此时$f(x)<0$，不合题意；

若$-a=1-b$，当$x\in\left(-b,1-b\right)$时，可知$x+a<0,\ln\left(x+b\right)<0$，此时$f(x)>0$；

当$x\in\left[1-b,+\infty\right)$时，可知$x+a\ge 0,\ln\left(x+b\right)\ge 0$，此时$f(x)\ge 0$；

可知若$-a=1-b$，符合题意；

若$-a>1-b$，当$x\in\left(1-b,-a\right)$时，可知$x+a\left\langle 0,\ln\left(x+b\right)\right\rangle 0$，

此时$f(x)<0$，不合题意；

综上所述：$-a=1-b$，即$b=a+1$，

则$a^2+b^2=a^2+\left(a+1\right)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，当且仅当$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以a^2+b^2的最小值为$\frac{1}{2}$；

解法二：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为$\left(-b,+\infty\right)$，

令$x+a=0$解得$x=-a$；令$\ln(x+b)=0$解得$x=1-b$；

则当$x\in\left(-b,1-b\right)$时，$\ln\left(x+b\right)<0$，故$x+a\le 0$，所以$1-b+a\le 0$；

$x\in\left(1-b,+\infty\right)$时，$\ln\left(x+b\right)>0$，故$x+a\ge 0$，所以$1-b+a\ge 0$；

故$1-b+a=0$， 则$a^2+b^2=a^2+\left(a+1\right)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，

当且仅当$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以a^2+b^2的最小值为$\frac{1}{2}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：分别求$x+a=0$、$\ln(x+b)=0$的根，以根和函数定义域为临界，比较大小分类讨论，结合符号性分析判断.

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数$f(x)=\sin 2x$和$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$与$g(x)$有相同零点

B. $f(x)$与$g(x)$有相同最大值

C. $f(x)$与$g(x)$有相同的最小正周期

D. $f(x)$与$g(x)$的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正弦函数的零点，最值，周期公式，对称轴方程逐一分析每个选项即可.

【详解】A 选项，令$f(x)=\sin 2x=0$，解得$x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即为$f(x)$零点，

令$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，即为$g(x)$零点，

显然$f(x),g(x)$零点不同，A 选项错误；

B 选项，显然$f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，B 选项正确；

C 选项，根据周期公式，$f(x),g(x)$的周期均为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，C 选项正确；

D 选项，根据正弦函数的性质$f(x)$的对称轴满足$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

$g(x)$的对称轴满足$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，

显然$f(x),g(x)$图像的对称轴不同，D 选项错误.

故选：BC

10. 抛物线C：$y^2=4x$的准线为l，P为C上的动点，过P作$\odot A:x^2+(y-4)^2=1$的一条切线，Q为切点，过P作l的垂线，垂足为B，则（　　）

A. l与$\odot A$相切

B. 当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D. 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，抛物线准线为 $x=-1$，根据圆心到准线的距离来判断；B 选项，P,A,B 三点共线时，先求出 P 的坐标，进而得出切线长；C 选项，根据 $|PB|=2$ 先算出 P 的坐标，然后验证 $k_{PA}k_{AB}=-1$ 是否成立；D 选项，根据抛物线的定义，$|PB|=|PF|$，于是问题转化成 $|PA|=|PF|$ 的 P 点的存在性问题，此时考察 AF 的中垂线和抛物线的交点个数即可，亦可直接设 P 点坐标进行求解.

【详解】A 选项，抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 $x=-1$，

$\odot A$ 的圆心 $(0,4)$ 到直线 $x=-1$ 的距离显然是 1，等于圆的半径，

故准线 l 和 $\odot A$ 相切，A 选项正确；

B 选项，P,A,B 三点共线时，即 $PA\perp l$，则 P 的纵坐标 $y_P=4$，

由 $y_P^2=4x_P$，得到 $x_P=4$，故 $P(4,4)$，

此时切线长 $|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，B 选项正确；

C 选项，当 $|PB|=2$ 时，$x_P=1$，此时 $y_P^2=4x_P=4$，故 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，

当 $P(1,2)$ 时，$A(0,4),B(-1,2)$，$k_{PA}=\dfrac{4-2}{0-1}=-2$，$k_{AB}=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

当 $P(1,-2)$ 时，$A(0,4),B(-1,2)$，$k_{PA}=\dfrac{4-(-2)}{0-1}=-6$，$k_{AB}=\dfrac{4-(-2)}{0-(-1)}=6$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

于是 $PA\perp AB$ 不成立，C 选项错误；

D 选项，方法一：利用抛物线定义转化

根据抛物线的定义，$|PB|=|PF|$，这里 $F(1,0)$，

于是 $|PA|=|PB|$ 时 P 点的存在性问题转化成 $|PA|=|PF|$ 时 P 点的存在性问题，

$A(0,4),F(1,0)$，AF 中点$\left(\frac{1}{2},2\right)$，$AF$ 中垂线的斜率为$-\frac{1}{k_{AF}}=\frac{1}{4}$，

于是 AF 的中垂线方程为：$y=\frac{2x+15}{8}$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立可得 $y^2-16y+30=0$，

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，即 AF 的中垂线和抛物线有两个交点，

即存在两个 P 点，使得$|PA|=|PF|$，D 选项正确.

方法二：（设点直接求解）

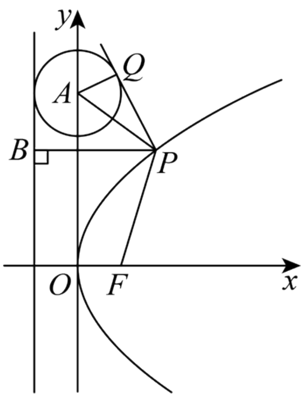
设 $P\left(\frac{t^2}{4},t\right)$，由 $PB\perp l$ 可得 $B(-1,t)$，又 $A(0,4)$，又$|PA|=|PB|$，

根据两点间的距离公式，$\sqrt{\frac{t^4}{16}+(t-4)^2}=\frac{t^2}{4}+1$，整理得 $t^2-16t+30=0$，

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，则关于 t 的方程有两个解，

即存在两个这样的 P 点，D 选项正确.

故选：ABD



11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

【答案】AD

【解析】

【分析】A 选项，先分析出函数的极值点为 $x=0,x=a$，根据零点存在定理和极值的符号判断出 $f(x)$ 在 $(-1,0),(0,a),(a,2a)$ 上各有一个零点；B 选项，根据极值和导函数符号的关系进行分析；C 选项，假设存

在这样的a,b，使得$x=b$为$f(x)$的对称轴，则$f(x)=f(2b-x)$为恒等式，据此计算判断；D选项，若存在这样的a，使得$(1,3-3a)$为$f(x)$的对称中心，则$f(x)+f(2-x)=6-6a$，据此进行计算判断，亦可利用拐点结论直接求解.

【详解】A选项，$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，由于$a>1$，

故$x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(a,+\infty\right)$时$f'(x)>0$，故$f(x)$在$\left(-\infty,0\right),\left(a,+\infty\right)$上单调递增，

$x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

则$f(x)$在$x=0$处取到极大值，在$x=a$处取到极小值，

由$f(0)=1>0$，$f(a)=1-a^3<0$，则$f(0)f(a)<0$，

根据零点存在定理$f(x)$在$(0,a)$上有一个零点，

又$f(-1)=-1-3a<0$，$f(2a)=4a^3+1>0$，则$f(-1)f(0)<0,f(a)f(2a)<0$，

则$f(x)$在$(-1,0),(a,2a)$上各有一个零点，于是$a>1$时，$f(x)$有三个零点，A选项正确；

B选项，$f'(x)=6x(x-a)$，$a<0$时，$x\in(a,0),f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

$x\in(0,+\infty)$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

此时$f(x)$在$x=0$处取到极小值，B选项错误；

C选项，假设存在这样的a,b，使得$x=b$为$f(x)$的对称轴，

即存在这样的a,b使得$f(x)=f(2b-x)$，

即$2x^3-3ax^2+1=2(2b-x)^3-3a(2b-x)^2+1$，

根据二项式定理，等式右边$(2b-x)^3$展开式含有x^3的项为$2C_3^3(2b)^0(-x)^3=-2x^3$，

于是等式左右两边x^3的系数都不相等，原等式不可能恒成立，

于是不存在这样的a,b，使得$x=b$为$f(x)$的对称轴，C选项错误；

D选项，

方法一：利用对称中心的表达式化简

$f(1)=3-3a$，若存在这样的a，使得$(1,3-3a)$为$f(x)$的对称中心，

则$f(x)+f(2-x)=6-6a$，事实上，

$f(x)+f(2-x)=2x^3-3ax^2+1+2(2-x)^3-3a(2-x)^2+1=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$，

于是$6-6a=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$

即$\begin{cases}12-6a=0\\12a-24=0\\18-12a=6-6a\end{cases}$，解得$a=2$，即存在$a=2$使得$(1,f(1))$是$f(x)$的对称中心，D选项正确.

方法二：直接利用拐点结论

任何三次函数都有对称中心，对称中心的横坐标是二阶导数的零点，

$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，$f'(x)=6x^2-6ax$，$f''(x)=12x-6a$，

由$f''(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$，于是该三次函数的对称中心为$\left(\dfrac{a}{2},f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$，

由题意$(1,f(1))$也是对称中心，故$\dfrac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=2$，

即存在$a=2$使得$(1,f(1))$是$f(x)$的对称中心，D选项正确.

故选：AD

【点睛】结论点睛：（1）$f(x)$的对称轴为$x=b\Leftrightarrow f(x)=f(2b-x)$；（2）$f(x)$关于$(a,b)$对称$\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$；（3）任何三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$都有对称中心，对称中心是三次函数的拐点，对称中心的横坐标是$f''(x)=0$的解，即$\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$是三次函数的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________.

【答案】95

【解析】

【分析】利用等差数列通项公式得到方程组，解出a_1,d，再利用等差数列的求和公式节即可得到答案.

【详解】因为数列a_n为等差数列，则由题意得$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7\\3(a_1+d)+a_1+4d=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=-4\\d=3\end{cases}$，

则$S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=10\times(-4)+45\times 3=95$.

故答案为：95.

13. 已知α为第一象限角，β为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则$\sin(\alpha+\beta)=$

______.

【答案】$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】法一：根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}$，再缩小 $\alpha+\beta$ 的范围，最后结合同角的平方和关系即可得到答案；法二：利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一：由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$，

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$k,m\in Z$，

则 $\alpha+\beta\in((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi)$，$k,m\in Z$，

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\dfrac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in Z$，则 $\sin(\alpha+\beta)<0$，

则 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$，联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

法二：因为 α 为第一象限角，β 为第三象限角，则 $\cos\alpha>0,\cos\beta<0$，

$\cos\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$，$\cos\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)$

$$=4\cos\alpha\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\frac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为：$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【答案】 ①. 24 ②. 112

【解析】

【分析】由题意可知第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选；利用列举法写出所有的可能结果，即可求解.

【详解】由题意知，选 4 个方格，每行和每列均恰有一个方格被选中，

则第一列有 4 个方格可选，第二列有 3 个方格可选，

第三列有 2 个方格可选，第四列有 1 个方格可选，

所以共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种选法；

每种选法可标记为 (a,b,c,d)，a,b,c,d 分别表示第一、二、三、四列的数字，

则所有的可能结果为：

$(11,22,33,44),(11,22,34,43),(11,22,33,44),(11,22,34,42),(11,24,33,43),(11,24,33,42)$，

$(12,21,33,44),(12,21,34,43),(12,22,31,44),(12,22,34,40),(12,24,31,43),(12,24,33,40)$，

$(13,21,33,44),(13,21,34,42),(13,22,31,44),(13,22,34,40),(13,24,31,42),(13,24,33,40)$，

$(15,21,33,43),(15,21,33,42),(15,22,31,43),(15,22,33,40),(15,22,31,42),(15,22,33,40)$，

所以选中的方格中，$(15,21,33,43)$ 的 4 个数之和最大，为 $15+21+33+43=112$.

故答案为：24；112

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是确定第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选，利用列举法写出所有的可能结果.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

（1）求 A.

（2）若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{6}$

（2）$2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据辅助角公式对条件$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$进行化简处理即可求解，常规方法还可利用同角三角函数的关系解方程组，亦可利用导数，向量数量积公式，万能公式解决；

（2）先根据正弦定理边角互化算出B，然后根据正弦定理算出b,c即可得出周长.

【小问 1 详解】

方法一：常规方法（辅助角公式）

由$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$可得$\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=1$，即$\sin(A+\frac{\pi}{3})=1$，

由于$A\in(0,\pi)\Rightarrow A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$，故$A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，解得$A=\frac{\pi}{6}$

方法二：常规方法（同角三角函数的基本关系）

由$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，又$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，消去$\sin A$得到：

$4\cos^2 A-4\sqrt{3}\cos A+3=0\Leftrightarrow(2\cos A-\sqrt{3})^2=0$，解得$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$A\in(0,\pi)$，故$A=\frac{\pi}{6}$

方法三：利用极值点求解

设$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x(0<x<\pi)$，则$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(0<x<\pi)$，

显然$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)_{\max}=2$，注意到$f(A)=\sin A+\sqrt{3}\cos A=2=2\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

$f(x)_{\max}=f(A)$，在开区间$(0,\pi)$上取到最大值，于是$x=A$必定是极值点，

即$f'(A)=0=\cos A-\sqrt{3}\sin A$，即$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$A\in(0,\pi)$，故$A=\frac{\pi}{6}$

方法四：利用向量数量积公式（柯西不等式）

设$\vec{a}=(1,\sqrt{3}),\vec{b}=(\sin A,\cos A)$，由题意，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，

根据向量的数量积公式，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=2\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$，

则$2\cos\vec{a},\vec{b}=2\Leftrightarrow\cos\vec{a},\vec{b}=1$，此时$\vec{a},\vec{b}=0$，即$\vec{a},\vec{b}$同向共线，

根据向量共线条件，$1\cdot\cos A=\sqrt{3}\cdot\sin A\Leftrightarrow\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

方法五：利用万能公式求解

设 $t=\tan\dfrac{A}{2}$，根据万能公式，$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2=\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$，

整理可得，$t^2-2(2-\sqrt{3})t+(2-\sqrt{3})^2=0=(t-(2-\sqrt{3}))^2$，

解得 $\tan\dfrac{A}{2}=t=2-\sqrt{3}$，根据二倍角公式，$\tan A=\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

由题设条件和正弦定理

$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$，

又 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin B\sin C\neq 0$，进而 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $B=\dfrac{\pi}{4}$，

于是 $C=\pi-A-B=\dfrac{7\pi}{12}$，

$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

由正弦定理可得，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，即 $\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{c}{\sin\dfrac{7\pi}{12}}$，

解得 $b=2\sqrt{2},c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围．

【答案】（1）$(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$

（2）$(1,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）求导，结合导数的几何意义求切线方程；

（2）解法一：求导，分析 $a \le 0$ 和 $a > 0$ 两种情况，利用导数判断单调性和极值，分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$，构建函数解不等式即可；解法二：求导，可知 $f'(x) = \mathrm{e}^x - a$ 有零点，可得 $a > 0$，进而利用导数求 $f\left(x\right)$ 的单调性和极值，分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$，构建函数解不等式即可.

【小问 1 详解】

当 $a = 1$ 时，则 $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$，$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$，

可得 $f(1) = \mathrm{e} - 2$，$f'(1) = \mathrm{e} - 1$，

即切点坐标为 $\left(1, \mathrm{e} - 2\right)$，切线斜率 $k = \mathrm{e} - 1$，

所以切线方程为 $y - \left(\mathrm{e} - 2\right) = \left(\mathrm{e} - 1\right)\left(x - 1\right)$，即 $\left(\mathrm{e} - 1\right)x - y - 1 = 0$.

【小问 2 详解】

解法一：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x) = \mathrm{e}^x - a$，

若 $a \le 0$，则 $f'(x) \ge 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值，不合题意；

若 $a > 0$，令 $f'(x) > 0$，解得 $x > \ln a$；令 $f'(x) < 0$，解得 $x < \ln a$；

可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln a\right)$ 内单调递减，在 $\left(\ln a, +\infty\right)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\ln a\right) = a - a\ln a - a^3$，无极大值，

由题意可得：$f\left(\ln a\right) = a - a\ln a - a^3 < 0$，即 $a^2 + \ln a - 1 > 0$，

构建 $g\left(a\right) = a^2 + \ln a - 1, a > 0$，则 $g'\left(a\right) = 2a + \dfrac{1}{a} > 0$，

可知 $g\left(a\right)$ 在 $\left(0, +\infty\right)$ 内单调递增，且 $g\left(1\right) = 0$，

不等式 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ 等价于 $g\left(a\right) > g\left(1\right)$，解得 $a > 1$，

所以 a 的取值范围为 $\left(1, +\infty\right)$；

解法二：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x) = \mathrm{e}^x - a$，

若 $f(x)$ 有极小值，则 $f'(x) = \mathrm{e}^x - a$ 有零点，

令 $f'(x)=e^{x}-a=0$，可得 $e^{x}=a$，

可知 $y=e^{x}$ 与 $y=a$ 有交点，则 $a>0$，

若 $a>0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln a$；令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln a$；

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 内单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^{3}$，无极大值，符合题意，

由题意可得：$f(\ln a)=a-a\ln a-a^{3}<0$，即 $a^{2}+\ln a-1>0$，

构建 $g(a)=a^{2}+\ln a-1,a>0$，

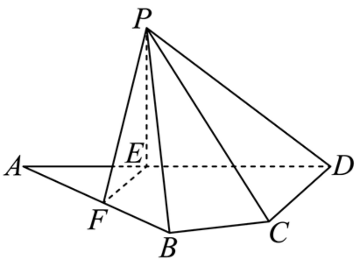
因为则 $y=a^{2},y=\ln a-1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，

可知 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，且 $g(1)=0$，

不等式 $a^{2}+\ln a-1>0$ 等价于 $g(a)>g(1)$，解得 $a>1$，

所以 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90^{\circ}$，$\angle BAD=30^{\circ}$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至！PEF，使得 $PC=4\sqrt{3}$.



（1）证明：$EF\perp PD$；

（2）求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$

【解析】

【分析】（1）由题意，根据余弦定理求得 $EF=2$，利用勾股定理的逆定理可证得 $EF\perp AD$，则 $EF\perp PE,EF\perp DE$，结合线面垂直的判定定理与性质即可证明；

（2）由（1），根据线面垂直的判定定理与性质可证明 $PE\perp ED$，建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$，利

用空间向量法求解面面角即可.

【小问1详解】

由 $AB=8,AD=5\sqrt{3},\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

得 $AE=2\sqrt{3},AF=4$，又 $\angle BAD=30^{\circ}$，在 $\triangle AEF$ 中，

由余弦定理得 $EF=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos\angle BAD}=\sqrt{16+12-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

所以 $AE^2+EF^2=AF^2$，则 $AE\perp EF$，即 $EF\perp AD$，

所以 $EF\perp PE,EF\perp DE$，又 $PE\cap DE=E,PE$、$DE\subset$ 平面 PDE，

所以 $EF\perp$ 平面 PDE，又 $PD\subset$ 平面 PDE，

故 $EF\perp PD$；

【小问2详解】

连接 CE，由 $\angle ADC=90^{\circ},ED=3\sqrt{3},CD=3$，则 $CE^2=ED^2+CD^2=36$，

在 $\triangle$PEC 中，$PC=4\sqrt{3},PE=2\sqrt{3},EC=6$，得 $EC^2+PE^2=PC^2$，

所以 $PE\perp EC$，由（1）知 $PE\perp EF$，又 $EC\cap EF=E,EC$、$EF\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，又 $ED\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp ED$，则 PE,EF,ED 两两垂直，建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $E(0,0,0),P(0,0,2\sqrt{3}),D(0,3\sqrt{3},0),C(3,3\sqrt{3},0),F(2,0,0),A(0,-2\sqrt{3},0)$，

由 F 是 AB 的中点，得 $B(4,2\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(3,3\sqrt{3},-2\sqrt{3}),\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3}),\overrightarrow{PB}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3}),\overrightarrow{PF}=(2,0,-2\sqrt{3})$，

设平面 PCD 和平面 PBF 的一个法向量分别为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1),\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x_1+3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PF}=2x_2-2\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，

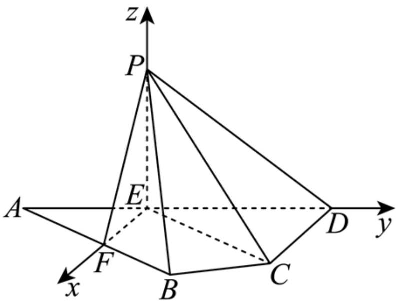
令 $y_1=2,x_2=\sqrt{3}$，得 $x_1=0,z_1=3,y_2=-1,z_2=1$，

所以 $\vec{n}=(0,2,3),\vec{m}=(\sqrt{3},-1,1)$，

所以 $\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{65}}{65}$，

设平面 PCD 和平面 PBF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$，

即平面 PCD 和平面 PBF 所成角的正弦值为 $\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.



18. 某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙，所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

【答案】（1）0.686

（2）（i）由甲参加第一阶段比赛；（i）由甲参加第一阶段比赛；

【解析】

【分析】（1）根据对立事件的求法和独立事件的乘法公式即可得到答案；

（2）（i）首先各自计算出 $P_{甲}=\left[1-(1-p)^3\right]q^3$，$P_{乙}=\left[1-(1-q)^3\right]\cdot p^3$，再作差因式分解即可判断；(ii) 首先得到 X 和 Y 的所有可能取值，再按步骤列出分布列，计算出各自期望，再次作差比较大小即可.

【小问 1 详解】

甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分，则甲第一阶段至少投中 1 次，乙第二阶段也至少投中 1 次，

$\therefore$ 比赛成绩不少于 5 分的概率 $P=\left(1-0.6^3\right)\left(1-0.5^3\right)=0.686$.

【小问 2 详解】

（i）若甲先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{甲}=\left[1-(1-p)^3\right]q^3$，

若乙先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为15分的概率为$P_{乙}=\left[1-(1-q)^3\right]\cdot p^3$，

$\because 0<p<q$，

$\therefore P_{甲}-P_{乙}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3$

$=(q-p)\left(q^2+pq+p^2\right)+(p-q)\cdot\left[(p-pq)^2+(q-pq)^2+(p-pq)(q-pq)\right]$

$=(p-q)\left(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2\right)$

$=3pq(p-q)(pq-p-q)=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0$，

$\therefore P_{甲}>P_{乙}$，应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii)若甲先参加第一阶段比赛，数学成绩X的所有可能取值为0，5，10，15，

$P(X=0)=(1-p)^3+\left[1-(1-p)^3\right]\cdot(1-q)^3$，

$P\left(X=5\right)=\left[1-\left(1-p\right)^3\right]\mathrm{C}_3^1q\cdot\left(1-q\right)^2$，

$P(X=10)=\left[1-(1-p)^3\right]\cdot\mathrm{C}_3^2q^2(1-q)$，

$P(X=15)=\left[1-(1-p)^3\right]\cdot q^3$，

$\therefore E(X)=15\left[1-(1-p)^3\right]q=15\left(p^3-3p^2+3p\right)\cdot q$

记乙先参加第一阶段比赛，数学成绩Y的所有可能取值为0，5，10，15，

同理$E(Y)=15\left(q^3-3q^2+3q\right)\cdot p$

$\therefore E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]$

$=15(p-q)pq(p+q-3)$，

因为$0<p<q$，则$p-q<0$，$p+q-3<1+1-3<0$，

则$(p-q)pq(p+q-3)>0$，

$\therefore$应该由甲参加第一阶段比赛.

【点睛】关键点点睛：本题第二问的关键是计算出相关概率和期望，采用作差法并因式分解从而比较出大小关系，最后得到结论.

19. 已知双曲线$C:x^2-y^2=m\left(m>0\right)$，点$P_1\left(5,4\right)$在$C$上，$k$为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点$P_n\left(n=2,3,...\right)$，过$P_{n-1}$作斜率为$k$的直线与$C$的左支交于点$Q_{n-1}$，令$P_n$为$Q_{n-1}$关于$y$轴的对称点，

记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n).

（1）若 $k=\frac{1}{2}$，求 x_2, y_2；

（2）证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.

【答案】（1）$x_2=3$，$y_2=0$

（2）证明见解析　　（3）证明见解析

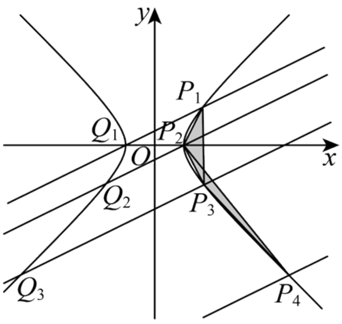
【解析】

【分析】（1）直接根据题目中的构造方式计算出 P_2 的坐标即可；

（2）根据等比数列的定义即可验证结论；

（3）思路一：使用平面向量数量积和等比数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.思路二：使用等差数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.

【小问 1 详解】



由已知有 $m=5^2-4^2=9$，故 C 的方程为 $x^2-y^2=9$.

当 $k=\frac{1}{2}$ 时，过 $P_1(5,4)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线为 $y=\frac{x+3}{2}$，与 $x^2-y^2=9$ 联立得到 $x^2-\left(\frac{x+3}{2}\right)^2=9$.

解得 $x=-3$ 或 $x=5$，所以该直线与 C 的不同于 P_1 的交点为 $Q_1(-3,0)$，该点显然在 C 的左支上.

故 $P_2(3,0)$，从而 $x_2=3$，$y_2=0$.

【小问 2 详解】

由于过 $P_n(x_n,y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $y=k(x-x_n)+y_n$，与 $x^2-y^2=9$ 联立，得到方程

$x^2-\left(k(x-x_n)+y_n\right)^2=9$.

展开即得$\left(1-k^2\right)x^2-2k\left(y_n-kx_n\right)x-\left(y_n-kx_n\right)^2-9=0$，由于$P_n\left(x_n,y_n\right)$已经是直线

$y=k\left(x-x_n\right)+y_n$和$x^2-y^2=9$的公共点，故方程必有一根$x=x_n$.

从而根据韦达定理，另一根$x=\frac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}-x_n=\frac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2}$，相应的

$y=k\left(x-x_n\right)+y_n=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以该直线与C的不同于P_n的交点为$Q_n\left(\frac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2},\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$，而注意到$Q_n$的横坐标亦

可通过韦达定理表示为$\frac{-\left(y_n-kx_n\right)^2-9}{\left(1-k^2\right)x_n}$，故$Q_n$一定在$C$的左支上.

所以$P_{n+1}\left(\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2},\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$.

这就得到$x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$，$y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以$x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}-\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$

$=\frac{x_n+k^2x_n+2kx_n}{1-k^2}-\frac{y_n+k^2y_n+2ky_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2+2k}{1-k^2}\left(x_n-y_n\right)=\frac{1+k}{1-k}\left(x_n-y_n\right)$.

再由$x_1^2-y_1^2=9$，就知道$x_1-y_1\neq0$，所以数列$\left\{x_n-y_n\right\}$是公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列.

【小问 3 详解】

方法一：先证明一个结论：对平面上三个点U,V,W，若$\overrightarrow{UV}=\left(a,b\right)$，$\overrightarrow{UW}=\left(c,d\right)$，则

$S_{\triangle UVW}=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|$.（若$U,V,W$在同一条直线上，约定$S_{\triangle UVW}=0$）

证明：$S_{\triangle UVW}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sin\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\cos^2\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}}$

$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}}{\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{UV}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|^2-\left(\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-\left(ac+bd\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-2abcd}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-2abcd}=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}=\frac{1}{2}|ad-bc|$.

证毕，回到原题.

由于上一小问已经得到$x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故$x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2-2k}{1-k^2}(x_n+y_n)=\frac{1-k}{1+k}(x_n+y_n)$.

再由$x_1^2-y_1^2=9$，就知道$x_1+y_1\neq0$，所以数列$\{x_n+y_n\}$是公比为$\frac{1-k}{1+k}$的等比数列.

所以对任意的正整数m，都有

$$
\begin{aligned}
&x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\\
&=\frac{1}{2}\left((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})+(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\right)-\frac{1}{2}\left((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})-(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\right)\\
&=\frac{1}{2}(x_n-y_n)(x_{n+m}+y_{n+m})-\frac{1}{2}(x_n+y_n)(x_{n+m}-y_{n+m})\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m(x_n-y_n)(x_n+y_n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m(x_n+y_n)(x_n-y_n)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)(x_n^2-y_n^2)\\
&=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).
\end{aligned}
$$

而又有$\overrightarrow{P_{n+1}P_n}=\left(-(x_{n+1}-x_n),-(y_{n+1}-y_n)\right)$， $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1})$，

故利用前面已经证明的结论即得

$$
\begin{aligned}
&S_n=S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}\left|-(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})+(y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})-(y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|(x_{n+1}y_{n+2}-y_{n+1}x_{n+2})+(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1})-(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2})\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)-\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\right)\right|.
\end{aligned}
$$

这就表明S_n的取值是与n无关的定值，所以$S_n=S_{n+1}$.

方法二：由于上一小问已经得到$x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故 $x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2-2k}{1-k^2}\left(x_n+y_n\right)=\frac{1-k}{1+k}\left(x_n+y_n\right)$.

再由 $x_1^2-y_1^2=9$，就知道 $x_1+y_1\neq 0$，所以数列 $\left\{x_n+y_n\right\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列.

所以对任意的正整数 m，都有

$$
\begin{aligned}
& x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m} \\
& =\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)+\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)-\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right) \\
& =\frac{1}{2}\left(x_n-y_n\right)\left(x_{n+m}+y_{n+m}\right)-\frac{1}{2}\left(x_n+y_n\right)\left(x_{n+m}-y_{n+m}\right) \\
& =\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m\left(x_n-y_n\right)\left(x_n+y_n\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\left(x_n+y_n\right)\left(x_n-y_n\right) \\
& =\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)\left(x_n^2-y_n^2\right) \\
& =\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).
\end{aligned}
$$

这就得到 $x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3}=\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)=x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}$，

以及 $x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3}=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\right)=x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}$.

两式相减，即得 $\left(x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3}\right)-\left(x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3}\right)=\left(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}\right)-\left(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}\right)$.

移项得到 $x_{n+2}y_{n+3}-y_nx_{n+2}-x_{n+1}y_{n+3}+y_nx_{n+1}=y_{n+2}x_{n+3}-x_ny_{n+2}-y_{n+1}x_{n+3}+x_ny_{n+1}$.

故 $\left(y_{n+3}-y_n\right)\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)=\left(y_{n+2}-y_{n+1}\right)\left(x_{n+3}-x_n\right)$.

而 $\overrightarrow{P_nP_{n+3}}=\left(x_{n+3}-x_n,y_{n+3}-y_n\right)$，$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=\left(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1}\right)$.

所以 $\overrightarrow{P_nP_{n+3}}$ 和 $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ 平行，这就得到 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，即 $S_n=S_{n+1}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将解析几何和数列知识的结合，需要综合运用多方面知识方可得解.